ПРАКТИЧЕСКАЯ

ГЕОДЕЗІЯ.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 22 Ноября 1897 г.

Памяти

дорогого учителя

Профессора и Академика

А. Н. Савича.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Не совсѣмъ обычное заглавіе, данное книгѣ, требуетъ поясненія. Все существенное изъ теоретической части Геодезіи помѣщено въ сжатомъ видѣ въ Главѣ II-ой; для желающихъ ближе ознакомиться съ теоріею имѣются трактаты Пюиссана, Кларка и Гельмерта *). Цѣль же моей книги—показать, какъ прилагать теорію къ практикѣ. Многочисленные (болѣе ста) примѣры дадутъ возможность изучить ходъ наблюденій и вычисленій даже тѣмъ, кто не знакомъ съ подробностями теоріи; къ тому же извѣстно, что самое вычисленіе примѣровъ необходимо для полнаго усвоенія теоріи.

При составленіи этой книги, кромѣ собственнаго опыта, вынесеннаго изъ дѣйствительныхъ геодезическихъ работъ, и печатныхъ источниковъ, указанныхъ въ текстѣ, я пользовался рукописными замѣтками, веденными мною на лекціяхъ профессоровъ В. К. Деллена (†), А. Н. Савича (†), Н. Я. Цингера и О. Э. Штубендорфа. При обработкѣ главы о ни-

*) *Puissant*—Traité de Géodésie, 1842, *Clarke*—Geodesy, 1880, и *Helmert*—Die Matematischen und Physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie, 1880—1884. На русскомъ языкѣ имѣются: мой переводъ Геодезіи Кларка (1890) и Лекціи по Высшей Геодезіи покойнаго заслуженнаго профессора Ѳ. А. Слудскаго (1894).

велиръ-теодолитѣ я обязанъ многими цѣнными указаніями нашему опытному производителю геодезическихъ работъ А. Н. Иванову. Чертежи и повѣрки числовыхъ примѣровъ и таблицъ разновременно выполнили бывшіе мои слушатели: В. Г. Болдыревъ, Е. В. Гейзеръ (†), Н. М. Гришкевичъ, С. П. Деревягинъ, А. Н. Иванина, А. Н. Картыковъ, Н. Л. Марковскій, П. А. Нечаевъ, И. М. Розоноеръ, И. С. Свищовъ, Н. Е. Федоровъ и Н. И. Шлепневъ. Считаю пріятнымъ долгомъ выразить здѣсь всѣмъ этимъ лицамъ мою искреннюю признательность.

В. Витковскій.

С.-Петербургъ
23 Ноября 1897 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

§§ **I. Видъ и размѣры Земли.** стр.

II. Земной сфероидъ.

III. О тріангуляціи вообще.

IV. Рекогносцировки.

V. Тригонометрическіе знаки.

§§ **VI. Измѣреніе базисовъ.** стр.

VII. Измѣреніе угловъ.

VIII. Приведеніе наблюденій.

IX. Вычисленіе тріангуляціи.

X. Вычисленіе географическихъ координатъ.

XI. Вычисленіе высотъ.

XII. Нивелиръ-теодолитныя работы.

XIII. Физическое нивелированіе.

XIV. Съемочные планшеты.

XV. Картографическія проекціи.

XVI. Составленіе картъ.

XVII. Изданіе картъ.

Главнѣйшія изъ замѣченныхъ опечатокъ.

(Звѣздочкою обозначены строки снизу).

Страница.	Строка.	*Напечатано:*	*Должно быть:*
74	1*	latiude	latitude
143	5	отдѣльная вершина	отдѣльную вершину
150	15*	желѣзныхъ	желѣзнымъ
152	6	футовъ	фунтовъ
225	2*	$\frac{Sin^2 i'}{2}$	$\frac{Sin^2 \text{I}'}{2}$
278	11*	Шольнесъ	Шонъ
291	3*	на 4′	черезъ 4′
392	5*	Загожье	Захожье
395	2*	центировки	центрировки
486	9*	тріагуляція	тріангуляція
493	2	Володуй	Водолуй
568	9*	уравенной	уровенной
644	4	§ 165	§ 166
701	6	$2\left(\frac{\Delta\alpha^2}{\alpha}\right)$	$2\left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)^2$
797	5*	8.846 6890	8.848 6890
815	8	9.658 7502	9.653 7502

I.

Видъ и размѣры Земли.

1. Шарообразность Земли. Геодезія имѣетъ предметомъ изученіе вида и размѣровъ обитаемой нами планеты—Земли. Такое изученіе важно не только въ смыслѣ познанія истины, но имѣетъ и большое практическое значеніе: всѣ линейныя разстоянія въ астрономіи выражаются въ длинѣ радіуса земного экватора, такъ что выводы геодезическихъ измѣреній лежатъ въ основѣ всѣхъ пространственныхъ понятій видимаго міра. Кромѣ того безъ знанія вида и величины Земли невозможно получить удовлетворительныхъ географическихъ картъ, необходимыхъ при рѣшеніи множества практическихъ вопросовъ.

Хотя бòльшая часть земной поверхности (около 73,5%) покрыта океанами и соединяющимися съ ними морями, уровень которыхъ однообразенъ, но зато материки и острова, наоборотъ, представляютъ преимущественно сложныя сочетанія возвышенностей и низменностей, горъ, долинъ и т. п.; казалось бы, объ общемъ видѣ Земли не можетъ быть и рѣчи, и потому необходимо оговорить, что именно разумѣютъ въ Геодезіи подъ словами «общій видъ Земли». Въ настоящее время подъ этими словами разумѣютъ видъ спокойнаго уровня океановъ и уровня воды въ каналахъ, соединяющихся какъ между собою, такъ и съ океанами и открытыми морями, и которыми мысленно прорыты всѣ материки и острова, причемъ однако распредѣленіе массъ въ горахъ, равнинахъ и вообще на сушѣ предполагается неизмѣненнымъ. Послѣднее замѣчаніе необходимо сдѣлать потому, что если, напримѣръ, срыть цѣлый горный хребетъ, то, вслѣдствіе отсутствія притяженія его массы, уровень воды, а слѣдовательно и видъ Земли, по крайней мѣрѣ по близости отъ хребта, измѣнится. По свойству жидкостей ограничиваться въ спокойномъ состояніи поверхностью, нормальною (перпендикулярною) къ направленію силы тяжести, можно сказать, что подъ общимъ видомъ Земли разумѣютъ *кривую поверхность, нормали къ которой во всѣхъ ея точкахъ совпадаютъ съ направленіемъ силы тяжести*, и при томъ такую поверхность, которая въ океанахъ и открытыхъ моряхъ совпадаетъ съ дѣйствительнымъ уровнемъ воды въ спокойномъ состояніи (т. е. если устранить колебанія уровня отъ приливовъ и отливовъ, волненій и другихъ причинъ).

Новѣйшія нивелировки убѣждаютъ, что уровни разныхъ океановъ, въ предѣлахъ точности наблюденій, одинаковы. Не смотря на разнообразіе рельефа суши, направленіе силы тяжести (отвѣсная линія) мѣняется при переходѣ отъ одной точки земной поверхности къ другой непрерывно, безъ скачковъ, такъ что даже подъ частями суши съ самымъ причудливымъ рельефомъ уровень воды въ сообщающихся каналахъ сохранялъ бы извѣстную правильность. Поверхностей, нормали къ которымъ во всѣхъ точкахъ совпадаютъ съ направленіями силы тяжести на Землѣ, можно вообразить безчисленное множество, какъ выше, такъ и ниже уровня океана; ихъ вообще называютъ *уровенными поверхностями*. Слѣдовательно, наиболѣе краткое опредѣленіе вида Земли будетъ: *видъ той уровенной поверхности, которая совпадаетъ со среднимъ уровнемъ океановъ и открытыхъ морей.*

Говоря о видѣ Земли, въ Геодезіи конечно не принимаютъ въ разсчетъ колебаній уровня океана отъ вѣтра, измѣненій давленія атмосферы, приливовъ и отливовъ и т. п. и разсматриваютъ нѣкоторый средній уровень. Но, строго говоря, этотъ средній уровень не есть уровенная поверхность, какъ она опредѣлена выше, а именно по слѣдующимъ тремъ причинамъ:

1) Наблюденія высоты барометра въ разныхъ мѣстахъ земной поверхности (приведенныя къ уровню океана) показываютъ нѣкоторую зависимость этой высоты отъ широтъ и долготъ, вслѣдствіе чего въ точкахъ, гдѣ среднія стоянія барометра раз-

личны, уровенныя поверхности тоже должны различаться по высотѣ на величину, равную разности среднихъ высотъ барометра, умноженной на отношеніе плотностей ртути и воды.

2) Хотя приливы и отливы суть явленія періодическія, однако математическое изслѣдованіе показываетъ, что въ рядахъ, выражающихъ высоты приливныхъ волнъ, имѣются, кромѣ періодическихъ, еще и постоянные члены, зависящіе отъ массъ Солнца и Луны, такъ что, если бы притяженіе Солнца и Луны на жидкую оболочку Земли прекратилось, то уровень океановъ не былъ бы среднимъ уровнемъ изъ нынѣшнихъ наблюденій.

3) Существованіе постоянныхъ теченій въ океанахъ прямо указываетъ на то, что вода въ нихъ не находится въ состояніи равновѣсія.

Эти обстоятельства вліяютъ на уровень весьма мало и не имѣютъ практическаго значенія, поэтому выше приведенное опредѣленіе вида Земли, какъ средней уровенной поверхности океановъ, при теперешнемъ состояніи науки и современной точности наблюденій, можно считать удовлетворительнымъ.

Вопросъ объ общемъ видѣ Земли издавна привлекалъ вниманіе мыслителей. Различныя явленія, не ускользнувшія отъ замѣчанія даже случайныхъ наблюдателей, заставляли догадываться, что Земля имѣетъ видъ, близкій къ шару. Въ настоящее время доказательствами шарообразности Земли служатъ:

1) Всегда кругообразный видъ горизонта въ океанѣ и въ открытыхъ равнинахъ.

2) Постепенное появленіе и исчезаніе высокихъ предметовъ по мѣрѣ приближенія и удаленія наблюдателя, съ какой бы стороны приближеніе или удаленіе ни происходило; при приближеніи сперва появляется верхняя часть предмета, затѣмъ середина и наконецъ основаніе; при удаленіи, наоборотъ, сперва скрывается основаніе, затѣмъ середина и наконецъ верхняя часть. Внимательное разсматриваніе далекихъ и высокихъ предметовъ въ зрительныя трубы показываетъ, что они скрываются не вслѣдствіе малой прозрачности нижнихъ слоевъ атмосферы, а именно отъ закрыванія ихъ выпуклостью промежуточныхъ частей водной или земной поверхности.

3) Кругосвѣтныя путешествія; при возвращеніи въ то же

мѣсто оказывается потеря или выигрышъ цѣлыхъ сутокъ, что было бы совершенно немыслимо, если бы Земля имѣла видъ плоскаго или только выпуклаго диска.

4) Сходство Земли со всѣми другими планетами, которыя не представляютъ ни одного исключенія изъ сферической фигуры.

5) Круговая тѣнь Земли во время лунныхъ затменій; только шаръ при всевозможныхъ положеніяхъ можетъ отбрасывать круглую тѣнь.

6) Послѣдовательное и правильное измѣненіе высотъ звѣздъ, по мѣрѣ передвиженія наблюдателя съ сѣвера на югъ или обратно (выпуклость по меридіанамъ).

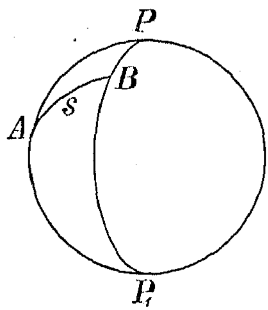
7) Различіе во временахъ восхода и заката Солнца и другихъ небесныхъ свѣтилъ въ точкахъ, расположенныхъ подъ разными долготами (выпуклость по параллелямъ).

8) Теоретическія соображенія въ связи съ предположеніемъ объ огненножидкомъ происхожденіи Земли. По законамъ механики жидкое тѣло, подъ дѣйствіемъ одной только силы притяженія между частицами, должно принять видъ шара.

Общій видъ обитаемой нами планеты хотя и близокъ въ шару, но все же не совсѣмъ шаръ. Научная разработка вопроса о видѣ Земли началась лишь съ XVII вѣка, когда *Д. Кассини* (1625—1712) замѣтилъ, что Юпитеръ имѣетъ полярное сжатіе, и когда *Ньютонъ* (1642—1727), открывъ законы всемірнаго тяготѣнія, доказалъ, что уединенное въ пространствѣ жидкое и вращающееся около оси тѣло должно принять фигуру, называемую эллипсоидомъ вращенія или сфероидомъ. Въ настоящее время убѣдились, что и сфероидъ не есть истинный видъ уровенной поверхности.

2. Понятіе о градусномъ измѣреніи. Попытки опредѣлить *размѣры земного шара* принадлежатъ ко временамъ глубокой древности: еще халдеи полагали, что всю Землю можно обойти въ одинъ годъ. Но первыя научныя указанія на видъ и размѣры Земли находятся въ сочиненіяхъ *Аристотеля* (384—322 до Р. Х.); именно въ трактатѣ «О небѣ», въ книгѣ II-ой, этотъ философъ приводитъ доказательства шарообразности Земли и прибавляетъ, что, по мнѣнію современныхъ ему математиковъ, окружность земного шара равна 400 000 стадіямъ; но какимъ образомъ было получено это число, Аристотель не объясняетъ. Поэтому истиннымъ основателемъ Геодезіи, какъ науки, признается *Эратосѳенъ* (276—196 до Р. Х.), ученый, завѣдывавшій знаменитою александрійскою библіотекою въ царствованіе Птоломея III-го. Онъ вывелъ размѣры Земли по способу, въ общихъ чертахъ примѣняемому и въ настоящее время, именно при помощи такъ называемаго *градуснаго измѣренія*.

Пусть на шарообразной поверхности Земли опредѣлены широты и долготы двухъ точекъ A и B (черт. 1) и измѣрено линейное разстояніе между этими точками. Изъ рѣшенія сферическаго треугольника ABP, образованнаго меридіанами точекъ A и B и дугою большого круга AB, по даннымъ двумъ сторонамъ AP и BP (въ предположеніи, что Земля шарообразна, дуги меридіановъ AP и BP будутъ дополненіями широтъ точекъ A и B до $90°$) и углу между ними APB (представляющему разность долготъ этихъ же точекъ) легко вычислить угловую величину дуги AB, т. е. сколько въ ней градусовъ, минутъ и секундъ; пусть она содержитъ σ''. Зная, съ другой стороны, линейную длину той же дуги $AB = s$ и называя радіусъ земного шара черезъ R, можно составить пропорцію:



Черт. 1.

$$\sigma : 360.60.60 = s : 2\pi R$$

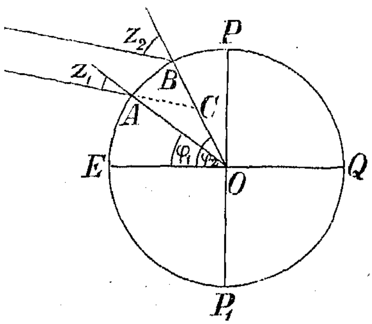
откуда

$$R = \frac{360.60.60}{2\pi} \cdot \frac{s}{\sigma} = \varkappa \cdot \frac{s}{\sigma} \tag{1}$$

гдѣ $\pi = 3.141592...$, а $\varkappa = \frac{360.60.60}{2\pi} = 206264.8...$

Изъ этой формулы радіусъ получается конечно въ тѣхъ же линейныхъ единицахъ, въ которыхъ выражена длина дуги s.

Точность вычисленія радіуса R зависитъ отъ точности, съ которой извѣстны входящія въ формулу (1) числа s и σ; первое получается измѣреніемъ линейнаго разстоянія между точками A и B, а второе—изъ рѣшенія сферическаго треугольника APB, такъ что точность опредѣленія σ зависитъ отъ точности, съ которою извѣстны широты и долготы точекъ A и B. Такъ какъ широты опредѣляются точнѣе, чѣмъ долготы, то самый выгодный случай для вывода углового разстоянія σ есть тотъ, когда обѣ точки A и B лежатъ на одномъ меридіанѣ. Легко понять, что въ этомъ случаѣ рѣшеніе сферическаго треугольника устраняется и опредѣленіе σ сводится къ изысканію разности широтъ точекъ A и B; эта разность широтъ можетъ быть получена простѣйшимъ способомъ изъ одновременнаго измѣренія высотъ какого-нибудь свѣтила (Солнца или звѣзды) въ точкахъ A и B, когда свѣтило находится въ плоскости общаго ихъ меридіана.



Черт. 2.

Пусть высоты свѣтила въ точкахъ A и B (черт. 2) будутъ h_1 и h_2, зенитныя разстоянія его z_1 и z_2, причемъ

$$z_1 = 90^\circ - h_1 \text{ и } z_2 = 90^\circ - h_2$$

а широты этихъ точекъ соотвѣтственно φ_1 и φ_2 (EQ—экваторъ). Уголъ σ равенъ углу AOB между радіусами AO и BO. Продолживъ направленіе на свѣтило въ A до встрѣчи съ BO въ точкѣ C и замѣчая, что, по отдаленности свѣтила отъ Земли, направленія на него изъ A и B можно считать параллельными, имѣемъ:

$$\sigma = \angle ACB - \angle CAO = z_2 - z_1 = (90^\circ - h_2) - (90^\circ - h_1)$$

или

$$\sigma = h_1 - h_2$$

но изъ чертежа видно еще, что

$$\sigma = \varphi_2 - \varphi_1$$

поэтому

$$h_1 - h_2 = \varphi_2 - \varphi_1$$

т. е. разность высотъ свѣтила, одновременно измѣренныхъ на двухъ точкахъ, лежащихъ на одномъ меридіанѣ, дѣйствительно равна разности широтъ этихъ точекъ. Зная линейное разстояніе s тѣхъ же точекъ, не трудно вычислить длину одного градуса, которую назовемъ черезъ D, изъ пропорціи

$$D : s = 1^\circ : (\varphi_2 - \varphi_1)^\circ$$

откуда

$$D = \frac{s}{(\varphi_2 - \varphi_1)^\circ}$$

Итакъ, опредѣленіе разности широтъ двухъ точекъ на одномъ меридіанѣ въ связи съ измѣреніемъ ихъ линейнаго разстоянія позволяетъ вычислить длину одного градуса; вотъ почему подобная работа называется *градуснымъ измѣреніемъ*. Зная длину одного градуса, не трудно вычислить длину всей окружности и ея радіусъ. Каждое градусное измѣреніе состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ дѣйствій: опредѣленія угла, составленнаго отвѣсными линіями двухъ точекъ, и опредѣленія линейнаго разстоянія между ними; первое составляетъ *астрономическую*, а второе—*геодезическую* часть градуснаго измѣренія.

Изъ предъидущаго легко видѣть, что всего проще произвести градусное измѣреніе по меридіану, но оно можетъ быть выполнено и по параллели, или вообще въ любомъ направленіи. Геодезическія дѣйствія остаются во всѣхъ случаяхъ одинаковыми, и разница заключается лишь въ дѣйствіяхъ астрономическихъ. Для градуснаго измѣренія по меридіану надо опредѣлить только разность широтъ конечныхъ точекъ, а для измѣренія по параллели или въ произвольномъ направленіи необходимо опредѣлить еще разность долготъ.

3. Старѣйшія градусныя измѣренія. *Эратосѳенъ*, жившій въ Александріи, избралъ, около 230 г. до Р. Х., для своего градуснаго измѣренія дугу александрійскаго меридіана, предположивъ, что на немъ же лежитъ Сіена (нынѣшній Ассуанъ). Свѣтиломъ для измѣренія высотъ служило Солнце. Эратосѳенъ узналъ, что въ Сіенѣ, во время лѣтняго солнцестоянія, въ полдень, можно видѣть изображеніе Солнца въ глубокихъ колодцахъ, т. е., что Солнце достигаетъ тамъ въ это время зенита, и высота его равна стало быть 90°. Въ Александріи, по наблюденіямъ тѣни гномона, въ то же самое время, Солнце оказывалось удаленнымъ отъ зенита на одну пятидесятую часть окружности или на 7°12′, такъ что для разности широтъ этихъ городовъ получилась непосредственно величина 7°12′. Съ другой стороны, изъ разсказовъ купцовъ, сопровождавшихъ свои караваны, Эратосѳенъ узналъ, что путь между Сіеною и Александріею лежитъ почти въ направленіи полуденной тѣни, т. е. по меридіану, и, судя по времени, потребному на весь переходъ, и по скорости движенія каравановъ, разстояніе между названными городами равно 5 000 стадіямъ. Если 7°12′ соотвѣтствуютъ 5 000 стадіямъ, то длина окружности или 360° выходитъ равною 250 000 стадіямъ, а радіусъ Земли = 39 789 ст.

По новѣйшимъ опредѣленіямъ разность широтъ Александріи и Сіены равна 7°7′, и оба города не лежатъ на одномъ меридіанѣ (Сіена почти на 3° восточнѣе Александріи), тѣмъ не менѣе астрономическая часть работы Эратосѳена для своего времени была почти безупречна. Къ несчастію истинная длина египетской стадіи нынѣ не извѣстна. Разные ученые изслѣдователи опредѣляютъ ее отъ 158 до 185 метровъ, и потому о точности этого перваго градуснаго измѣренія въ настоящее время нельзя составить себѣ вѣрнаго представленія. Во всякомъ случаѣ, какъ упомянуто выше, основаніе способа Эратосѳена совершенно вѣрно и примѣняется до сихъ поръ.

Слѣдующая попытка опредѣлить размѣры Земли была сдѣлана *Посидоніемъ* (135—50 до Р. Х.), астрономомъ и философомъ-стоикомъ. Крайними точками дуги меридіана избраны были Александрія и островъ Родосъ. Угловое разстояніе получено изъ наблюденій звѣзды Канопуса (α Argûs), которая въ Александріи подымается до высоты $7^1/_2$°, а на Родосѣ едва показывается на горизонтѣ, такъ что высота ея тамъ почти равна 0°. Линейное разстояніе оцѣнено по времени перехода судовъ и принято равнымъ 5 000 стадіямъ. Отсюда окружность Земли оказывается 240 000 ст. Результатъ Посидонія признается менѣе удовлетворительнымъ, чѣмъ выводъ Эратосѳена, потому что на высоты свѣтилъ близъ горизонта весьма значительно вліяетъ преломленіе лучей въ атмосферѣ, тогда еще неизвѣстное, да и оцѣнка линейнаго разстоянія по морю не могла быть благонадежною. Нынѣ извѣстно, что разность широтъ Александріи и Родоса всего 5°, и они далеко не лежатъ на одномъ меридіанѣ.

Замѣчательно, что въ сочиненіяхъ *Птоломея* (87 — 165), извѣстнаго александрійскаго астронома, не упоминается объ опредѣленіи размѣровъ Земли, хотя въ его «Географіи» видимо подразумѣвается ея шарообразность и длина одного градуса принимается равною 500 стадіямъ, что даетъ для окружности всей Земли 180 000 ст.—число значительно меньшее, чѣмъ результаты Эратосѳена и Посидонія.

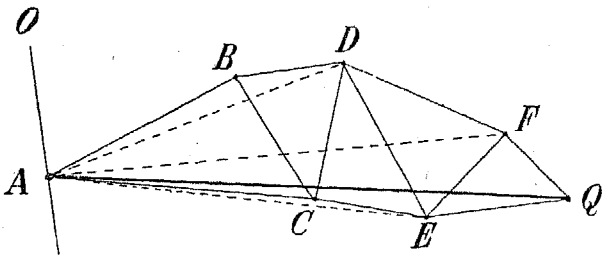
Послѣ уничтоженія александрійской библіотеки, въ смутные годы первыхъ вѣковъ нашей эры, всякія научныя работы прервались, и новая попытка градуснаго измѣренія сдѣлана лишь въ 827 году арабами, которые, достигнувъ политическаго могущества, въ лицѣ своихъ калифовъ съ любовью покровительствовали развитію точныхъ наукъ. Калифъ Альмамумъ, сынъ Гарунъ-аль-Рашида, приказалъ своимъ астрономамъ *Калидъ-бенъ-Абдулмелику* и *Али-бенъ-Изъ* измѣрить дугу меридіана въ равнинѣ Синджаръ, лежащей къ западу отъ рѣки Тигра и нынѣшняго города Мосула. Въ избранной исходной точкѣ, около 35° сѣверной широты, арабскіе ученые раздѣлились на двѣ партіи и направились одна на сѣверъ, другая на югъ, производя измѣренія арабскими локтями. Эти измѣренія продолжались до тѣхъ поръ, пока каждая партія не прошла по меридіану 1°, что опредѣлялось имѣвшимися тогда угломѣрными инструментами по высотамъ звѣздъ. Одна партія получила для градуса меридіана величину 56, а другая $56^2/_3$ мили по 4 000 локтей. Второе число было признано точнѣе перваго и принято за величину градуса меридіана.

Покуда длина арабскаго локтя была неизвѣстна, нельзя было составить себѣ понятія о точности измѣренія арабовъ; извѣстно было лишь, что арабскій локоть имѣлъ 27 дюймовъ, а каждый дюймъ равнялся шести положеннымъ въ рядъ ячменнымъ зернамъ. Но недавно, на нильскомъ островѣ Рода, подъ Каиромъ, на колоннѣ изъ тесаннаго камня, найдены черты, означающія арабскіе локти, подраздѣленные на дюймы. Оказалось, что арабскій локоть равенъ приблизительно $49\frac{1}{3}$ сантиметрамъ, такъ что длина арабской мили выходитъ около 1973 метровъ или 925 саж. Отъ помноженія этого числа на $56\frac{2}{3}$ получается для длины градуса, подъ широтою 35°, 104.8 версты, что весьма близко къ современнымъ опредѣленіямъ.

Въ средніе вѣка свѣдѣнія грековъ и арабовъ о шарообразности Земли и ея величинѣ были забыты, и только въ началѣ XVI вѣка, послѣ эпохи великихъ морскихъ путешествій, произведена новая попытка опредѣленія размѣровъ Земли. Именно, французскій ученый и врачъ короля Франциска II-го, *Фернель* (1497—1558), въ 1528 году, измѣрилъ дугу меридіана близъ Парижа. Угловыя высоты Солнца онъ опредѣлялъ при помощи треугольника съ діоптрами, одна сторона котораго была раздѣлена на части, соотвѣтствующія минутамъ дуги, линейное же разстояніе Фернель получилъ счетомъ оборотовъ колеса своей повозки. Длина градуса меридіана подъ широтою Парижа получилась равною 56 746 тоазамъ или около 51 838 саж.

4. Примѣненіе тріангуляціи. Въ перечисленныхъ попыткахъ опредѣленія размѣровъ Земли, считаемой правильнымъ шаромъ, наиболѣе слабую часть составляло измѣреніе линейной длины дуги. Помимо неточностей самыхъ способовъ измѣреній, большія ошибки должны были происходить и потому, что на поверхности суши весьма рѣдко встрѣчаются большія открытыя и совершенно ровныя пространства. Мѣстныя же препятствія и медленность непосредственныхъ измѣреній побуждали ограничиваться измѣреніемъ лишь короткихъ разстояній, что, въ свою очередь, представляло невыгоду: при малой величинѣ s (см. формулу 1) даже небольшая ошибка въ угловомъ разстояніи σ производитъ значительную погрѣшность въ величинѣ R.

Огромнымъ шагомъ впередъ было изобрѣтеніе *тріангуляціи*, сдѣланное голландскимъ ученымъ *Виллебрордомъ Снелліусомъ* (1580—1626) въ началѣ XVII вѣка и состоящее въ томъ, что непосредственное измѣреніе длинныхъ линій замѣняется тригонометрическимъ вычисленіемъ сѣти смежныхъ треугольниковъ, въ которыхъ измѣрены всѣ углы и только одна какая нибудь сторона. Пусть на поверхности Земли избрана система точекъ $A, B, C \dots Q$ (чертежъ 3) такъ, что съ каждой изъ нихъ видны окружающія ее смежныя точки. Располагаясь послѣдовательно на всѣхъ точкахъ съ угломѣрнымъ инструментомъ, можно легко и скоро измѣрить углы треугольниковъ ABC, BCD, CDE и т. д. Если кромѣ того непосредственно измѣрена какая нибудь сторона, напримѣръ AB, называемая въ этомъ случаѣ *базисомъ* или *основаніемъ*, то нетрудно вычислить двѣ другія стороны BC и AC треугольника ABC, затѣмъ по сторонѣ BC вычислить стороны BD и CD треугольника BCD и т. д. Зная всѣ



Черт. 3.

стороны и углы послѣдовательныхъ треугольниковъ, легко вычислить и діагонали: AD изъ треугольника ABD, AF изъ треугольника ADF и пр., такъ что наконецъ получится и разстояніе AQ между конечными точками, хотя бы послѣднія и не были взаимно видимы и между ними лежали бы совершенно непроходимыя препятствія. Какъ сказано выше, измѣрить непосредственно надо только одну сторону (для повѣрки измѣряютъ обыкновенно еще гдѣ нибудь и другую), которая по незначительности своей длины всегда можетъ быть избрана на ровной, открытой и доступной для измѣренія мѣстности.

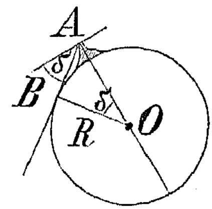
Снелліусъ, предложившій этотъ новый способъ для опредѣленія линейнаго разстоянія между конечными точками градуснаго измѣренія, самъ произвелъ таковое въ 1614—1616 гг. въ Голландіи, между городами Алкмаромъ и Бергеномъ; онъ составилъ цѣпь изъ 32-хъ треугольниковъ, причемъ измѣрилъ въ нихъ всѣ углы и три очень малыхъ базиса въ 87, 166 и

348 рутъ (по 12 голландскихъ футовъ). Изъ вычисленій, требовавшихъ много времени, потому что логариѳмы, только что изобрѣтенные *Непероемъ* (1550—1617), не вошли еще въ употребленіе, Снелліусъ получилъ для длины 1° меридіана подъ широтою 52° величину 28 500 гол. рутъ или около 50 334 сажени.

Хотя этотъ результатъ не имѣетъ научной цѣнности, и самъ Снелліусъ считалъ его лишь практическимъ примѣромъ изобрѣтеннаго имъ способа тріангуляціи, однако его работа весьма замѣчательна въ исторіи Геодезіи. Въ этой первой тригонометрической работѣ не только примѣненъ новый способъ опредѣленія большихъ разстояній на поверхности Земли, но и разработаны разные пріемы, вошедшіе потомъ во всеобщее употребленіе. Такъ, его наименьшій базисъ въ 87 рутъ, близъ Лейдена, не есть непосредственно сторона главнаго треугольника, а представляетъ сторону небольшой *базисной сѣти* (см. § 49), соединяющей этотъ базисъ со стороною Лейденъ-Гаага; кромѣ угловъ, необходимыхъ для вычисленія треугольниковъ, онъ измѣрилъ и много *лишнихъ*, служившихъ для повѣрки вычисленій; наконецъ изъ тригонометрической точки, расположенной близъ его жилища въ Лейденѣ, Снелліусъ опредѣлилъ углы, составляемые направленіями на три церкви названнаго города, и затѣмъ, вычисливъ по нимъ положеніе начальной точки тріангуляціи, впервые рѣшилъ такъ называемую *Потенотову задачу* (§ 129) задолго до рожденія самого *Потенота* (1660—1732).

5. Другіе пріемы градусныхъ измѣреній. Въ 1633—35 гг. англійскій профессоръ *Норвудъ* (1600 — 1650) измѣрилъ дугу меридіана между Лондономъ и Іоркомъ при помощи стальныхъ цѣпей. Хотя избранное имъ направленіе и не представляло прямой линіи, но углы между отдѣльными участками ломаной были измѣрены и длины приведены вычисленіями къ меридіану. Такой способъ конечно лучше приблизительнаго опредѣленія линейнаго разстоянія при помощи счета оборотовъ колеса, но все же онъ не могъ уже соперничать со способомъ тріангуляціи. Норвудъ получилъ для длины дуги въ 2°28′ величину 9 149 цѣпей по 99 футовъ, такъ что длина 1° = 367 196 фут. или около 52 457 саженей.

Еще раньше этого англичанинъ *Райтъ* (1560—1615) употребилъ совершенно новый пріемъ для опредѣленія размѣровъ земного шара, именно при помощи измѣренія *угла пониженія горизонта*, т. е. угла, составленнаго направленіемъ луча зрѣнія, касательнаго къ поверхности океана, съ горизонтальною плоскостью, проходящею черезъ глазъ наблюдателя. Райтъ произвелъ свое измѣреніе съ вершины горы Эджкомбъ, близъ Плимута.



Черт. 4.

Изъ чертежа 4-го легко понять, что уголъ пониженія δ равенъ углу между радіусами Земли, проведенными къ наблюдателю A и къ точкѣ B, въ которой лучъ AB касается поверхности океана. Поэтому, если назвать радіусъ Земли черезъ R, а высоту горы черезъ h, то длина касательной AB оказывается равной $R\,tg\,\delta$. Съ другой стороны длина касательной есть средне-пропорціональная между всею сѣкущею и внѣшнею ея частью, и потому

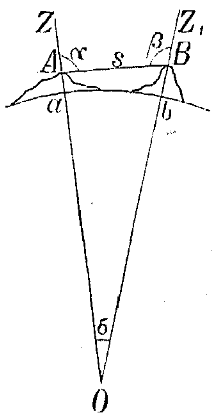
$$R^2\,tg^2\,\delta = (2R + h)\,h$$

отбрасывая весьма малый, по сравненію съ $2R\,h$, членъ h^2, получимъ

$$R = 2h\,.\,cotg^2\,\delta \tag{2}$$

Хотя абсолютная высота горы при помощи нивелировокъ и можетъ быть опредѣлена весьма точно, но способъ Райта не получилъ распространенія; онъ не можетъ давать удовлетворительныхъ результатовъ потому, что, вслѣдствіе преломленія свѣта въ атмосферѣ, лучъ зрѣнія BA не прямая, а кривая линія, обращенная выпуклостью наружу, и, слѣдовательно, измѣренный уголъ пониженія всегда меньше истиннаго. Преломленіе же въ разные часы дня и въ разныя времена года не одинаково, такъ что знать его точную величину въ моментъ наблюденія немыслимо; между тѣмъ малой перемѣнѣ угла δ, который самъ очень малъ, соотвѣтствуетъ огромная перемѣна въ радіусѣ R, вычисленномъ по формулѣ (2).

Почти одновременно съ упомянутыми работами въ Англіи, итальянскіе ученые *Риччіоли* (1598 — 1671) и *Гримальди* (1618 — 1663), въ 1645 году, примѣнили еще иной способъ для опредѣленія радіуса земного шара. Этотъ способъ, предложенный *Кеплеромъ* (1571 — 1630), требуетъ знанія линейнаго разстоянія между двумя точками на земной поверхности, но зато устраняетъ надобность производить астрономическія наблюденія. Основаніе способа понятно изъ чертежа 5-го, на которомъ A и B изображаютъ два мѣста наблюденія, гдѣ измѣрены взаимныя зенитныя разстоянія ZAB и Z_1BA.



Черт 5.

Легко видѣть, что превышеніе суммы этихъ угловъ надъ 180° даетъ уголъ σ при центрѣ Земли, между радіусами AO и BO. Зная же, что

$$\sigma = \alpha + \beta - 180^\circ$$

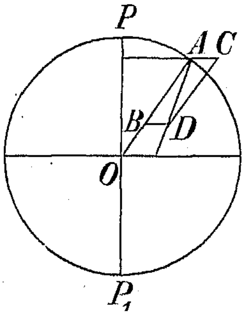
и зная линейное разстояніе $AB = s$, почти равное разстоянію между проекціями a и b на уровенную поверхность, можно вычислить величину радіуса Земли R по формулѣ (1). Лучи зрѣнія съ A на B и обратно не суть прямыя линіи, и потому такъ называемыя видимыя зенитныя разстоянія должны быть исправлены за земное преломленіе (см. § 149). Но поправка за преломленіе не можетъ быть точно вычислена.

6. Градусное измѣреніе Пикара. Новый шагъ въ исторіи градусныхъ измѣреній былъ сдѣланъ *Пикаромъ* (1620—1682), французскимъ академикомъ, однимъ изъ основателей Парижской астрономической обсерваторіи. Пикаръ оцѣнилъ по достоинству значеніе тріангуляціи (см. § 4) и увеличилъ точность измѣренія горизонтальныхъ угловъ, впервые примѣнивъ къ полевымъ геодезическимъ инструментамъ зрительныя трубы съ сѣтками нитей въ окулярахъ. Хотя изобрѣтеніе зрительныхъ трубъ относится еще къ началу XVII вѣка, но ими пользовались сперва только для разсматриванія отдаленныхъ предметовъ; къ угломѣрнымъ же инструментамъ по прежнему придѣлывались діоптры, не позволявшіе измѣрять углы точнѣе какъ до 1′. Кромѣ того Пикаръ научилъ геодезистовъ преодолѣвать разныя затрудненія при наблюденіяхъ, а для геодезическихъ вычисленій впервые воспользовался логариѳмами, что значительно сократило трудъ числовыхъ выкладокъ. Результатъ же Пикара замѣчателенъ тѣмъ, что полученная имъ величина радіуса земного шара дала возможность Ньютону подтвердить на числахъ законы всемірнаго тяготѣнія, открытые этимъ геніемъ около 1682 года.

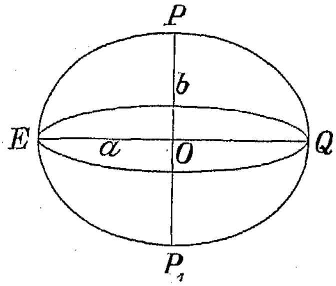
Градусное измѣреніе Пикара произведено въ 1669—70 годахъ, по порученію незадолго передъ тѣмъ основанной (въ 1666 г.) французской Академіи Наукъ, между конечными точками Мальвуазиною (близъ Парижа) и Сурдономъ (близъ Амьена), и составило цѣпь изъ 13 треугольниковъ съ двумя базисами въ 5 663 и 3 902 тоаза. Общая длина дуги по парижскому меридіану оказалась 1° 22′ 55″ въ дугѣ и 78 850 тоазовъ въ линейномъ разстояніи. Отсюда длина 1° получается равною 57 060 тоазамъ или около 52 125 саженей, а радіусъ земного шара равнымъ 5 973 верстамъ.

7. Земля не шаръ, а сфероидъ. Градусное измѣреніе *Пикара*, точнѣйшее изъ всѣхъ предъидущихъ, должно, казалось бы, пріостановить разработку вопроса о видѣ и величинѣ Земли. Послѣ астрономическихъ открытій *Галилея* (1564 — 1642) и другихъ ученыхъ и послѣ совершенныхъ уже кругосвѣтныхъ путешествій, нельзя было сомнѣваться въ шарообразности обитаемой нами планеты; размѣры же этого шара были наконецъ получены съ недосягаемою до того времени точностью. На самомъ же дѣлѣ вышло наоборотъ. Въ концѣ XVII вѣка появились: трактатъ *Гюйгенса* (1629—1695) о центробѣжной силѣ (Horologium Oscillatorium, 1673) и «Начала Натуральной Философіи» *Ньютона* (Philosophiae naturalis Principia mathematica, 1687). Въ своемъ безсмертномъ сочиненіи Ньютонъ, исходя изъ соображенія, что нѣкогда вся Земля была въ огненножидкомъ состояніи, да и нынѣ бо̀льшая часть ея поверхности покрыта водою, показалъ, что жидкое тѣло, частицы котораго подвержены взаимному притяженію, будучи неподвижно и уединено въ пространствѣ, принимаетъ видъ правильнаго шара; вращеніе же около оси должно обращать шаръ въ сфероидъ.

Дѣйствительно, въ неподвижномъ, жидкомъ и однородномъ шарѣ равнодѣйствующая всѣхъ силъ взаимнаго притяженія совпадаетъ съ направленіемъ радіуса, и въ каждой точкѣ поверхности A (черт. 6) уровень жидкости, перпендикулярный къ направленію силы тяжести, будетъ перпендикуляренъ и къ радіусу AO. Если же шаръ вращается около оси PP_1, то къ силѣ тяжести присоединяется центробѣжная сила, направленная по радіусу параллели AC. Отложимъ по AO и AC



Черт. 6.



Черт. 7.

отрѣзки AB и AC, пропорціональные ускореніямъ названныхъ силъ, и построимъ на нихъ параллелограммъ $ABDC$. Очевидно, что діагональ этого параллелограмма AD не будетъ направлена къ центру. Уровень жидкости необходимо долженъ въ точкѣ A стать перпендикулярно направленію AD—равнодѣйствующей силамъ AB и AC, и потому не будетъ уже частью поверхности шара. Вычисленіе показываетъ, что равновѣсіе будетъ возможно для фигуры $EPQP_1$ (черт. 7), приплюснутой у точекъ P и P_1, т. е. для сфероида. Подъ этимъ словомъ, введеннымъ въ науку еще *Архимедомъ* (287—212 до Р. Х.), разумѣютъ тѣло, происходящее отъ вращенія эллипса $EPQP_1$ около его малой оси PP_1. Подтвержденіемъ теоретическому выводу Ньютона послужили извѣстныя уже при немъ вращеніе и сжатіе планеты Юпитера, открытыя *Д. Кассини*.

Предполагая, что Земля состоитъ изъ однородной жидкости, *Ньютонъ* вычислилъ даже величину ея сжатія и нашелъ, что оно равно $^1/_{230}$. Подъ сжатіемъ (μ) разумѣютъ отношеніе разности экваторіальной и полярной полуосей къ экваторіальной полуоси. Называя экваторіальную полуось EO черезъ a, а полярную PO черезъ b, Ньютонъ нашелъ, что

$$\mu = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{230}$$

Далѣе Ньютонъ доказалъ, что сила тяжести на экваторѣ должна быть меньше, чѣмъ у полюсовъ, такъ что величина ея, оставаясь одинаковою на каждой параллели, должна непрерывно возрастать отъ экватора къ сѣверному и южному полюсамъ. Этимъ обстоятельствомъ тотчасъ же объяснился странный фактъ, открытый еще въ 1672 г. французскимъ ученымъ *Рише* (1640—1696): находясь въ Кайеннѣ, подъ сѣверною широтою 5°, для производства астрономическихъ наблюденій, онъ замѣтилъ, что часы, правильно установленные въ Парижѣ, отставали въ Кайеннѣ на 4 минуты въ сутки, и ихъ маятникъ пришлось укоротить на $1^1/_4$ пар. линіи. Это явленіе первоначально было приписано тому обстоятельству, что металлическій стержень маятника удлинился отъ высокой температуры, но изслѣдованія коэффиціента расширенія показали потомъ, что удлиненіе отъ повышенія температуры не могло быть столь значительно. Причиною отставанія часовъ было главнымъ образомъ уменьшеніе силы тяжести. Извѣстно, что время одного качанія маятника обратно-пропорціонально корню квадратному изъ ускоренія силы тяжести.

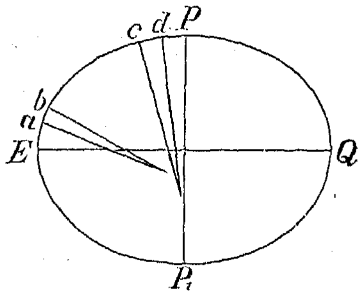
Нѣсколько позднѣе, именно въ 1690 году, появилось новое сочиненіе *Гюйгенса* «De Causâ Gravitatis», въ которомъ авторъ разбираетъ вопросъ о фигурѣ Земли, предполагая, что каждая частица притягивается только къ центру Земли, и всѣ онѣ находятся на одинаковомъ отъ него разстояніи. Хотя эти предположенія не соотвѣтствуютъ истинѣ, ибо по законамъ Ньютона каждая частица притягиваетъ къ себѣ всѣ остальныя прямо-пропорціонально массамъ и обратно-пропорціонально квадратамъ разстоянія, однако, принявъ въ разсчетъ центробѣжную силу, Гюйгенсъ все-же нашелъ, что Земля должна имѣть видъ не шара, а сфероида, такъ какъ одной центробѣжной силы недостаточно, чтобы объяснить значительное уменьшеніе силы тяжести у экватора, замѣченное Рише. Но для сжатія сфероида Гюйгенсъ получилъ величину гораздо меньшую, чѣмъ Ньютонъ; именно, онъ получилъ изъ своихъ вычисленій

$$\mu = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{579}$$

Изложенныя теоретическія изысканія въ связи съ явленіемъ, открытымъ Рише, не позволяли повидимому сомнѣваться, что Земля не есть правильный шаръ. Она конечно должна быть приплюснута у полюсовъ и имѣть видъ сфероида, но его сжатіе не можетъ быть выведено теоретически, такъ какъ законъ распредѣленія плотностей внутри Земли не только во времена Ньютона, но и нынѣ еще неизвѣстенъ. Ученые догадывались, что величина сжатія должна быть между предѣлами, указанными Ньютономъ и Гюйгенсомъ, такъ какъ Ньютонъ принялъ въ своемъ изслѣдованіи, что Земля однородна и имѣетъ вездѣ одинаковую плотность, а предположеніе Гюйгенса равнозначно мысли, что вся масса Земли сосредоточена въ ея центрѣ. Истина же лежитъ гдѣ нибудь по срединѣ, т. е., Земля неоднородна, и, начиная отъ поверхности, плотность различныхъ ея слоевъ возрастаетъ къ центру.

8. Временныя противорѣчія между теоріею и наблюденіями. Если Земля сфероидъ, то для опредѣленія его сжатія необходимо имѣть результаты нѣсколькихъ градусныхъ измѣреній подъ различными широтами и знать, насколько именно длина градусовъ меридіановъ возрастаетъ отъ экватора къ полюсамъ. Такъ какъ градусныхъ измѣреній, одинаковыхъ по точности съ измѣреніемъ Пикара, въ его время не существовало, то самъ Пикаръ хотѣлъ взяться за опытное подтвержденіе интересныхъ теоретическихъ выводовъ Ньютона и Гюйгенса и продолжить свою тріангуляцію на сѣверъ и югъ, но къ сожалѣнію онъ вскорѣ заболѣлъ и умеръ.

Проектъ Пикара былъ выполненъ французскими же учеными *Ж. Кассини* (1677—1756), *Маральди* (1665—1729) и *Лагиромъ* (1640—1718), которые предприняли большое градусное измѣреніе вдоль парижскаго меридіана; эта работа, помимо рѣшенія научнаго вопроса, должна была служить и для цѣлей практическихъ, именно, доставить опорныя точки для обширныхъ съемокъ и составленія карты всей Франціи. Вслѣдствіе разныхъ непредвидѣнныхъ задержекъ, градусное измѣреніе затянулось до 1718 года, когда наконецъ была окончена работа отъ Парижа на сѣверъ до Дюнкирхена и на югъ до Колліура: при этомъ были измѣрены два новыхъ базиса: у Дюнкирхена въ 5 464 и у Перпиньяна въ 7 246 тоазовъ. Для длины одного градуса въ сѣверной части парижскаго меридіана получена величина 56 960, а въ южной — 57 097 тоазовъ.



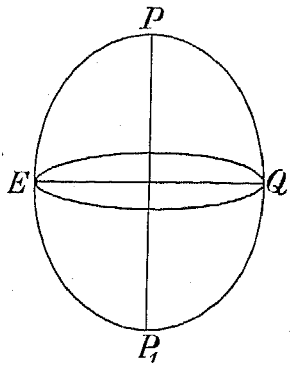
Черт. 8.

Этотъ результатъ, выведенный изъ весьма точныхъ для того времени измѣреній, поразилъ ученыхъ. По теоріи должно бы получиться какъ разъ обратное, т. е. въ южной части дуги длина градуса должна быть менѣе, чѣмъ въ сѣверной. Эллипсъ $EPQP_1$ (черт. 8) представляетъ фигуру, въ которой кривизна, закругленіе, всего сильнѣе у концовъ большой оси E и Q и всего меньше у концовъ малой P и P_1; между этими точками кривизна имѣетъ разныя промежуточныя значенія. Если разбить эллипсъ на малыя части и во всѣхъ точкахъ дѣленія провести нормали, т. е. перпендикуляры къ соотвѣтствующимъ касательнымъ, то каждую малую дугу ab, cd и т. д. можно считать безъ значительной погрѣшности за дугу круга, причемъ, такъ какъ кривизна такихъ дугъ уменьшается отъ E къ P, то радіусы ихъ, наоборотъ, должны увеличиваться (чѣмъ кривизна, закругленіе, меньше, тѣмъ радіусъ кривой больше; для прямой линіи радіусъ равенъ безконечности). Если же радіусъ дуги круга больше, то, на основаніи пропорціональности длины дуги ея радіусу, и сама дуга должна быть длиннѣе. Если бы, напримѣръ, дуги ab и cd были по своей линейной длинѣ равны, то угловыя ихъ величины были бы неравны: для дуги ab съ меньшимъ радіусомъ получилась бы бо̀льшая угловая величина, чѣмъ для дуги cd, съ бо̀льшимъ радіусомъ. Обратно, если дуги ab и cd имѣютъ равныя угловыя величины (какъ на чертежѣ), то та дуга должна быть длиннѣе, у которой радіусъ больше. Вслѣдствіе равенства всѣхъ четырехъ частей эллипса EP, PQ, QP_1 и P_1E, можно сказать вообще, что линейныя длины градусовъ эллиптическихъ дугъ должны непрерывно увеличиваться отъ вершинъ большой оси къ вершинамъ малой.

Совершенно то же самое должно обнаруживаться и на земномъ меридіанѣ. Чтобы составить понятіе объ его видѣ, необходимо опредѣлить длину дуги въ одинъ, напримѣръ, градусъ въ разныхъ его точкахъ, какъ это и дѣлается при помощи градусныхъ измѣреній (см. § 2). Если дуги по 1°, подъ разными широтами, оказались бы равной длины, то меридіанъ есть правильный кругъ, и Земля шарообразна. Если сѣверныя дуги оказались бы длиннѣе южныхъ (въ сѣверномъ полушаріи), то меридіанъ имѣетъ видъ эллипса, котораго малая ось совпадаетъ съ осью вращенія, а сама Земля—фигуру сфероида (сжатаго шара, апельсина), какъ показано на чертежахъ 7 и 8. Если же сѣверныя дуги оказались бы короче южныхъ, то меридіанъ тоже имѣлъ бы видъ эллипса, но малая ось его совпадала бы съ экваторомъ, а большая—съ осью вращенія, такъ что Земля должна бы имѣть видъ растянутаго эллипсоида (вытянутаго шара, лимона), какъ показано на чертежѣ 9-мъ.

Приведенные выше результаты перваго большого градуснаго измѣренія показываютъ, что длина 1° меридіана въ сѣверной части дуги меньше, чѣмъ въ южной и, слѣдовательно, Земля должна имѣть видъ растянутаго эллипсоида; по теоріи же она должна имѣть видъ эллипсоида сжатаго или сфероида.

Разница въ длинахъ 1° меридіана получилась небольшая, всего 137 тоазовъ, и могла быть объяснена ошибками измѣреній; сжатіе Земли такъ мало, что двѣ смежныя дуги меридіана по одному градусу должны отличаться другъ отъ друга весьма незначительно, и ошибки измѣреній могли имѣть то слѣдствіе, что въ дѣйствительности бо̀льшая величина по измѣренію выйдетъ меньшею. Это и оказалось на самомъ дѣлѣ. Однако въ свое время описанное противорѣчіе поразило не только французскихъ ученыхъ, но и ихъ заграничныхъ товарищей. Французы, особенно Ж. Кассини, горячо отстаивали точность своихъ измѣреній и готовы были скорѣе допустить, что Земля въ самомъ дѣлѣ растянутый эллипсоидъ; англичане же, опираясь на авторитетъ Ньютона и на удлиненіе секунднаго маятника, замѣченное Рише, наоборотъ, считали, что Земля несомнѣнно сфероидъ, а разногласіе произошло отъ ошибокъ наблюденій французскихъ ученыхъ.



Черт. 9.

Словомъ, результаты перваго большого градуснаго измѣренія не выяснили вопроса, а раздѣлили мыслящій міръ на два враждующіе лагеря и породили цѣлую литературу, въ которой встрѣчаются какъ серьезныя научныя работы, такъ и безразсудные памфлеты; съ особенною ѣдкостью нападалъ на своихъ соотечественниковъ *Вольтеръ* (1694—1778), сдѣлавшійся, послѣ своего вынужденнаго пребыванія въ Англіи, горячимъ приверженцемъ и популяризаторомъ «Началъ» Ньютона. Какъ бы въ подтвержденіе ошибочнаго мнѣнія французскихъ геодезистовъ, люди съ архивными вкусами разыскали брошюру страсбургскаго врача *Эйзеншмидта* (1656—1712) «Diatribe de figura telluris elliptica», 1691, въ свое время вовсе не обратившую на себя вниманія. Въ названной брошюрѣ приведена слѣдующая табличка результатовъ прежнихъ градусныхъ измѣреній:

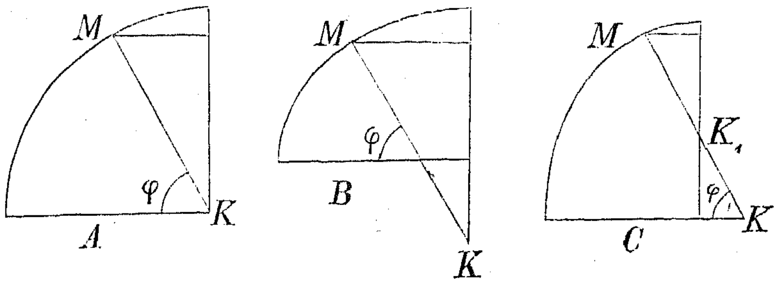
ИМЕНА УЧЕНЫХЪ.	ШИРОТЫ.	ДЛИНЫ 1° МЕРИДІАНА.
Эратосѳенъ.	27°	100 римскихъ миль.
Риччіоли.	44½	80 » »
Пикаръ.	49	74 » »
Фернель	49½	73½ » »
Снелліусъ.	52	71½ » »

Изъ этихъ чиселъ выходитъ, что длина градусовъ меридіана дѣйствительно уменьшается отъ юга къ сѣверу и, слѣдовательно, Земля должна имѣть удлиненную, яйцевидную форму. Но всѣ эти числа не заслуживаютъ, конечно, никакого довѣрія, потому что всѣ они, кромѣ числа, полученнаго Пикаромъ, совершенно гадательны, выведены изъ первоначальныхъ, грубыхъ измѣреній, и самый переводъ результатовъ въ римскія мили сомнителенъ. Тѣмъ не менѣе брошюра произвела впечатлѣніе, между прочимъ и потому, что авторъ, приписывая Землѣ форму яйца, прообраза всего живущаго на ней, подтвердилъ свое заключеніе ссылками на темныя мѣста древнихъ писателей.

9. Первое измѣреніе параллели. Разрѣшить сомнѣнія о видѣ Земли можно было двоякимъ путемъ: 1) усовершенствовать измѣрительные приборы настолько, чтобы ошибки наблюденій не могли поглощать собою малыя разности между близкими по широтѣ градусными измѣреніями и 2) произвести два градусныхъ измѣренія по возможности въ различныхъ широтахъ, напримѣръ одно подъ экваторомъ, другое близъ полюса, чтобы значительныя дѣйствительныя разности между дугами меридіановъ въ 1° обнаружились даже при неточности существовавшихъ инструментовъ. Надѣяться на скорое усовершенствованіе измѣрительныхъ приборовъ было едва-ли возможно, путешествія же въ отдаленныя страны въ началѣ XVIII вѣка были крайне трудны и опасны. Французскіе геодезисты нашли однако третій путь для разрѣшенія недоразумѣнія, именно они воспользовались мыслью женевскаго профессора *Каландрини* (1703—1758), который въ 1733 году показалъ (теоретически безусловно правильно), что споръ о видѣ Земли можетъ быть разрѣшенъ, если къ градусному измѣренію по меридіану присоединить, подъ тою же широтою, градусное измѣреніе по параллели.

На чертежѣ 10-мъ изображены четверти земного меридіана въ трехъ предположеніяхъ: Земля шаръ (A), сфероидъ (B) и растянутый эллипсоидъ (C). Пусть на всѣхъ трехъ фигурахъ буквою M означены точки подъ одинаковою широтою φ, т. е.

точки, въ которыхъ уголъ, составляемый отвѣсною линіею (нормалью) MK съ плоскостью экватора, равенъ той же величинѣ φ, и вмѣстѣ съ тѣмъ такія точки, въ которыхъ кривизна меридіана одинакова, а потому въ нихъ одинакова и длина мери-



Черт. 10.

діанной дуги въ $1°$, которая пусть равна D. Тогда длина $1°$ дуги параллели во всѣхъ трехъ предположеніяхъ будетъ соотвѣтственно:

Для шара. . . . . $d_1 = D.\cos\varphi$

» сфероида . . . . $d_2 = D.\cos\varphi \cdot \frac{p}{\rho}$

» растянутаго эллипсоида . $d_3 = D.\cos\varphi \cdot \frac{p_1}{\rho}$

гдѣ ρ—одинаковый для всѣхъ трехъ фигуръ радіусъ кривизны дугъ меридіана въ точкахъ M, $p = MK$ на фигурѣ B и $p_1 = MK_1$ на фигурѣ C. Эти величины, какъ извѣстно, выражаются формулами:

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{3/2}} \qquad p = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{1/2}} \qquad p_1 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{1/2}}$$

Подставляя эти выраженія въ предъидущія значенія d_2 и d_3, развертывая въ рядъ величину d_2, ограничиваясь членомъ съ e^2 и замѣняя въ d_3, согласно чертежу (C), φ на $90° - \varphi$, получимъ:

$$d_1 = D \cdot \cos\varphi$$
$$d_2 = D \cdot \cos\varphi\,(1 + e^2 \cos^2\varphi)$$
$$d_3 = D \cdot \cos\varphi\,(1 - e^2 \cos^2\varphi).$$

Въ зависимости отъ величинъ D и φ, извѣстныхъ изъ градуснаго измѣренія по меридіану, Земля должна быть шаромъ, сфероидомъ или растянутымъ эллипсоидомъ, смотря по тому, окажется ли длина 1° по параллели равною, большею или меньшею произведенія $D.\cos\varphi$.

Сообразно этой мысли *Ж. Кассини* въ томъ же 1733 году произвелъ тріангуляцію по параллели между Парижемъ и С. Мало; разность долготъ этихъ городовъ была опредѣлена еще Пикаромъ по наблюденіямъ затменій спутниковъ Юпитера и найдена равною $4^1/_2{}^\circ$. Изъ послѣдующихъ вычисленій для градуса параллели подъ широтою $48^1/_2{}^\circ$ получена величина 36 670 тоазовъ, т. е. меньше $D.\cos\varphi = 37\,707$ тоаз. на цѣлые 1 037 тоазовъ. Другими словами, Кассини получилъ новое подтвержденіе своему предположенію, что Земля имѣетъ видъ растянутаго эллипсоида. Конечно, выводъ былъ ошибоченъ; разность долготъ вообще не можетъ быть получена удовлетворительно изъ наблюденій спутниковъ Юпитера. Нынѣ извѣстно, что С. Мало лежитъ къ западу отъ Парижа всего на $4^\circ 22'$; съ этою величиною длина 1° параллели получилась бы 37 821 тоазъ, и, согласно предъидущимъ формуламъ, ученый споръ былъ бы рѣшенъ въ пользу сфероида, помимо снаряженія отдаленныхъ экспедицій, описанныхъ ниже.

Приведенныя быть можетъ утомительныя подробности о заблужденіяхъ выдающихся ученыхъ начала XVIII вѣка показываютъ, какъ медленно раскрывались геодезическія истины; кромѣ того онѣ могутъ служить напоминаніемъ, что выводы, о которыхъ въ настоящее время говорится съ увѣренностью, тоже не всѣ могутъ оказаться непреложными въ будущемъ.

10. Перуанская и Лапландская экспедиціи. Честь окончательнаго рѣшенія спора о видѣ Земли принадлежитъ самимъ же французамъ, которые, убѣдившись, что при тогдашнемъ состояніи измѣрительныхъ приборовъ и пріемовъ наблюденій нѣтъ возможности получить надежные результаты на небольшомъ пространствѣ одной Франціи, рѣшились снарядить экспедиціи въ мѣста по возможности съ наибольшею и наименьшею кривизною меридіановъ. Сперва была отправлена экспедиція на самый экваторъ, въ Перу, а вскорѣ затѣмъ другая—къ полярному кругу, въ Лапландію. Онѣ были снабжены лучшими, вновь приготовленными инструментами, и каждая взяла съ собою одинъ изъ двухъ нарочно сдѣланныхъ, совершенно одинаковыхъ жезловъ по одному тоазу длиною, чтобы выразить длины измѣряемыхъ дугъ въ однѣхъ единицахъ. Король Людовикъ XV отпустилъ французской Академіи Наукъ щедрыя средства на снаряженіе путешественниковъ.

Перуанская экспедиція покинула берега Франціи въ Ларошели, 16 мая 1735 года; въ числѣ ея участниковъ особенно извѣстны *Буге* (1698 — 1758), *Лакондаминъ* (1701 — 1774) и *Годенъ* (1704—1760). Переплывъ Атлантическій океанъ, переѣхавъ сухимъ путемъ Даріенскій перешеекъ и достигнувъ Лимы, ученые путешественники нашли, наконецъ, подъ самымъ экваторомъ удобную для тригонометрическихъ работъ меридіанную долину Квито. Здѣсь измѣрены два базиса въ 6 272 и 5 259 тоазовъ и составлена цѣпь изъ 32-хъ треугольниковъ. Длина измѣренной дуги отъ Тарки подъ широтою $+ 0^\circ 2' 30''$ до Кольчески подъ широтою $- 3^\circ 4' 30''$ оказалась $3^\circ 7' 1''$.

О трудности работъ можно судить уже по тому, что самая низкая точка тріангуляціи лежала на высотѣ $2^1/_2$ верстъ надъ уровнемъ океана. Жившіе въ горахъ дикіе индѣйцы мѣшали работамъ и часто уничтожали тригонометрическіе знаки, такъ что на одной точкѣ пришлось возобновлять наблюденія семь разъ. Въ 1739 году произошло даже открытое нападеніе, причемъ состоявшій при экспедиціи врачъ былъ убитъ.

Кромѣ градуснаго измѣренія, французскіе ученые произвели множество любопытнѣйшихъ изслѣдованій въ разныхъ мѣстахъ Южной Америки и между прочимъ, на обратномъ пути, совершили весьма опасное плаваніе по рѣкѣ Амазонкѣ. Большинство вернулось во Францію лишь въ 1742 году, а Годенъ только въ 1752 году. Вольтеръ привѣтствовалъ возвратившихся на родину стихами:

Héros de la physique, argonautes nouveaux,
Qui franchissez les monts, qui traversez les eaux,
Dont le travail immense et l'exacte mesure
De la Terre étonnée ont fixé la figure.

т. е.

Творцы естественныхъ наукъ, въ погонѣ за Колхидой новой,
Перебрались за океанъ и черезъ горъ хребетъ суровый,
Величіемъ своихъ работъ весь свѣтъ и Землю поразили
Когда такъ вѣрно общій видъ ея схвативъ—опредѣлили.

Для длины дуги меридіана въ 1° подъ экваторомъ перуанская экспедиція получила число 56 767 тоазовъ, которое, по приведеніи къ уровню океана, даетъ лишь 56 748 тоазовъ, число, значительно меньшее длины градуса во Франціи.

Лапландская экспедиція выѣхала изъ Парижа въ 1736 году и состояла изъ *Мопертюи* (1698—1759), *Клеро* (1713—1765), *Камюза* (1699—1768), *Лемонье* (1715—1799) и *Утье* (1694—1774); въ Стокгольмѣ къ нимъ присоединился еще шведскій физикъ *Цельзіусъ* (1701—1744). Тригонометрическія точки были выбраны на вершинахъ скалъ, вдоль долины рѣки Торнео. Хотя страна и не была дикою, но здѣсь ученые путешественники страдали отъ морозовъ зимою и отъ гнусныхъ мошекъ лѣтомъ. При измѣреніи базиса по льду на рѣкѣ Торнео наблюдатели потѣли отъ работы, а ихъ руки и ноги коченѣли отъ холода. Кромѣ того частые здѣсь туманы затягивали наблюденія: въ необитаемыхъ мѣстахъ приходилось ожидать по 10 дней, прежде чѣмъ являлась возможность начать измѣреніе угловъ. Крайними точками тріангуляціи были Киттисъ и Торнео подъ широтами 66° 48′ 20″ и 65° 50′ 50″. Къ сожалѣнію наблюдатели измѣрили только одинъ базисъ, и потому о точности всей работы нельзя составить удовлетворительнаго представленія; желѣзный тоазъ, служившій для сравненія мѣрныхъ жезловъ, пострадалъ при гибели судна во время обратнаго перехода во Францію. Какъ бы то ни было, вычисленіе показало, что длина 1° меридіана подъ полярнымъ кругомъ равна 57 422 тоазамъ. Эта величина, полученная задолго до вычисленія результатовъ перуанской экспедиціи, обнаружила съ полною очевидностью, что длина градуса у полярнаго круга больше, чѣмъ во Франціи, и что, слѣдовательно, Земля сжата у полюсовъ. По этому поводу Вольтеръ сказалъ: Maupertuis aplatit la Terre et Cassini (Мопертюи приплюснулъ и Землю, и Кассини).

Еще до возвращенія описанныхъ экспедицій *Ж. Кассини* и *Лакайль* (1713—1762) взялись за повѣрку дуги меридіана во Франціи, для чего вновь измѣрили базисы, углы треугольниковъ и широты на конечныхъ точкахъ. При этомъ были открыты значительныя ошибки прежнихъ измѣреній, причины которыхъ лежали частью въ неизбѣжныхъ въ такой обширной работѣ промахахъ, частью же въ неизвѣстныхъ раньше источникахъ ошибокъ; такъ, напримѣръ, прежніе наблюдатели не принимали въ разсчетъ аберраціи звѣздъ, открытой лишь въ 1728 году англійскимъ астрономомъ *Брадлеемъ* (1692—1762). Послѣ исправленій для длины 1° меридіана подъ широтою Парижа получена величина 57 084 тоаза.

Сопоставленіе чиселъ, выражающихъ длину 1° меридіана подъ экваторомъ, въ Парижѣ и у полярнаго круга (56 748, 57 084 и 57 422 тоаза) несомнѣнно указало, что длина градуса увеличивается отъ экватора къ полюсу. Всѣ предшествовавшіе споры и сомнѣнія исчезли, и теорія Ньютона о сжатіи Земли у полюсовъ окончательно утвердилась въ наукѣ. Что же касается величины сжатія, то она далеко еще не была точно опредѣлена. Какъ для вычисленія размѣра шара достаточно одного градуснаго измѣренія, такъ для вычисленія сфероида необходимы два. Теперь имѣлось цѣлыхъ три измѣренія, и потому величину сжатія можно было не только вычислить, но и повѣрить: перуанское и французское измѣренія дали для сжатія величину $^1/_{314}$, а французское и лапландское $^1/_{213}$. Если бы измѣренія были безошибочны, и если бы Земля представляла совершенно правильный сфероидъ, то конечно каждыя два градусныя измѣренія давали одинаковые результаты. Указанное разногласіе вполнѣ объяснимо ошибками наблюденій.

Такимъ образомъ, хотя видъ и размѣры Земли въ серединѣ XVIII вѣка и не могли считаться опредѣленными окончательно (что впрочемъ и невозможно вообще при всѣхъ выводахъ изъ наблюденій), но все-же, послѣ первоначальнаго предположенія о шарообразности Земли, въ Геодезіи былъ сдѣланъ значительный шагъ впередъ. Если *шаръ* есть первое приближеніе къ истинѣ, то теперь ученые нашли второе приближеніе: было доказано, что въ общемъ Земля не шаръ, а *сфероидъ* со сжатіемъ около $^1/_{300}$, такъ что разность между экваторіальною и полярною полуосями достигаетъ значительной величины—около 20 верстъ.

11. Числовой примѣръ. Чтобы дать понятіе, какимъ образомъ изъ двухъ дугъ меридіана, измѣренныхъ подъ разными широтами, можно вывести элементы земного сфероида, т. е. его полуоси и сжатіе, возьмемъ числовыя величины изъ русскаго градуснаго измѣренія по меридіану (см. § 16):

	Названія точекъ.	Широты.	Разстоянія между параллелями.
Сѣверная часть русской дуги	Фугленесъ . . .	$70^\circ 40' 11''.23$	$s_1 = 113\ 753.906$ тоаза
	Стуоройви . . .	$68^\circ 40' 58''.40$	
	разность широтъ	$\sigma_1 = 1^\circ 59' 12''.83$	
Южная часть русской дуги	Водолуй . . .	$47^\circ\ 1' 24''.98$	$s_2 = 96\ 415.136$ тоаза
	Некрасовка . . .	$45^\circ 20'\ 2''.94$	
	разность широтъ	$\sigma_2 = 1^\circ 41' 22''.04$	

Такъ какъ малыя части эллипса можно считать дугами круговъ, то вычислимъ сперва по формулѣ (1) радіусы кривизны сѣверной и южной дугъ; называя соотвѣтствующіе радіусы кривизны черезъ ρ_1 и ρ_2, получимъ:

$$\rho_1 = \varkappa \frac{s_1}{\sigma_1} \qquad lg\,\rho_1 = 6.5159135$$

$$\rho_2 = \varkappa \frac{s_2}{\sigma_2} \qquad lg\,\rho_2 = 6.5145210$$

Для радіусовъ кривизны меридіана имѣемъ формулы

$$\rho_1 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)^{3/2}}$$

$$\rho_2 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)^{3/2}}$$

Изъ этихъ двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными e^2 и a получается:

$$e^2 = \frac{\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{2/3} - 1}{\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{2/3} \sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_2}$$

$$a = \frac{\rho_1 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)^{3/2}}{1 - e^2} = \frac{\rho_2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)^{3/2}}{1 - e^2}.$$

Подставляя вмѣсто ρ_1 и ρ_2 найденныя выше величины, а вмѣсто φ_1 и φ_2 среднія широты сѣверной и южной дугъ, т. е. $\varphi_1 = 69^\circ 40' 34''.81$ и $\varphi_2 = 46^\circ 10' 43''.96$, имѣемъ

$$e^2 = \frac{1}{169}$$

$$a = 3\,274\,087 \text{ тоазовъ} = 5\,981.79 \text{ версты.}$$

Наконецъ по формулѣ

$$\mu = 1 - \sqrt{1 - e^2}$$

получается

$$\mu = \frac{1}{337}$$

12. Второстепенныя измѣренія XVIII вѣка. Цѣнные результаты работъ французскихъ академиковъ не прекратили дальнѣйшихъ изысканій о видѣ и размѣрахъ Земли. Напротивъ того, именно убѣжденіе, что подъ каждою широтою должны получаться для длины градуса меридіана различныя величины, связанныя общимъ закономъ эллиптичности этой кривой, побуждало производить градусныя измѣренія въ различныхъ мѣстахъ земной поверхности. Необходимо принять во вниманіе и то обстоятельство, что, помимо теоретическаго интереса, послѣдующія градусныя измѣренія имѣли обыкновенно и практическое значеніе, потому что каждая тріангуляція съ точно опредѣленными астрономическими точками доставляетъ опорныя данныя для будущихъ съемокъ; съемки же необходимы для составленія географическихъ картъ, въ которыхъ образованные народы всегда нуждались.

Въ 1750 году *Босковичъ* (1711—1787) и *Лемеръ* (1697—1767), ученые іезуиты, измѣрили дугу меридіана въ Италіи между Римомъ и Римини. Ихъ тріангуляція вычислена по двумъ базисамъ, изъ которыхъ одинъ измѣренъ на знаменитой Via Appia и имѣетъ 6 140 тоазовъ длины; другой, повѣрительный базисъ въ 6 038 тоазовъ измѣренъ близъ Римини. Вся дуга въ $2^\circ 9' 47''$ дала для длины 1° подъ широтою 43° величину 56 979 тоазовъ или около 52 051 сажени.

Впослѣдствіи, именно въ 1768 году, *Беккарія* (1716—1781) измѣрилъ дугу меридіана въ Ломбардіи; эта дуга пересѣкла цѣпь Апеннинъ и должна была въ извѣстномъ смыслѣ уравнять дугу Босковича, проложенную въ равнинахъ Италіи. Однако результатъ Беккаріа, именно $1^\circ = 57\,468$ тоазовъ, очевидно слишкомъ великъ и заставилъ подозрѣвать значительныя погрѣшности въ измѣреніяхъ; послѣднія и были замѣчены французскими офицерами, которые, во время занятія Ломбардіи, имѣли случай произвести наблюденія на тѣхъ же точкахъ.

Въ 1752 году извѣстный французскій астрономъ и аббатъ *Лакайль*, посланный Академіею на мысъ Доброй Надежды, воспользовался случаемъ измѣрить дугу меридіана въ южномъ полушаріи. Для длины 1° подъ широтою — 33° онъ получилъ величину 57 039 тоазовъ (52 104 саж.), показывающую, будто южное полушаріе не совсѣмъ одинаково съ сѣвернымъ, потому что въ сѣверномъ полушаріи такую длину имѣетъ 1° не подъ 33°, а подъ широтою около 45°.

Въ 1762 году *Лисганигъ* (1719—1799) измѣрилъ дугу въ Австріи по вѣнскому меридіану. Онъ получилъ для 1° величину 57 077 тоазовъ (52 140 саж.). Хотя эта величина не представляетъ рѣзкаго уклоненія отъ результатовъ другихъ измѣреній подъ тѣми же широтами, однако баронъ *Цахъ* (1754—1832), разбиравшій впослѣдствіи рукописные журналы этой работы, нашелъ въ нихъ крупныя недоразумѣнія, заключающіяся между прочимъ въ томъ, что въ нѣкоторыхъ треугольникахъ измѣрены были не всѣ три угла, а гдѣ и измѣрены, то въ треугольникахъ, въ которыхъ сумма угловъ значительно уклонялась отъ теоретической, третьи углы нерѣдко отбрасывались. Позднѣе Лисганигъ измѣрилъ еще другую дугу въ долинѣ Тиссы, но и она не принадлежитъ къ образцовымъ геодезическимъ работамъ.

Въ 1764 году произведено первое градусное измѣреніе въ Сѣверной Америкѣ. Англійскіе астрономы *Мазонъ* (1735—1787) и *Диксонъ* (1735—1777), занимаясь установкою и размежеваніемъ границъ колоній на полуостровѣ между Чизапикскимъ и Делаверскимъ заливами, прельстились обширною и открытою равниною этого полуострова и просили Совѣтъ Лондонскаго Королевскаго Общества выслать имъ инструменты, необходимые для градуснаго измѣренія. Эта работа замѣчательна въ томъ отношеніи, что, со временъ Норвуда, она единственная, въ которой не была проложена тріангуляція, а вся дуга, почти въ 150 верстъ, измѣрена непосредственно большими прямоугольными рамами, послѣдовательно устанавливавшимися въ вертикальномъ положеніи одна за другою. Результатъ измѣренія, $1^\circ = 56\,904$ тоазовъ ($51\,982$ саж.), подъ среднею широтою $39^\circ\,12'$, не заслуживаетъ довѣрія.

Въ XVIII-мъ же вѣкѣ сдѣлана первая попытка произвести градусное измѣреніе въ Россіи. Французскій астрономъ *Делиль* (1688—1768), приглашенный Петромъ Великимъ въ готовившуюся къ открытію Академію Наукъ, предполагалъ возможнымъ измѣрить дугу вдоль С.-Петербургскаго меридіана болѣе чѣмъ на 20°. Нынѣ неизвѣстно, какія причины воспрепятствовали осуществленію этого проекта. Въ бумагахъ Делиля, найденныхъ О. Струве въ Парижѣ, сохранились лишь свѣдѣнія, что въ 1737 году по льду между Кронштадтомъ и Петербургомъ былъ измѣренъ базисъ въ $13^1/_2$ верстъ длиною и составлено нѣсколько треугольниковъ.

13. Большое французское градусное измѣреніе. Законодательное Собраніе Первой Французской Республики, торопясь измѣнить весь строй предшествовавшей жизни, постановило измѣрить дугу парижскаго меридіана отъ Дюнкирхена до Барселоны, чтобы вывести длину новой международной, какъ предполагали уже съ начала, и неизмѣнной единицы—*метра*. Эта основная мѣра должна была составлять одну десятимилліонную долю четверти земного меридіана. Вопросъ о неизмѣнной мѣрѣ длины, изъ которой затѣмъ можно было бы вывести всѣ другія, какъ-то мѣры поверхности, объема и вѣса, давно уже занималъ ученыхъ. Еще Пикаръ предлагалъ принять единицею длины—длину секунднаго маятника въ какой нибудь опредѣленной точкѣ земной поверхности. Французскимъ законодателямъ предложены были на обсужденіе три мѣры: длина секунднаго маятника, длина сорокамилліонной доли экватора и длина такой же доли меридіана; собраніе остановилось на послѣдней, какъ независимой отъ національности и удобной для повѣрки.

Для точнѣйшаго вывода длины метра необходимо было произвести новое градусное измѣреніе, такъ какъ всѣ признавали, что старое французское измѣреніе, не смотря на послѣдующія провѣрки, ошибочно; къ тому же въ теченіи полувѣка изобрѣтены были новые инструменты для измѣренія линій и угловъ, значительно превышавшіе прежніе точностью достигаемыхъ результатовъ. Для измѣренія базисовъ академикъ *Борда* (1733—1799) изобрѣлъ биметаллическіе жезлы, состоящіе изъ платиновой и мѣдной линеекъ, а для измѣренія угловъ Борда же примѣнилъ способъ повтореній, предложенный впервые еще геттингенскимъ астрономомъ *Майеромъ* (1723—1762), и изобрѣлъ такъ называемые повторительные круги.

Новое, еще небывалое по размѣрамъ и точности градусное измѣреніе было поручено опытнымъ ученымъ *Мешеню* (1744—1804) и *Деламбру* (1749—1822); они исполнили его въ 1792—98 годахъ и описали въ трехтомномъ трактатѣ «Base du système métrique décimal». Это сочиненіе представляетъ замѣчательный научный памятникъ, который нельзя не посовѣтовать изучить каждому желающему посвятить себя Геодезіи. Въ немъ подробно описаны инструменты, изложены новые и своеобразные способы наблюденій и вычисленій и наконецъ приложены цѣнныя геодезическія таблицы.

Работы Мешеня и Деламбра производились въ самый разгаръ неистовствъ Французской Революціи. Измѣряя углы треугольниковъ днемъ, наблюдатели нерѣдко приказывали обвивать отдаленные сигналы и колокольни бѣлымъ холстомъ, чтобы лучше ихъ видѣть; невѣжественная чернь принимала эти холсты за бѣлыя знамена—эмблему Бурбоновъ— и срывала ихъ, когда ученые производили свои наблюденія: пришлось обшивать бѣлый холстъ красною и синею полосами. Въ иныхъ мѣстахъ наблюдатели работали ночью, располагая на отдаленныхъ точкахъ лампы: эти лампы разбивались подъ предлогомъ, что онѣ—сигналы для возбужденія контръ-революціи. Наконецъ случалось, что сами ученые подвергались насмѣшкамъ и оскорбленіямъ. Деламбръ упоминаетъ, что ему удавалось успокаивать толпу не столько предъявленіемъ своихъ открытыхъ листовъ, выданныхъ конвентомъ, сколько подробнымъ объясненіемъ цѣли производимыхъ работъ, такъ что зачастую онъ долженъ былъ прерывать наблюденія и излагать геодезическія истины въ видѣ импровизированныхъ лекцій въ глухихъ селеніяхъ, среди полей или въ лѣсахъ. При переѣздахъ по сѣверной Франціи онъ принужденъ былъ, для безопасности, выдавать себя за англичанина. Не смотря на всѣ эти неблагопріятныя обстоятельства, отважные ученые проложили вновь черезъ всю территорію Франціи меридіанальную цѣпь изъ 115 треугольниковъ, основанную на двухъ вновь измѣренныхъ базисахъ (Мелюнскій въ 6 076 и Перпиньянскій въ 6 006 тоазовъ) и пяти астрономическихъ точкахъ (Дюнкирхенъ, Парижъ, Эво, Каркассонъ и Монжуи, близъ Барселоны).

Вычисленія показали, что длина градусовъ меридіана между послѣдовательными астрономическими точками, какъ и надлежало ожидать, увеличивается по мѣрѣ удаленія отъ юга къ сѣверу; однако выведенное изъ одной лишь французской дуги сжатіе сфероида ($^1/_{150}$), вслѣдствіе незначительности протяженія ея и всегда неизбѣжныхъ погрѣшностей наблюденій, показалось слишкомъ большимъ, почему Деламбръ нашелъ необходимымъ принять въ разсчетъ еще и Перуанское градусное измѣреніе, какъ лучшее изъ всѣхъ до того времени исполненныхъ и расположенное подъ экваторомъ. Изъ совокупности новаго французскаго и Перуанскаго градусныхъ измѣреній было получено сжатіе $^1/_{334}$. Вычисливъ затѣмъ длину четверти земного меридіана въ тоазахъ и раздѣливъ ее на 10 000 000, Деламбръ получилъ слѣдующее уравненіе для выраженія метра въ парижскихъ линіяхъ:

$$1 \text{ метръ} = 443.296 \text{ пар. л.}$$

Деламбръ вернулся въ Парижъ въ 1798 году, Мешенъ же со вновь назначеннымъ ему въ сотоварищи молодымъ *Араго* (1786 — 1853) продолжалъ тріангуляцію черезъ Пиренеи и Испанію до Балеарскихъ островов. Продолженіе дуги далѣе на югъ было вызвано двумя соображеніями: 1) чѣмъ длиннѣе дуга, тѣмъ меньше вліяютъ на выводы ошибки наблюденій и тѣмъ, слѣдовательно, точнѣе результаты и 2) будучи продолжена до Балеарскихъ острововъ, вся французская дуга, начиная отъ Дюнкирхена, имѣла бы среднюю широту почти 45°;

теорія показываетъ, что въ этомъ случаѣ вычисленіе длины четверти земного меридіана дѣлается независимымъ отъ точнаго знанія сжатія сфероида. Во время продолженія тріангуляціи наблюдатели встрѣтили новыя затрудненія отъ суровой погоды на вершинахъ Пиренейскихъ горъ, на которыхъ приходилось выжидать благопріятныхъ моментовъ для наблюденій по недѣлямъ и даже мѣсяцамъ. Вѣтеръ нерѣдко срывалъ палатки, и ученые, среди ночи, оставались безъ прикрытія отъ стужи и дождя. Въ этихъ тяжкихъ трудахъ на пользу науки Мешенъ совершенно подорвалъ здоровье и наконецъ умеръ отъ мѣстной лихорадки, близъ одной изъ своихъ тригонометрическихъ точекъ. Лежа на смертномъ одрѣ, онъ приказывалъ однако будить себя по ночамъ, какъ только покажется свѣтъ фонарей на сосѣднихъ сигналахъ, и горько изливалъ свою досаду въ дневникѣ, если сторожъ, видя отчаянное положеніе ученаго, не будилъ его. Эти жалобы были послѣдними написанными имъ строками.

Послѣ смерти Мешеня работы продолжали и окончили *Араго* и *Біо* (1774—1862). На точкѣ Десіерто Араго пробылъ цѣлыхъ 6 мѣсяцевъ, пока не увидалъ фонаря точки Кампвей на островѣ Ивисѣ. Сторона Десіерто-Кампвей есть величайшая изъ всѣхъ до того времени наблюденныхъ: ея длина равна почти 151 верстѣ. Подробности производства тріангуляціи, во время которой Араго попался въ плѣнъ, бѣжалъ въ Алжиръ и испыталъ множество весьма грустныхъ превратностей судьбы, очень занимательно описаны въ его любопытной автобіографіи (см. Біографіи знаменитыхъ астрономовъ, физиковъ и геометровъ, русскій переводъ Перевощикова, томъ III-й, 1861 г.).

Въ послѣднее время французская дуга меридіана продолжена еще дальше на югъ и переброшена даже черезъ Средиземное море, въ Африку. Весною 1868 года французскій геодезистъ *Перрье* (1834—1888), производя тріангуляцію въ Алжирѣ, замѣчалъ иногда на горизонтѣ вершины Сіерра-Невады въ Испаніи. Послѣ разработки проекта тригонометрической связи, подготовки наблюдателей и перевозки инструментовъ съ динамомашинами и локомобилями для произведенія электрическаго свѣта, Перрье осуществилъ эту связь въ 1879 году.

Двѣ вершины Сіерра-Невады соединены съ двумя точками въ Алжирѣ геодезическимъ четыреугольникомъ, въ которомъ сторона Муласенъ-Фильхаусенъ равна почти 253 верстамъ.

Выше было упомянуто, что при вычисленіи длины метра Деламбръ принялъ въ разсчетъ только новое французское и перуанское измѣренія. Въ лапландскомъ же градусномъ измѣреніи заподозрѣны были ошибки; для ихъ открытія шведское правительство снарядило свою экспедицію подъ руководствомъ *Сванберга* (1771—1851). Къ сожалѣнію прежнія точки тріангуляціи не были найдены, и потому повѣрить работы Мопертюи и его товарищей не было возможности. Шведская экспедиція избрала новыя точки, трудилась въ 1801—1803 годахъ, произвела множество наблюденій исключительно новыми французскими инструментами и для длины 1° подъ полярнымъ кругомъ получила величину 57 196 тоазовъ (Мопертюи получилъ 57 422 тоаза). Отъ сопоставленія этого результата съ числами, выведенными изъ перуанскаго и новаго французскаго измѣреній, для сжатія сфероида получилась дробь $^1/_{300}$, принятая учеными какъ весьма близкая къ истинѣ.

14. Англійскія градусныя измѣренія. Междоусобныя войны, а затѣмъ война съ собственными колоніями препятствовали англичанамъ производить большія геодезическія работы въ XVIII вѣкѣ, когда таковыя уже занимали всѣ образованные народы материка Европы. Зато съ начала XIX вѣка англичане успѣли выполнить какъ въ метрополіи, такъ и въ своихъ колоніяхъ, особенно въ Остъ-Индіи, геодезическія работы, которыя справедливо причисляются къ наилучшимъ.

Тріангуляція въ Великобританіи и Ирландіи производилась съ 1791 по 1858 г. подъ руководствомъ *Меджа* (1762—1820), *Кольби* (1784—1852) и *Джемса* (1803—1877) и покрыла сплошною сѣтью все пространство какъ главныхъ, такъ и прилежащихъ мелкихъ острововъ Королевства. Однихъ первоклассныхъ треугольниковъ образовано 218, и стороны ихъ имѣютъ среднюю длину 53 версты, а наибольшая 168 верстъ. Оригинальные во всемъ, англичане не приняли выработанныхъ во Франціи типовъ инструментовъ: для измѣренія базисовъ они употребляли сперва стеклянныя трубки, а затѣмъ такъ называемый компенсаціонный приборъ *Кольби*, для измѣренія же угловъ они пользовались исключительно большими теодолитами съ микроскопами, которыми получаются не углы между направленіями на предметы, какъ повторительными кругами Борда, а прямо горизонтальныя проложенія этихъ угловъ. Большая тріангуляція Великобританіи была соединена съ французскою, такъ что совокупная англо-французская дуга меридіана составляетъ по широтѣ почти 22° 10′. Большинство наблюденій и вычисленій англійскихъ работъ произведено извѣстнымъ геодезистомъ *Кларкомъ*, подъ редакціею котораго издано весьма поучительное описаніе всей тріангуляціи, озаглавленное: Account of the Observations and Calculations of the Principal Triangulation, 1858.

Съ 1799 года начались тригонометрическія работы въ Остъ-Индіи; онѣ производились подъ руководствомъ *Ламбтона* 1748—1823), *Эвереста* (1790—1866), *Уога* и *Уокера*, причемъ главныя цѣпи треугольниковъ велись съ такимъ разсчетомъ, чтобы онѣ могли служить для цѣлей градуснаго измѣренія не только по меридіану, но и по параллели. Не смотря на неимовѣрныя затрудненія, которыя приходилось преодолѣвать въ тропической и политически неспокойной странѣ, англійскіе геодезисты достигли замѣчательной точности въ своихъ измѣреніяхъ; правда, вмѣсто деревянныхъ тригонометрическихъ знаковъ они воздвигали огромныя каменныя башни, а для видимости отдаленныхъ точекъ употребляли геліотропы и бенгальскіе огни. Главная меридіанная дуга простирается отъ Каліанпура, у подошвы Гималайскихъ горъ, до Куданкулама, на мысѣ Комоpинъ, и составляетъ 23° 50′. Всѣ подробности индійскихъ работъ можно найти въ многотомномъ изданіи «Account of the Operations of the Great Trigonometrical Survey of India».

Англичане же произвели новое градусное измѣреніе въ южной Африкѣ, возобновивъ и продолживъ прежнее измѣреніе Лакайля. Эта работа исполнена *Маклиромъ* (1794—1879) въ 1842—1852 годахъ. Для длины одного градуса подъ широтою — 33° получено было теперь 56 891 тоазъ или около 51 851 саж.

15. Градусныя измѣренія въ Средней Европѣ. Въ XIX вѣкѣ начали производить градусныя измѣренія и въ Средней Европѣ, въ германскихъ государствахъ. Первое измѣреніе, предпринятое барономъ *Цахомъ* и *Мюфлингомъ* (1775—1851), было однако неудачно. Оконечности базиса, измѣреннаго въ 1802 году близъ Готы, были означены на мѣстности двумя вертикально врытыми старыми чугунными пушками, пожертвованными для этой цѣли Великимъ Герцогомъ Веймарнскимъ. Начавшаяся вскорѣ война съ Наполеономъ принудила прекратить тріангуляцію, а извѣстіе о сраженіи подъ Іеною павело на тогдашнихъ нѣмцевъ паническій страхъ: Коллегія Тайнаго Совѣта въ Готѣ приказала вырыть ночью упомянутыя пушки, боясь, чтобы непріятель не счелъ ихъ нарочно скрытыми военными предметами. Послѣ водворенія мира германскія государства усердно принялись за тріангуляціи и градусныя измѣренія. Изъ послѣднихъ, по точности результатовъ, особенно замѣчательны три: Голштинское, Гановерское и Восточно-Прусское.

Голштинское градусное измѣреніе исполнено въ 1820—1823 гг. подъ руководствомъ директора альтонской обсерваторіи *Шумахера* (1780—1850). Крайними точками дуги были Лизабель на сѣверѣ и Лауенбургъ на югѣ. Вся дуга имѣла лишь 1°34′, и изъ нея получено для длины 1° меридіана подъ широтою 54° число 57 093 тоаза или 52 155 саж.

Гановерское измѣреніе произведено знаменитымъ геттингенскимъ ученымъ *Гауссомъ* (1777—1855) въ 1821—1824 гг., между Альтоною и Геттингеномъ. Тутъ Гауссъ впервые примѣнилъ для дневныхъ наблюденій изобрѣтенный имъ геліотропъ. Дуга имѣла 2°1′, и для длины 1° меридіана подъ шириною 52,5° получилась величина 57 126 тоазовъ или 52 185 саж.

Наконецъ третья дуга измѣрена кенигсбергскимъ астрономомъ *Бесселемъ* (1784—1846) и прусскимъ геодезистомъ *Байеромъ* (1794—1885) между Мемелемъ и Трунцемъ въ 1831—1834 гг. и расположена въ косвенномъ направленіи къ меридіану, соединяя проложенныя раньше тріангуляціи Россіи и Пруссіи. Изданное о ней сочиненіе Бесселя «Gradmessung in Ostpreussen», 1838, представляетъ образецъ точности выводовъ.

Хотя эта тріангуляція, какъ уже упомянуто, служила для сравненія сторонъ и азимутовъ прежнихъ, однако цѣпь ея треугольниковъ сама по себѣ представляетъ градусное измѣреніе, такъ какъ на конечныхъ точкахъ были измѣрены широты и азимуты, а благодаря своему косвенному направленію, эта тріангуляція позволила вычислить одновременно обѣ полуоси земного сфероида; косвенная къ меридіану дуга равносильна двумъ дугамъ, измѣреннымъ одна по меридіану, а другая по параллели. Для измѣренія базиса Бессель изобрѣлъ новый базисный приборъ. Тригонометрическими знаками служили щиты, покрытые бѣлою краскою съ черною полосою по серединѣ, или мѣдные полированные и высеребренные шары, отражавшіе свѣтъ Солнца въ видѣ яркой звѣздочки. Въ результатѣ для длины 1° меридіана подъ широтою 55° Бессель получилъ величину 57 144 тоаза или около 52 201 саж.

Послѣ этихъ образцовыхъ работъ въ Германіи неоднократно предпринимались тріангуляціи, имѣвшія болѣе практическую цѣль — доставить опорныя точки для съемокъ. Однако многія изъ нихъ не уступаютъ по тщательности работъ наилучшимъ градуснымъ измѣреніямъ. Въ настоящее время вся Германія покрыта сплошною сѣтью треугольниковъ.

16. Русское измѣреніе по меридіану. Точныя тригонометрическія работы въ Россіи начались послѣ окончанія борьбы съ Наполеономъ; сперва онѣ велись почти исключительно на западной окраинѣ Имперіи и имѣли цѣлью доставить опорныя точки для съемокъ. Одинъ изъ дѣятельнѣйшихъ руководителей этихъ работъ, *Теннеръ* (1783—1860), какъ бы въ предвидѣніи будущаго градуснаго измѣренія, располагалъ треугольники въ своихъ тріангуляціяхъ въ Литовскихъ губерніяхъ съ такимъ разсчетомъ, чтобы изъ нихъ составилась непрерывная цѣпь первоклассныхъ треугольниковъ вдоль меридіана.

Почти одновременно съ работами Теннера молодой профессоръ астрономіи Юрьевскаго университета *В. Я. Струве* (1793—1864) предпринялъ настоящее градусное измѣреніе въ Прибалтійскихъ губерніяхъ, причемъ изобрѣлъ новый базисный приборъ и заказалъ лучшіе для того времени теодолиты для измѣренія угловъ. Это первое въ Россіи градусное измѣреніе, послужившее ядромъ большого русско-скандинавскаго измѣренія, произведено съ 1821 по 1831 годъ и описано въ сочиненіи Струве: Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands, Dorpat, 1831. По окончаніи этой работы Струве надѣялся продолжать ее на сѣверъ и на югъ, такъ какъ вдоль юрьевскаго меридіана на всемъ пространствѣ Россіи не представляется къ тому непреодолимыхъ мѣстныхъ препятствій; по собственнымъ его словамъ, эта мысль пришла ему въ голову еще во времена студенчества въ Юрьевѣ. Съ назначеніемъ Струве директоромъ открытой въ 1839 году Пулковской обсерваторіи, онъ, ставъ во главѣ всѣхъ астрономическихъ и геодезическихъ работъ въ Россіи, тотчасъ взялся за осуществленіе своей завѣтной мечты. Благодаря щедрому покровительству Основателя обсерваторіи, Императора Николая I, ему удалось не только начать, но и дожить до окончанія этого огромнаго научнаго предпріятія. Къ балтійскимъ и литовскимъ тріангуляціямъ постепенно присоединялись тріангуляціи въ губерніяхъ Волынской, Подольской и Бессарабской на югѣ и въ Финляндіи, Швеціи и Норвегіи на сѣверѣ. Считая отъ сѣвера на югъ, тригонометрическія работы въ различныхъ частяхъ дуги меридіана произведены были:

Въ Финмаркенѣ (Норвегіи).	съ 1845	по	1850	г.
» Лапландіи (Швеціи).	» 1845	»	1852	»
» Финляндіи.	» 1830	»	1851	»
» Прибалтійскихъ губерніяхъ. .	» 1816	»	1831	»
» Литовскихъ губерніяхъ	» 1816	»	1828	»
» Волынской и Подольской губ.	» 1835	»	1840	»
» Бессарабіи.	» 1844	»	1852	»

Самъ Струве лично руководилъ работами въ Прибалтійскихъ губерніяхъ и въ Финляндіи, всѣ прочія тріангуляціи въ Россіи произведены подъ руководствомъ *Теннера;* работами въ Швеціи руководилъ директоръ Стокгольмской обсерваторіи *Зеландеръ* (1804—1870), а въ Норвегіи—директоръ обсерваторіи въ Христіаніи *Ганстинъ* (1784—1873).

Вся русско-скандинавская дуга меридіана обнимаетъ пространство въ 25°20′ по широтѣ; тріангуляція составлена изъ 258 главныхъ треугольниковъ, для которыхъ измѣрено 10 базисовъ (Альтенъ, Торнео, Улеаборгъ, Элимо, Симонисъ, Понедѣли, Осовница, Старо-Константиновъ, Романкауцы и Ташбунаръ) и опредѣлено 13 астрономическихъ точекъ (Фуглепесъ, Стуоройви, Торнео, Кильнимяки, Гохландъ, Дерптъ, Якобштадтъ, Немѣжъ, Кременецъ, Супрунковицы, Водолуй и Старо-Некрасовка), на которыхъ измѣрены широты и азимуты. Подробности описаны въ извѣстномъ сочиненіи Струве «Дуга меридіана между Дунаемъ и Ледовитымъ морѣмъ», изданномъ въ 1861 г. одновременно на русскомъ и на французскомъ языкахъ.

Результаты этого величайшаго по протяженію *) градуснаго измѣренія по меридіану вошли во всѣ послѣдующія опредѣленія вида и размѣровъ Земли. Собственно же по одной этой дугѣ элементы земного сфероида выведены нашимъ геодезистомъ *А. Р. Бонсдорфомъ* и напечатаны въ XLII-й части Записокъ Военно-Топографическаго Отдѣла Главнаго Штаба. Онъ получилъ:

$$a = 3\,272\,563 \text{ тоаза} = 2\,989\,501 \text{ сажень}$$

$$b = 3\,261\,603 \quad » \quad = 2\,979\,490 \quad »$$

$$\mu = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298.6}$$

17. Градусныя измѣренія по параллелямъ. Первое по времени градусное измѣреніе по параллели, исполненное *Ж. Кассини* въ 1733 г. и о которомъ упомянуто въ § 9, имѣетъ нынѣ лишь историческое значеніе. Послѣ того ихъ долго нигдѣ не предпринимали. Главною тому причиною было обстоятельство, что опредѣленіе долготъ до послѣдняго времени производилось весьма неточно. Только съ примѣненіемъ съ 1846 года элек-

*) Одно время предполагалось продолжить русское градусное измѣреніе по меридіану еще далѣе на югъ, отъ Измаила до острова Кандіи, и въ 1867—1869 гг. наши геодезисты *Н. Д. Артамоновъ* и *И. Е. Кортацци* произвели на мѣстѣ тщательныя рекогносцировки; см. Предварительныя работы по градусному измѣренію въ Европейской Турціи (Записки В. Т. О. Главнаго Штаба, часть XXXII).

трическихъ телеграфовъ опредѣленіе долготъ сдѣлалось, по точности, соразмѣрнымъ съ опредѣленіемъ другихъ величинъ, входящихъ въ градусное измѣреніе.

Однако и до примѣненія электрическихъ телеграфовъ произведено было замѣчательное градусное измѣреніе по параллели, именно въ 1821—1823 гг. между Бордо и Фіуме черезъ Францію, Италію и Австрію. Здѣсь разность долготъ смежныхъ астрономическихъ точекъ получена при помощи пороховыхъ вспышекъ на вершинахъ промежуточныхъ горъ. Эти работы были конечно весьма утомительны и не достаточно точны, но все же, благодаря большому числу такихъ свѣтовыхъ сигналовъ, для своего времени онѣ вполнѣ удовлетворительны. Тріангуляція черезъ Альпы можетъ быть причислена къ труднѣйшимъ: нѣкоторыя точки наблюденій лежали на абсолютной высотѣ 3 500 метровъ. Починъ этого градуснаго измѣренія принадлежитъ знаменитому французскому геометру *Лапласу* (1740—1827); оно исполнено подъ руководствомъ геодезиста *Бруссо* и астрономовъ *Карлини* (1783—1862) и *Плана* (1781—1864). Вся дуга имѣетъ 15°32′ по долготѣ, и въ результатѣ для длины 1° параллели, подъ широтою $44^1/_2$°, получилась величина 39 970 тоазовъ. Подробности помѣщены въ сочиненіи «Opérations géodésiques et astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle». Milan, 1825—1827.

Послѣ повсемѣстнаго распространенія электрическихъ телеграфовъ, градусныя измѣренія по долготѣ получили большое развитіе и именно въ тѣхъ государствахъ, которыя растянуты по долготѣ, какъ Россія и Соединенные Штаты Сѣверной Америки. Изъ американскихъ, измѣреніе по 42° сѣв. широты имѣетъ всего 11°48′ по долготѣ; огромное же градусное измѣреніе по параллели 39° сѣверной широты еще не окончено. Зато русскія измѣренія по параллелямъ $47^1/_2$° и 52° сѣверной широты закончены, вычислены и напечатаны.

Полевыя работы тріангуляціи вдоль дуги $47^1/_2$° производились съ 1848 по 1856 г., подъ общимъ руководствомъ *М. П. Вронченко* (1802—1855). Отъ переутомленія на этихъ работахъ Вронченко умеръ, и онѣ продолжались, по составленному имъ плану, подъ руководствомъ *И. О. Васильева* (1802—1866).

Вся тріангуляція простирается на 20° по долготѣ и, начинаясь отъ одного изъ боковъ русскаго градуснаго измѣренія по меридіану (сторона Бологанъ-Пересечино въ Бессарабіи), тянется на востокъ черезъ Новороссію и землю Войска Донскаго до Астрахани. На этомъ пространствѣ измѣрены три базиса приборомъ Струве, именно близъ городовъ Бериславля, Новочеркасска и Астрахани.

Обработка тріангуляціи затянулась на весьма продолжительное время вслѣдствіе отсутствія тогда подходящихъ телеграфныхъ линій въ южной Россіи. Только въ 1885—1890 годахъ разности долготъ между главными астрономическими точками (Кишиневъ, Николаевъ, Александровскъ, Ростовъ на Дону, Сарепта и Астрахань) были опредѣлены директоромъ Николаевской обсерваторіи *Кортацци* и геодезистами *Поляновскимъ* и *Міончинскимъ*. Результаты всѣхъ наблюденій и вычисленій изложены въ XLIX и L-ой частяхъ Записокъ Военно-Топографическаго Отдѣла Главнаго Штаба.

Русское градусное измѣреніе по параллели 52° сѣверной широты составляетъ, въ связи съ работами, произведенными въ Западной Европѣ, до сихъ поръ единственное по протяженію геодезическое предпріятіе. Оно начинается отъ Хавефордвеста въ Англіи, проходитъ черезъ Англію, Бельгію и Германію, близъ Ченстохова вступаетъ въ Россію и тянется до Орска на р. Уралѣ. Общая длина этой огромной дуги достигаетъ 63° 41′, причемъ на долю Россіи приходятся почти $^2/_3$, именно 39° 24′. Починъ всего предпріятія принадлежитъ *В. Струве*, который еще въ 1857 году совѣщался по этому поводу съ иностранными учеными. Выборъ именно 52-й параллели состоялся потому, что материкъ Европы представляетъ вдоль нея наибольшее протяженіе по долготѣ (первоначально предполагалось довести измѣреніе до западныхъ береговъ Ирландіи, до островка Валенсіи). Кромѣ того въ Западной Европѣ по параллели 52° имѣлись уже готовыя и хорошія тріангуляціи, которыми легко было воспользоваться, выбравъ лучшіе треугольники изъ сплошныхъ сѣтей. Не такъ обстояло дѣло въ Россіи. Къ 1860 году, когда предпріятіе было окончательно рѣшено, у насъ вдоль 52-ой параллели имѣлось сравнительно не много тріангуляцій, а изъ имѣвшихся не всѣ были достаточной для градуснаго измѣренія точности; надлежало исправить старыя и произвести много новыхъ тригонометрическихъ работъ. Вслѣдствіе разныхъ мѣстныхъ препятствій, особенно встрѣтившихся въ Полѣсьѣ, гдѣ приходилось возводить тригонометрическіе знаки въ 20 и болѣе саженей высоты, полевыя геодезическія работы продолжались до 1872 года. Всего въ предѣлахъ Россіи получилось по этой параллели 321 треугольникъ, изъ которыхъ 199 взяты изъ старыхъ тріангуляцій (преимущественно Теннера въ Польшѣ и Васильева вдоль береговъ Волги), а 122 измѣрено вновь подъ руководствомъ геодезиста *І. И. Жилинскаго*. Вычисленія русской части дуги основаны на семи базисахъ, изъ которыхъ два западные (Ченстоховскій и Варшавскій) были измѣрены еще во время прежнихъ работъ приборомъ Теннера, а пять восточныхъ (Рогачевскій, Елецкій, Вольскій, Бузулукскій и Орскій) измѣрены вновь въ 1862—63 гг. приборомъ Струве.

Астрономическія опредѣленія разности долготъ посредствомъ телеграфовъ на всемъ протяженіи параллели, т. е. не только въ Россіи, но и заграницею, произведены главнымъ образомъ русскими геодезистами: *Жилинскимъ*, *Тилло*, *Форшемъ* и *Штубендорфомъ*. Астрономическихъ точекъ по параллели 52° сѣверной широты имѣется 15, изъ которыхъ 6 заграницею (Хаверфордвестъ, Гринвичъ, Ньюпортъ, Боннъ, Лейпцигъ и Бреславль) и 9 въ Россіи (Варшава, Гродно, Бобруйскъ, Орелъ, Липецкъ, Саратовъ, Самара, Оренбургъ и Орскъ). Всѣ вычисленія произведены подъ общимъ руководствомъ бывшаго Начальника Корпуса Военныхъ Топографовъ *І. И. Стебницкаго* (1832—1897) и напечатаны въ XLVI и XLVII частяхъ Записокъ Военно-Топографическаго Отдѣла Главнаго Штаба.

Русскія градусныя измѣренія по параллелямъ связаны между собою тремя меридіанальными тріангуляціями: на западѣ частью дуги меридіана Струве, по серединѣ цѣпью треугольниковъ прежнихъ тріангуляцій черезъ гор. Курскъ и Харьковъ и на востокѣ, по Волгѣ, тріангуляціею Приволжскою. Это обстоятельство дало поводъ вычислить элементы земного сфероида изъ однихъ русскихъ измѣреній по меридіанамъ и параллелямъ. Вычисленія произведены русскими геодезистами подъ руководствомъ профессора С.-Петербургскаго университета *А. М. Жданова* и напечатаны въ L-ой части Записокъ Военно-Топографическаго Отдѣла Главнаго Штаба. Въ результатѣ получено:

$$a = 6\,377\,717 \text{ метровъ} = 2\,989\,239 \text{ саж.}$$

$$b = 6\,356\,433 \quad » \quad = 2\,979\,263 \quad »$$

$$\mu = \frac{1}{299.7}.$$

18. Элементы земного сфероида. Въ § 9 было упомянуто, что для опредѣленія вида и размѣровъ Земли, полагая ее правильнымъ сфероидомъ, достаточно имѣть результаты только двухъ градусныхъ измѣреній, исполненныхъ по возможности подъ различными широтами. Такъ и поступали ученые XVIII и начала XIX вѣковъ. Но по мѣрѣ накопленія результатовъ другихъ градусныхъ измѣреній, нельзя было довольствоваться просто среднимъ выводомъ изъ различныхъ опредѣленій; изъ многихъ градусныхъ измѣреній можно было получить любые элементы сфероида, выбирая изъ нихъ по произволу различныя комбинаціи по два. При обработкѣ накопившагося обширнаго матеріала слѣдовало поступать такъ, какъ вообще выводятъ нынѣ вѣроятнѣйшія величины изъ совокупности многихъ противорѣчивыхъ другъ другу данныхъ, именно прибѣгнуть къ способу наименьшихъ квадратовъ.

Первая по времени попытка вывести элементы земного сфероида по способу наименьшихъ квадратовъ произведена знаменитымъ французскимъ геометромъ *Лежандромъ* (1752—1833); въ приложеніи къ своему сочиненію «Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes», 1805, онъ подвергъ обработкѣ четыре послѣдовательныя дуги Парижскаго меридіана, составляющія въ общей сложности только 9° 40′. Въ результатѣ Лежандръ получилъ весьма мало вѣроятное сжатіе $^1/_{148}$ и самъ смотрѣлъ на него, лишь какъ на примѣръ вычисленія.

Второе примѣненіе способа наименьшихъ квадратовъ къ опредѣленію элементовъ земного сфероида сдѣлано нашимъ финляндскимъ астрономомъ, директоромъ Абосской обсерваторіи

Вальбекомъ (1793—1822) въ 1819 году. Въ его распоряженіи было шесть градусныхъ измѣреній по меридіану, совокупная длина которыхъ составила почти 29°. Результатъ Вальбека до сихъ поръ имѣетъ практическое значеніе, такъ какъ многія тріангуляціи въ Россіи вычислены съ его размѣрами сфероида.

Затѣмъ окончаніе почти каждаго градуснаго измѣренія давало поводъ къ переработкѣ всѣхъ предъидущихъ и выводу новыхъ элементовъ сфероида; при этомъ часто обращались къ подлиннымъ журналамъ наблюденій, открывали и исправляли ошибки; вообще эти обработки разъяснили много сомнѣній. Между прочимъ обнаружилось съ полною очевидностью, что уклоненія отдѣльныхъ опредѣленій отъ общаго вывода зачастую превосходятъ возможныя ошибки наблюденій, изъ чего необходимо было заключить, что общій видъ Земли не есть правильный сфероидъ, а представляетъ тѣло, лишь въ общихъ чертахъ похожее на сфероидъ. Повторилось то же, что случилось въ началѣ XVIII вѣка, когда убѣдились, что Земля не шаръ, а сфероидъ. Какъ шаръ былъ достаточнымъ первымъ приближеніемъ для представленія вида всей Земли (и теперь еще принимается во многихъ приближенныхъ вычисленіяхъ), такъ сфероидъ оказался лишь вторымъ, хотя уже гораздо болѣе точнымъ приближеніемъ. Истинный же видъ всей Земли остается пока неизвѣстнымъ (см. § 24).

Во всякомъ случаѣ въ настоящее время сфероидъ считается достаточнымъ приближеніемъ для рѣшенія всѣхъ практическихъ задачъ, и надо бы только условиться принять какіе нибудь опредѣленные для него элементы. Къ сожалѣнію, въ этомъ вопросѣ, какъ впрочемъ и во многихъ другихъ, геодезисты разныхъ странъ не пришли еще къ соглашенію. Въ нижеслѣдующей таблицѣ приведены результаты вычисленій разныхъ ученыхъ:

Вычислитель.	Годъ.	Большая полуось a.	Малая полуось b.	Сжатіе.	Длина четверти меридіана.
		метровъ.	метровъ.		метровъ.
Деламбръ	1800	6 375 653	6 356 564	1 : 334,0	10 000 000
Вальбекъ	1819	6 376 896	6 355 833	1 : 302,8	10 000 268
Шмидтъ	1830	6 376 945	6 355 521	1 : 297,6	10 000 061

Вычислитель.	Годъ.	Большая полуось a.	Малая полуось b.	Сжатіе.	Длина четверти меридіана.
		метровъ.	метровъ.		метровъ.
Эри	1830	6 377 491	6 356 184	1 : 299,3	10 000 976
Бессель	1841	6 377 397	6 356 079	1 : 299,2	10 000 856
Теннеръ	1844	6 377 096	6 356 015	1 : 302,5	10 000 568
Кларкъ	1856	6 377 862	6 356 465	1 : 298,1	10 001 515
Кларкъ	1858	6 378 552	6 356 697	1 : 291,9	10 002 300
Шубертъ	1861	6 378 547	6 356 011	1 : 283,0	10 001 708
Кларкъ	1861	6 378 254	6 356 614	1 : 294,8	10 001 949
Праттъ	1863	6 378 245	6 356 643	1 : 295,3	10 001 924
Кларкъ	1863	6 378 288	6 356 620	1 : 294,4	10 001 902
Вилларсо	1865	6 378 204	6 355 881	1 : 285,8	10 001 334
Кларкъ	1866	6 378 206	6 356 584	1 : 295,0	10 001 887
Фишеръ	1868	6 378 338	6 356 230	1 : 288,5	10 001 714
Листингъ	1872	6 377 365	6 355 298	1 : 289,0	10 000 218
Іорданъ	1878	6 377 757	6 355 500	1 : 286,5	10 000 681
Кларкъ	1880	6 378 249	6 356 515	1 : 293,5	10 001 869
Харкнессъ	1891	6 377 972	6 356 727	1 : 300,2	10 001 816
Ждановъ	1893	6 377 717	6 356 433	1 : 299,7	10 001 389

Изъ этой таблицы легко видѣть, какъ еще неточно извѣстны элементы земного сфероида. Можно подумать, что Земля до послѣдняго времени увеличивалась; легко разсчитать, что со временъ Деламбра это кажущееся приращеніе земной поверхности составляетъ 273 600 кв. кил., что почти равняется поверхности Италіи съ принадлежащими ей островами. Увеличенію средняго радіуса на 1 метръ соотвѣтствуетъ увеличеніе поверхности Земли на 160 кв. километровъ.

При вычисленіи русскихъ тріангуляцій, кромѣ элементовъ Вальбека, наиболѣе часто употреблялись элементы земного сфероида, выведенные *Бесселемъ* и *Кларкомъ* (1880). Въ вычисленіе Бесселя вошло десять наиболѣе точныхъ градусныхъ измѣреній по меридіанамъ, совокупная длина которыхъ составляетъ дугу въ $50^\circ 34'$. Высокій научный авторитетъ Бесселя сдѣлалъ его элементы весьма распространенными среди вычислителей, и по нимъ составлены многія вспомогательныя таблицы. Поддержкою этихъ элементовъ служило отчасти и то обстоятельство, что выводы *Эри* (1801—1892), сдѣланные раньше, совершенно инымъ путемъ, изъ 14 градусныхъ измѣреній по меридіану и 4 по параллелямъ, замѣчательно согласны съ выводами Бесселя. Въ настоящее однако время оба вывода устарѣли, и лучшими должно признать элементы Кларка (1880), основанные лишь на пяти, но зато наибольшихъ и наиточнѣйшихъ градусныхъ измѣреніяхъ по меридіану и на измѣреніи по параллели 15° сѣверной широты въ Остъ-Индіи.

Необходимо еще замѣтить, что для вычисленія отдѣльныхъ тріангуляцій пользуются иногда элементами такого сфероида, который выведенъ изъ астрономическихъ точекъ этихъ же тріангуляцій и который, слѣдовательно, всего ближе выражаетъ часть уровенной поверхности въ странѣ, покрытой данною тріангуляціею. Такой сфероидъ называется *согласующимся*. Если астрономическія и геодезическія работы исполнены съ надлежащею точностью и обнимаютъ значительное пространство, то и согласующійся сфероидъ получается близкимъ къ сфероиду, выведенному для всей Земли вообще. Если же работы не отличаются точностью и опираются на малое число астрономическихъ точекъ, то элементы согласующагося сфероида едва-ли окажутся надежными, и при вычисленіи новыхъ тріангуляцій лучше брать элементы, выведенные какимъ нибудь авторитетомъ въ наукѣ.

19. Трехъосный эллипсоидъ. Разнообразіе элементовъ, выведенныхъ изъ разныхъ градусныхъ измѣреній, указываетъ, что сфероидъ не есть истинный видъ Земли, который по всей вѣроятности и не можетъ быть выраженъ никакою математическою формулою. Однако были попытки указать поверхность, которая представляла бы уровенную поверхность Земли еще ближе сфероида, именно указывали на поверхность *трехъосного эллипсоида*, т. е. тѣла, у котораго всѣ три взаимно-перпендикулярныя оси различны и котораго всѣ сѣченія плоскостью суть эллипсы (въ сфероидѣ сѣченія по экватору и по параллелямъ суть правильные круги). Поводомъ къ такимъ попыткамъ послужили изысканія математиковъ *Маклорена* (1698—1746) и *Якоби* (1804—1851); они доказали, что и трехъосный эллипсоидъ, вращающійся около своей наименьшей оси, можетъ быть фигурою равновѣсія жидкости. Въ настоящее время введеніе трехъоснаго эллипсоида вмѣсто сфероида не оправдывается необходимостью и притомъ оно чрезвычайно усложнило бы всѣ геодезическія вычисленія; достаточно сказать, что въ трехъосномъ эллипсоидѣ только два взаимно-перпендикулярные меридіана суть плоскія кривыя, всѣ прочіе меридіаны, равно какъ и параллели, суть кривыя двоякой кривизны. Тѣмъ не менѣе для полноты историческаго обозрѣнія не лишнее упомянуть о сказанныхъ попыткахъ. Одна изъ нихъ сдѣлана русскимъ геодезистомъ *Шубертомъ* (1789—1865), другая англичаниномъ *Кларкомъ*, неоднократно выводившимъ элементы земныхъ сфероидовъ. Вотъ результаты ихъ вычисленій:

Элементы эллипсоида.	Шубертъ 1860.	Кларкъ 1878.
Большая полуось экватора .	6 378 556 м.	6 378 380 м.
Малая полуось экватора . .	6 377 837	6 377 916
Полярная полуось	6 356 719	6 356 388
Сжатіе экватора	1 : 8871	1 : 13700
Сжатіе наиб. мерид.	1 : 292	1 : 290
Сжатіе наим. мерид.	1 : 302	1 : 296
Положеніе наиб. мерид. . .	41°4′ къ востоку отъ Гринвича	8°15′ къ З. отъ Гринв.
Положеніе наим. мерид. . .	131°4′ къ востоку отъ Гринвича	81°45′ къ В. отъ Гринв.

Изъ чиселъ этой таблицы легко усмотрѣть, что въ эллипсоидахъ какъ Шуберта, такъ и Кларка, наибольшій и наименьшій діаметры экватора различаются весьма мало, и ось вращенія значительно меньше ихъ обоихъ. Но замѣчательно, что положеніе наибольшаго и наименьшаго діаметровъ экватора, выведенное Кларкомъ, какъ будто согласуется съ физическимъ строеніемъ и распредѣленіемъ материковъ и океановъ на земной поверхности; дѣйствительно, меридіанъ наибольшаго діаметра экватора пересѣкаетъ пространства, занятыя океанами (Атлантическимъ и Великимъ), а меридіанъ наименьшаго діаметра экватора, наоборотъ, пересѣкаетъ материки (Азіи и Сѣверной Америки).

20. Наблюденія маятниковъ. Около середины XVIII столѣтія, когда геодезисты-практики занимались непосредственными наблюденіями, геодезисты-теоретики обогатили науку важными математическими изслѣдованіями. Особеннаго вниманія заслуживаютъ труды англичанина *Маклорена* и француза *Клеро*. Маклоренъ, разбирая вопросъ о равновѣсіи вращающагося жидкаго тѣла, открылъ законъ, по которому должна возрастать сила тяжести, по мѣрѣ удаленія отъ экватора къ полюсамъ; именно, это возрастаніе должно быть пропорціонально квадрату синуса широты, такъ что если черезъ $g_э$ и $g_п$ назвать ускоренія силы тяжести на экваторѣ и на полюсахъ, то ускореніе силы тяжести подъ любою широтою φ выразится формулою:

$$g = g_э + (g_п - g_э)\sin^2\varphi \qquad (3)$$

Клеро въ своемъ сочиненіи «La figure de la Terre», лучшемъ, какое до сихъ поръ было написано по этому предмету, вывелъ и доказалъ безсмертную теорему, носящую его имя и связывающую величину сжатія сфероида съ величинами ускореній силы тяжести на полюсѣ и на экваторѣ и центробѣжною силою на экваторѣ. Эта теорема выражается формулою:

$$\mu + \frac{g_п - g_э}{g_э} = \frac{5}{2} \cdot \frac{f}{g_э} \qquad (4)$$

въ которой μ — сжатіе сфероида, $g_э$ и $g_п$ — ускоренія силы тяжести на экваторѣ и на полюсѣ, а f — ускореніе центробѣжной силы на экваторѣ.

Теорема Клеро дала Геодезіи новое и независимое отъ прежде имѣвшихся средство опредѣлять сжатіе земного сфероида, которымъ ученые не замедлили воспользоваться. Градусныя измѣренія сопряжены съ продолжительными и утомительными переѣздами и возможны только на материкахъ и большихъ островахъ, притомъ еще только тамъ, гдѣ мѣстныя условія сколько нибудь позволяютъ прокладывать тріангуляціи. Вотъ почему градусныя измѣренія произведены понынѣ почти исключительно въ образованныхъ государствахъ Европы, Сѣверной Америки и въ Остъ-Индіи. Громадныя пространства Азіи, Африки, Южной Америки и Австраліи вѣроятно не скоро еще будутъ покрыты большими тріангуляціями. Среди океановъ, т. е. на наибольшей части всей земной поверхности, онѣ и вовсе не исполнимы. Наблюденія же силы тяжести, производимыя при помощи маятниковъ, требуютъ гораздо меньше труда и издержекъ и, что всего важнѣе, они могутъ быть произведены не только на материкахъ, но и на мелкихъ островахъ, тамъ и здѣсь разбросанныхъ среди океановъ. Словомъ, точки наблюденій надъ маятниками могутъ быть распредѣлены по всему сфероиду гораздо равномѣрнѣе, чѣмъ градусныя измѣренія, а такъ какъ нынѣ уже дознано, что отдѣльные меридіаны имѣютъ вообще говоря различную кривизну, то изъ совокупности большого числа наблюденій надъ маятниками сжатіе Земли должно получиться ближе къ истинѣ, чѣмъ изъ градусныхъ измѣреній.

Первыя спеціальныя наблюденія надъ маятникомъ были произведены еще *Буге* и *Лакондаминомъ* въ Квито, во время Перуанской экспедиціи. Ихъ маятникъ состоялъ изъ свинцовой чечевицы, повѣшенной на нити изъ алоэ. Качанія этого маятника наблюдались совмѣстно съ качаніями маятника астрономическихъ часовъ и записывались времена совпаденія качаній. Изъ такихъ наблюденій можно легко вывести длину секунднаго маятника въ точкѣ наблюденія. Подобныя же, но менѣе точныя наблюденія произвелъ и *Мопертюи* во время Лапландской экспедиціи.

Борда, изобрѣвшій базисный приборъ и повторительные круги для большого французскаго градуснаго измѣренія, изобрѣлъ также новый приборъ маятника, который далъ болѣе точные результаты и подробное описаніе котораго помѣщено въ упомянутомъ уже классическомъ сочиненіи Деламбра «Base du système métrique décimal». Съ приборомъ Борда французскіе ученые *Біо* и *Араго* произвели много наблюденій во

Франціи, въ Англіи и въ Испаніи, а *Фрейсине* и *Дюперрей* (1786—1865), во время своихъ кругосвѣтныхъ плаваній — по берегамъ Африки и Южной Америки, въ Новой Гвинеѣ и на Сандвичевыхъ островахъ.

Въ 1818 году англійскій ученый *Кэтеръ* (1777 — 1835) изобрѣлъ такъ называемый поворотный маятникъ, основанный на началѣ взаимности центра качанія и точки привѣса; результаты сдѣлались значительно точнѣе. Съ такими маятниками наблюдали самъ *Кэтеръ*, *Сэбинъ* (1788—1883), *Фостеръ*, *Холлъ*, *Басеви* (1831—1871), *Хевисайдъ* и другіе ученые въ Англіи, въ полярныхъ странахъ и во многихъ англійскихъ колоніяхъ.

Кенигсбергскій астрономъ *Бессель* принесъ огромную пользу въ дѣлѣ наблюденій надъ свободными маятниками; въ его превосходномъ сочиненіи «Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels», 1828 г., описаны новые способы наблюденій и объяснены правила введенія разныхъ поправокъ. Между прочимъ Бессель непосредственными наблюденіями доказалъ, что время колебанія маятника не зависитъ отъ матеріала, изъ котораго онъ сдѣланъ.

Въ XIX вѣкѣ произведено вообще много наблюденій надъ маятниками, а въ послѣднее время изобрѣтены очень простыя и удобныя для путешественниковъ конструкціи приборовъ. Опыты съ качаніями маятниковъ не обошлись и безъ человѣческихъ жертвъ. Въ половинѣ 1871 года англійскій капитанъ Басеви, уже прославившійся своими наблюденіями въ Остъ-Индіи, при переѣздѣ на избранную имъ точку въ Гималайскихъ горахъ, на абсолютной высотѣ 17 000 футовъ, простудился и, вмѣсто производства наблюденій, умеръ въ снѣговой пустынѣ, вдали отъ друзей и врачебной помощи.

Первыя наблюденія русскихъ ученыхъ надъ маятниками сдѣланы въ XVIII вѣкѣ: академикъ *Гришовъ* (1726—1760) въ 1757 и 1758 гг. наблюдалъ въ С.-Петербургѣ, Ревелѣ, Перновѣ, Юрьевѣ и Аренсбургѣ, а астрономъ *Румовскій* (1734—1812) въ 1761 году въ Селенгинскѣ и въ 1769 году въ Колѣ и Архангельскѣ, но ихъ наблюденія имѣютъ лишь историческое значеніе. Систематическія и точныя работы начались въ XIX вѣкѣ: извѣстный морякъ, впослѣдствіи президентъ Академіи

Наукъ, графъ *Литке* (1797—1882), во время своего кругосвѣтнаго плаванія на шхунѣ «Сенявинъ» въ 1826—1829 гг. наблюдалъ на 16-ти точкахъ преимущественно на прибрежьяхъ и островахъ Великаго Океана, сынъ знаменитаго физика *Парротъ* (1792—1841) въ 1829 году на Араратѣ, капитанъ *Рейнеке* въ 1833 году въ Кандалакшѣ, академикъ и профессоръ *Савичъ* (1811—1883) со *Смысловымъ* (1827—1891) и *Ленцомъ* на 12-ти точкахъ вдоль русскаго градуснаго измѣренія по меридіану отъ Торнео до Измаила, астрономы *Бредихинъ и Штернбергъ* въ средней Россіи, геодезисты *Стебницкій* и *Кульбергъ* на Кавказѣ, *Вилькицкій* и *Соколовъ* на 8-ми точкахъ вдоль градуснаго измѣренія по параллели 52° сѣверной широты, наконецъ Вилькицкій же наблюдалъ на крайнемъ сѣверѣ Россіи въ Архангельскѣ, на Новой Землѣ и у устьевъ р. Енисея. Наблюденія Литке производились приборомъ Кэтера, позднѣйшія — поворотнымъ маятникомъ, конструкціи извѣстнаго гамбургскаго механика *Репсольда*. Теоретическія изысканія надъ этимъ послѣднимъ приборомъ произведены профессоромъ *Цингеромъ* въ Пулковѣ и изложены въ его сочиненіи «Наблюденія надъ качаніями поворотныхъ маятниковъ», 1877 г.

21. Сжатіе изъ наблюденій маятниковъ. Выводъ сжатія земного сфероида изъ наблюденій надъ маятниками производится при помощи теоремы *Клеро* (4); для этого входящія въ формулу Клеро величины должны быть получены изъ наблюденій, сдѣланныхъ не менѣе какъ въ двухъ точкахъ земной поверхности, подъ различными широтами. Чтобы дать понятіе о рѣшеніи этого вопроса, возьмемъ результаты наблюденій на двухъ точкахъ въ Россіи, именно:

Мѣсто наблюденія.	Широта.	Длина секунднаго маятника.
Въ С.-Петербургѣ	$\varphi_1 = 59°56'30''$	$l_1 = 0.994876$ метра
» Тифлисѣ	$\varphi_2 = 41°41'28''$	$l_2 = 0.993190$ »

Зная длину секунднаго маятника l, легко опредѣлить ускореніе силы тяжести g по извѣстной формулѣ

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

выражающей время колебанія простого маятника. Подставляя вмѣсто t единицу, вмѣсто l вышеприведенныя величины, а вмѣсто π число 3, 14159 и рѣшая уравненіе относительно g, получимъ:

$$\text{Для С.-Петербурга } g_1 = 9.81904 \text{ метра}$$

$$\text{» Тифлиса} \ldots\ldots g_2 = 9.80240 \quad \text{»}$$

Замѣняя въ формулѣ Маклорена (см. § 20, форм. 3) величины φ и g числами примѣра, получимъ:

$$g_э + 0.74912 \; (g_п - g_э) = 9.81904$$

$$g_э + 0.44238 \; (g_п - g_э) = 9.80240$$

Рѣшивъ эти два уравненія съ двумя неизвѣстными, имѣемъ.

$$g_э = 9.77840 \text{ метра}$$

$$g_п - g_э = 0.05425 \quad \text{»}$$

Чтобы знать всѣ данныя, необходимыя для подстановки въ формулу Клеро, нужно еще опредѣлить величину ускоренія центробѣжной силы на экваторѣ. Извѣстно, что ускореніе центробѣжной силы вообще выражается формулою

$$f = \frac{4\,\pi^2.\,a}{t^2}$$

гдѣ a — разстояніе отъ оси вращенія, т. е. въ данномъ случаѣ большая полуось земного сфероида, для которой примемъ величину 6 378 249 метровъ, а t — время полнаго оборота, выраженное въ секундахъ средняго времени и которое для точекъ на Землѣ равно приблизительно 23 ч. 56 м. Съ этими числами $f = 0{,}03392$ м. Подставляя числовыя величины въ формулу Клеро, получимъ наконецъ

$$\mu = \frac{1}{320}$$

Понятно, что взятые здѣсь результаты наблюденій лишь на двухъ точкахъ, вслѣдствіе неизбѣжныхъ ошибокъ, а быть можетъ и отъ существованія мѣстныхъ аномалій въ силѣ тяжести, не могли дать для сжатія сфероида величины, заслуживающей довѣрія. Для полученія вѣроятнѣйшихъ результатовъ необходимо обрабатывать по способу наименьшихъ квадратовъ совокупность всѣхъ имѣющихся лучшихъ наблюденій надъ качаніями маятниковъ. Такія обработки производились уже много разъ; лучшими признаются выводы Кларка и Гельмерта. *Кларкъ* изъ разсмотрѣнія наблюденій на 100 точкахъ получилъ (см. Геодезію Кларка, русскій переводъ, стр. 366):

$$\mu = \frac{1}{292.2}$$

Гельмертъ изъ разсмотрѣнія наблюденій на 122 точкахъ получилъ (см. Helmert. Die Mathem. und Physikal. Theorien der Höheren Geodäsie, B. II, 241):

$$\mu = \frac{1}{299.3}$$

Обработка наблюденій надъ маятниками сопряжена съ значительными и не вполнѣ еще разъясненными затрудненіями. Помимо введенія поправокъ за температуру, давленіе атмосферы, приведеніе къ безконечно-малымъ колебаніямъ и проч. необходимо привести результатъ, полученный конечно для опредѣленной точки земной поверхности, къ уровню океана. Такъ какъ уровень океана не вездѣ совпадаетъ съ поверхностью того идеальнаго сфероида, къ которому только и можно примѣнять формулу Клеро, то приведеніе къ уровню океана (особенно для точекъ, лежащихъ на высокихъ горахъ и на уединенныхъ въ океанахъ островахъ) представляетъ наименѣе точную поправку, и формулы, предложенныя до сихъ поръ разными учеными для такого приведенія, не считаются вполнѣ удовлетворительными. Во всякомъ случаѣ необходимо помнить, что наблюденія надъ маятниками позволяютъ вычислить лишь сжатіе Земли, т. е. ея видъ; что же касается размѣровъ Земли, то вычисленіе ихъ возможно только изъ градусныхъ измѣреній.

Для вычисленія сжатія земного сфероида по формулѣ Клеро необходимо знать величину ускоренія силы тяжести g въ разныхъ мѣстахъ земной поверхности, поэтому можно задаться вопросомъ, почему наблюдаютъ именно качанія маятника, а не дѣлаютъ другихъ изысканій, напримѣръ опытовъ на машинѣ

Атвуда (1745—1807) и др., которыми тоже опредѣляется величина g? Оказывается, что ускореніе силы тяжести всего проще и точнѣе получается именно изъ наблюденій надъ качаніями маятниковъ. Введеніе различныхъ поправокъ въ наблюденія свободнаго и несвободнаго паденія тѣлъ потребовало бы еще бо̀льшихъ трудовъ и было бы менѣе точно.

22. Другіе способы опредѣленія вида Земли. Помимо градусныхъ измѣреній и наблюденій надъ качаніями маятниковъ существуютъ еще и другіе способы для опредѣленія вида Земли; ихъ можно раздѣлить на астрономическіе и геодезическіе.

Всѣ астрономическіе способы основаны на наблюденіяхъ Луны. Это небесное тѣло такъ близко къ Землѣ (среднее удаленіе центровъ Луны и Земли около 360 000 верстъ), что, наблюдая его одновременно съ разныхъ точекъ земной поверхности, можно замѣтить различіе направленій лучей зрѣнія и, слѣдовательно, обратно, по различію направленій на Луну можно вывести фигуру поверхности Земли. Эти наблюденія такъ называемаго параллакса Луны подтверждаютъ, что Земля есть тѣло, близкое къ шару. *Эйлеръ* (1707—1783) и *Лапласъ* показали, что изслѣдованія Луннаго параллакса могли бы послужить къ открытію даже сжатія Земли. Къ сожалѣнію наблюденія Луны не достаточно точны, чтобы вывести вполнѣ благонадежную величину сжатія.

Зато сфероидическій видъ Земли производитъ неравенства въ движеніи Луны, которыя, какъ оказалось, настолько значительны, что, изслѣдуя ихъ, можно вывести величину сжатія съ достаточною степенью приближенія. Еще *Майеръ* замѣтилъ, что въ долготѣ Луны существуютъ періодическія неравенства, необъяснимыя его теоріею, построенною въ предположеніи, что Земля есть правильный шаръ. *Лапласъ* показалъ, что причина этихъ неравенствъ заключается въ сфероидическомъ видѣ Земли; теоретическими изысканіями онъ, кромѣ періодическихъ неравенствъ въ долготѣ, открылъ еще подобныя же неравенства въ широтѣ. Сравнивая лучшія наблюденія Луны съ своею теоріею, Лапласъ вывелъ и величину сжатія Земли. Именно, изъ неравенствъ по долготѣ онъ нашелъ для сжатія дробь

$^1/_{305.1}$ а изъ неравенствъ по широтѣ дробь $^1/_{304.6}$ т. е. величины весьма близкія къ результатамъ, получаемымъ изъ градусныхъ измѣреній.

Необходимо замѣтить, что тогда какъ градусныя измѣренія позволяютъ опредѣлять сжатіе лишь нѣкоторыхъ отдѣльныхъ меридіановъ, неравенства въ лунномъ движеніи даютъ общее среднее сжатіе сфероида, и потому результаты изысканій Лапласа нельзя не признать блестящимъ подтвержденіемъ какъ теоріи земного сфероида, такъ и выводовъ изъ градусныхъ измѣреній.

Нѣкоторые изъ чисто-геодезическихъ способовъ опредѣленія размѣровъ Земли были указаны уже въ § 5, именно пріемъ *Райта*, основанный на измѣреніи угла пониженія, и способъ *Кеплера*—на измѣреніи взаимныхъ зенитныхъ разстояній двухъ удаленныхъ точекъ земной поверхности. Однако оба эти способа не могутъ доставить удовлетворительныхъ результатовъ, вслѣдствіе погрѣшностей отъ неизвѣстности точнаго закона преломленія лучей въ атмосферѣ. Нельзя сказать этого же о пріемѣ, предложенномъ голландскимъ ученымъ *Аудемансомъ* и объясненномъ въ IV части его отчета о тріангуляціи Явы (Die Triangulation von Java, Haag, 1895).

Способъ *Аудеманса* основанъ на опредѣленіи сферическаго избытка многоугольника, образованнаго обширною тригонометрическою сѣтью. Изъ сферической тригонометріи извѣстно, что поверхность фигуры P на шарѣ радіуса R выражается формулою:

$$P = \frac{\varepsilon'' R^2}{\varkappa}$$

гдѣ ε'' — сферическій избытокъ фигуры въ секундахъ, а $\varkappa = 206\,265$. Отсюда обратно, зная поверхность фигуры и ея сферическій избытокъ, можно вычислить величину R по формулѣ:

$$R = \sqrt{\varkappa}\,.\sqrt{\frac{P}{\varepsilon''}} = 454.164\sqrt{\frac{P}{\varepsilon''}} \qquad (5)$$

Сферическіе избытки отдѣльныхъ треугольниковъ на поверхности Земли такъ малы, что опредѣленіе ихъ, какъ разностей между суммою измѣренныхъ угловъ и 180°, не могло бы дать удовлетворительныхъ результатовъ. Совершенно иначе обстоитъ дѣло, если имѣется обширная сѣть смежныхъ треугольниковъ. Въ такой сѣти разность между суммою всѣхъ внутреннихъ угловъ фигуры и произведеніемъ $180^\circ (n-2)$, гдѣ n число угловъ фигуры, можетъ дать величину избытка съ достаточною достовѣрностью. Что касается поверхности P той же фигуры, то ее легко опредѣлить сложеніемъ поверхностей отдѣльныхъ треугольниковъ, считая ихъ плоскими.

Тріангуляція острова Явы представляетъ многоугольникъ изъ 66 сторонъ, заключающій 128 смежныхъ треугольниковъ. Общая ихъ поверхность достигаетъ 94 896 кв. километровъ, а сферическій избытокъ многоугольника оказывается равнымъ $8'3'',08$. Отсюда $R = 6\,365{,}4$ километровъ, что очень близко къ среднему радіусу кривизны сфероида подъ средней широтою острова Явы. Если бы подобная же тріангуляція была произведена гдѣ нибудь въ Гренландіи или вообще вблизи полюсовъ, то вѣроятно можно было бы вывести и сжатіе земного сфероида. Такимъ образомъ человѣчество могло бы рѣшить вопросъ о видѣ и размѣрахъ Земли даже и въ томъ случаѣ, если бы астрономическія наблюденія были невозможны, напримѣръ, если бы атмосфера не была достаточно прозрачною.

23. Понятіе о геоидѣ. Изъ разногласій элементовъ земного сфероида, полученныхъ разными учеными и различными способами, легко видѣть, что вопросъ о видѣ и размѣрахъ обитаемой нами планеты еще далеко не рѣшенъ, и геодезистамъ открыто обширное поле для будущей дѣятельности. Если бы поверхность уровня представляла правильный сфероидъ, то разногласія между результатами изъ наблюденій надъ маятниками были бы не больше того, что можно ожидать по изслѣдованіямъ погрѣшностей отдѣльныхъ измѣреній. На самомъ дѣлѣ эти разногласія значительно больше. Напримѣръ, астрономическія широты опредѣляются нынѣ съ ошибкою, не превосходящею $\pm 0'',5$; уклоненія же наблюденныхъ широтъ отъ широтъ, вычисленныхъ по тріангуляціямъ, доходятъ до $10''$ и даже болѣе; то же замѣчено относительно долготъ и длины секунднаго маятника. Ясно, что существуютъ *физическія при-*

чины этихъ разногласій. Надо полагать, что онѣ кроются въ неравномѣрномъ распредѣленіи наружныхъ неровностей земной коры и различіи плотностей массъ внутри Земли. Если наша планета и была нѣкогда огненножидкимъ сфероидомъ съ распредѣленіемъ плотностей концентрическими слоями, то, при остываніи, земная кора должна была сжиматься и трескаться, такъ что въ иныхъ мѣстахъ образовались части болѣе плотныя, а въ иныхъ менѣе плотныя, или даже пустоты. Разногласія въ широтахъ, долготахъ и напряженіи силы тяжести дѣйствительно замѣчаются всего чаще въ странахъ гористыхъ, въ которыхъ земная кора, вѣроятно, подвергалась наиболѣе сильнымъ переворотамъ.

Вслѣдствіе неравномѣрнаго распредѣленія плотностей внутри Земли отвѣсныя линіи въ послѣдовательныхъ точкахъ ея поверхности не слѣдуютъ законной постепенности расположенія нормалей на сфероидѣ, а потому и уровенная поверхность, оставаясь вездѣ нормальною къ отвѣснымъ линіямъ, не есть сфероидъ, а представляетъ, вообще говоря, неправильное тѣло, которое, по предложенію геттингенскаго физика *Листинга* (1808—1882), принято называть *геоидомъ*.

Такъ какъ нынѣ не подлежитъ уже сомнѣнію, что геоидъ въ общемъ близокъ къ сфероиду, то уровенная поверхность Земли или геоидъ находится примѣрно въ такомъ же отношеніи къ поверхности сфероида, какъ волнующаяся поверхность воды въ озерѣ къ ея поверхности въ спокойномъ состояніи. Сравненіе это имѣетъ однако ту неточность, что тогда какъ волнующаяся жидкость представляетъ участки выпуклыхъ и вогнутыхъ къ центру Земли поверхностей, отдѣльныя части поверхности геоида, неоднократно пересѣкая поверхность сфероида, нигдѣ не обнаруживаютъ вогнутостей, и геоидъ хотя и неправильная, но все же такая поверхность, на всемъ протяженіи которой выпуклость направлена наружу. Если бы дѣло обстояло иначе, то на Землѣ могли бы существовать мѣста, въ которыхъ сѣверныя точки имѣли бы широту меньшую, чѣмъ южныя, чего однако нигдѣ еще не наблюдалось. По приблизительной оцѣнкѣ нѣкоторыхъ ученыхъ соотвѣтственныя точки поверхностей геоида и сфероида отстоятъ другъ отъ друга не далѣе, какъ на 100—200 саженей.

Для читателя, затрудняющагося представить себѣ поверхность, которая, пересѣкаясь много разъ съ другою выпуклою поверхностью, сама остается на всемъ своемъ протяженіи выпуклою, напомнимъ, что если вообразить эллипсъ, около центра котораго описанъ кругъ радіусомъ среднимъ между его большою и малою полуосями, то эллипсъ будетъ въ четырехъ точкахъ пересѣкать окружность круга, однако какъ эллипсъ, такъ и кругъ остаются вездѣ выпуклыми наружу. Подобнымъ образомъ истинный путь Луны около Солнца представляетъ, какъ извѣстно, кривую трохоиду, вездѣ обращенную выпуклостью наружу, только у новолуній кривизна этой кривой меньше, чѣмъ у полнолуній. Что сказано здѣсь о кривыхъ линіяхъ, то конечно примѣнимо и къ кривымъ поверхностямъ.

Итакъ, истинный видъ Земли — это геоидъ, фигура очень близкая къ сфероиду. Понятно, что, смотря по мѣсту, гдѣ произведены градусныя измѣренія, элементы вычисляемаго сфероида должны быть различны; при наблюденіяхъ мы имѣемъ дѣло съ нормалями къ геоиду, а вычисляемъ ихъ, какъ будто онѣ суть нормали сфероида. Надо удивляться не тому, что разные вычислители получали разные элементы сфероида, а тому, что эти элементы различаются еще очень мало. Это доказываетъ, что геоидъ или истинная фигура уровенной поверхности дѣйствительно очень близка къ сфероиду, и потому во всѣхъ практическихъ вопросахъ Землю можно считать правильнымъ сфероидомъ съ элементами Бесселя, Кларка или позднѣйшихъ изслѣдователей. Теоретически нужно бы опредѣлить и вычислить элементы такого «идеальнаго» сфероида, который, во первыхъ, имѣлъ бы объемъ, равный объему геоида, т. е., чтобы сумма объемовъ отрѣзковъ геоида выше сфероида равнялась суммѣ объемовъ отрѣзковъ ниже его, и во вторыхъ, чтобы сумма квадратовъ наибольшихъ превышеній и пониженій геоида по отношенію къ сфероиду была наименьшею.

24. Будущая задача Геодезіи. Не упоминая о древнѣйшихъ и средневѣковыхъ нелѣпыхъ представленіяхъ о видѣ и величинѣ Земли, собственно въ научной исторіи этого вопроса можно замѣтить три періода: 1) до конца XVII вѣка, когда

Землю считали безусловно шаромъ, 2) съ конца XVII до начала XIX вѣка, когда ее считали правильнымъ сфероидомъ, и 3) настоящее время, когда убѣдились, что въ общемъ Земля, хотя и *очень близка* къ сфероиду, но все же представляетъ поверхность неправильную, не математическую—геоидъ. Такую поверхность можно изучать лишь по частямъ и тщательно, чтобы ошибки наблюденій не превышали небольшихъ уклоненій геоида отъ сфероида.

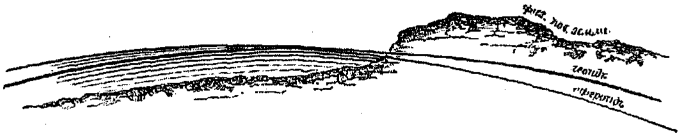
Если общій средній видъ Земли уже опредѣленъ (сфероидъ), дальнѣйшая задача Геодезіи заключается въ изученіи отклоненій истинной фигуры (геоида) отъ сфероида. Предстоитъ опредѣлить, гдѣ и на сколько именно поверхность геоида выше поверхности сфероида и гдѣ ниже. Какъ въ Топографіи, при изученіи рельефа физической поверхности небольшого участка, всѣ опредѣленія относятъ къ горизонтальной плоскости и, при помощи измѣреній высотъ и вообще при помощи съемокъ, находятъ координаты отдѣльныхъ точекъ участка по отношенію къ горизонтальной плоскости, такъ въ Геодезіи будущая задача заключается въ опредѣленіи координатъ отдѣльныхъ точекъ истинной уровенной поверхности (геоида) по отношенію къ поверхности идеальнаго сфероида. Задача эта чрезвычайно трудная, и попытки въ этомъ родѣ сдѣланы лишь въ самыхъ ограниченныхъ размѣрахъ (напримѣръ въ Германіи изучены Гарцъ и его окрестности, у насъ *)—Ферганская Область), но, въ общемъ, задачи Геодезіи и Топографіи оказываются нынѣ тождественными.

Матеріалы, потребные для рѣшенія намѣченной выше задачи Геодезіи, суть: тріангуляціи съ базисами и возможно частыми астрономическими точками, нивелировки между тригонометрическими точками и связывающія берега морей и океановъ, и измѣренія напряженія силы тяжести въ разныхъ мѣстахъ земной поверхности. Въ настоящее время этотъ матеріалъ еще весьма незначителенъ и притомъ распредѣленъ по земной поверхности крайне неравномѣрно, обнимая почти исключительно Европу и Соединенные Штаты Сѣверной Америки.

---

*) См. *И. И. Померанцевъ* — О фигурѣ геоида въ районѣ Ферганской Области (Записки В. Т. О. Гл. Штаба, Часть LIV, 1897).

Не мудрено, что нынѣ не установился даже взглядъ, въ какихъ мѣстахъ поверхность геоида выше поверхности сфероида и въ какихъ ниже. Большинство геодезистовъ склоняется къ тому, что подъ материками поверхность геоида, отъ избытка притяженія твердой коры, выше сфероида, а подъ океанами, отъ недостатка притяженія, наоборотъ, ниже сфероида; такимъ образомъ дѣйствительная физическая поверхность почвы, поверхность геоида и поверхность идеальнаго сфероида должны представляться въ разрѣзѣ такъ, какъ показано на чертежѣ 11. Директоръ Прусскаго Геодезическаго Института *Гельмертъ* приложилъ даже ко II-му тому своего трактата «Die Mathem.



Черт. 11.

und Physik. Theorien der Höheren Geodäsie», 1884 г., карту, на которой показалъ возможное положеніе повышеній и пониженій геоида относительно сфероида и оцѣнилъ расхожденія этихъ поверхностей по высотѣ; напр. въ Южной Америкѣ геоидъ поднимается надъ сфероидомъ до 440 метровъ. Другіе, опираясь на теоретическія изслѣдованія напряженія силы тяжести, пришли къ противоположному выводу и показываютъ, что подъ материками геоидъ ниже идеальнаго сфероида («Общая теорія фигуры Земли», 1888 г., моск. проф. *Слудскаго*). Подтвержденіемъ послѣднему выводу служитъ расположеніе наибольшаго и наименьшаго діаметровъ экватора трехъоснаго эллипсоида *Кларка* (см. § 19).

Для предстоящаго подробнаго изученія вида геоида и вывода элементовъ «идеальнаго» сфероида весьма важно, чтобы всѣ результаты геодезическихъ работъ дѣлались достояніемъ науки и сосредоточивались въ одномъ мѣстѣ, гдѣ и производилась бы ихъ тщательная и однообразная разработка. Въ 1861 году, по почину прусскаго геодезиста *Байера*, образовалась въ Берлинѣ Постоянная Комиссія «Средне-Европейскаго градуснаго измѣренія», имѣвшая первоначально цѣлью осуществить градусное измѣреніе по наидлиннѣйшему въ Европѣ меридіану отъ Дронтгейма въ Норвегіи до Палермо въ Сициліи. Въ 1867 году эта комиссія переименована въ «Европейскую», а въ 1886 г. въ «Международное измѣреніе Земли» (Internationale Erdmessung). Всѣ образованныя государства имѣютъ въ ней своихъ представителей *). Каждые три года собираются, поочередно въ разныхъ городахъ Европы, такъ называемыя «конференціи», на которыхъ делегаты представляютъ результаты новѣйшихъ геодезическихъ работъ и обсуждаютъ проекты будущихъ. Подъ редакціею секретаря Комиссіи ежегодно издаются отчеты о работахъ въ разныхъ странахъ на нѣмецкомъ и французскомъ языкахъ подъ заглавіемъ «Verhandlungen der Internationalen Erdmessung» или «Comptes-Rendus de l'Association géodésique Internationale». Кромѣ этого *международнаго*, во всѣхъ образованныхъ государствахъ существуютъ свои отечественныя учрежденія, которыя такъ или иначе, преслѣдуя практическія цѣли, способствуютъ и поступательному движенію науки. Таковы Военно-Топографическій Отдѣлъ Главнаго Штаба въ Россіи, Landesaufnahme въ Пруссіи, Militär-Geografisches Institut въ Австріи, Service Géographique de l'Armée во Франціи, Ordnance Survey въ Англіи, Coast and Geodetic Survey въ Соед. Штатахъ Сѣв. Америки и др.

Изъ предъидущаго очерка легко видѣть, что задача Геодезіи весьма обширна и въ настоящее время еще очень далека отъ рѣшенія. Геодезическимъ вопросамъ посвящаютъ свои силы величайшіе умы всѣхъ странъ и народовъ не только потому, что задача Геодезіи сама по себѣ чрезвычайно интересна и даже въ нѣкоторомъ смыслѣ жизненна для каждаго обитателя Земли, но еще и потому, что Геодезія имѣетъ тѣсную связь съ другими отдѣлами естественной философіи, особенно съ астрономіею, физическою географіею и геологіею. Изученіе вида и размѣровъ Земли невозможно безъ соотвѣтствующихъ астрономическихъ наблюденій, такъ какъ широты, долготы и азимуты

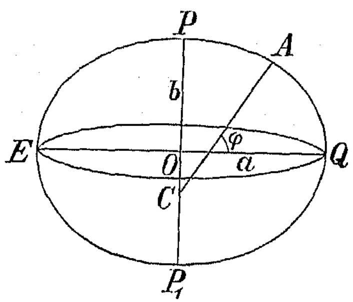
*) См. Международный Союзъ для измѣренія Земли, профессора Новороссійскаго университета *Н. Казанскаго*, Одесса, 1897 г.

основныхъ точекъ тріангуляцій получаются изъ астрономическихъ наблюденій; Геодезія же доставила астрономіи ту единицу длины—радіусъ земного экватора, которая служитъ для выраженія линейныхъ разстояній на небѣ. Связь Геодезіи съ географіею видна изъ того, что безъ Геодезіи нельзя составлять географическихъ картъ, представляющихъ графическое изображеніе всѣхъ свѣдѣній географіи; географическія же путешествія открываютъ новыя области для дѣятельности геодезистовъ. Геологическимъ строеніемъ земной коры весьма часто объясняются различныя формы рельефа суши, и наоборотъ, изученіе рельефа, изображеннаго на подробныхъ планахъ и картахъ, позволяетъ понимать многія особенности геологическаго его состава. Въ послѣднее время изученіе такъ называемыхъ «отклоненій отвѣсныхъ линій» (см. § 144) позволило проникать умственнымъ взоромъ даже во внутреннее строеніе земной коры, въ области, совершенно недоступныя для непосредственнаго изслѣдованія геологовъ. Наконецъ, можно напомнить, что если для изученія теоретической части Геодезіи необходимы обширныя математическія познанія, то съ другой стороны вопросы Геодезіи были причиною многихъ чисто-математическихъ изысканій; въ математикѣ существуетъ даже классъ кривыхъ, называемыхъ «геодезическими».

II.

Земной сфероидъ.

25. Общія формулы сфероида. Во всѣхъ практическихъ вопросахъ Геодезіи уровенная поверхность Земли принимается нынѣ за поверхность правильнаго сфероида; даже при изученіи поверхности геоида послѣднюю относятъ къ поверхности сфероида, какъ наиболѣе близко представляющей общій видъ обитаемой нами планеты. Поэтому необходимо привести математическія формулы, которыя всего чаще употребляются для сфероида въ геодезическихъ вычисленіяхъ.



Черт. 12.

Какъ уже было объяснено въ § 7, *сфероидомъ* называется тѣло, образованное вращеніемъ эллипса $EPQP_1$ около его малой оси PP_1 (черт. 12). Концы этой малой оси называются *полюсами*, сѣвернымъ и южнымъ. Сѣченія сфероида плоскостями, перпендикулярными къ оси вращенія, суть круги, называемые *параллелями*; наибольшая параллель, плоскость которой проходитъ черезъ центръ сфероида, называется *экваторомъ*. Экваторъ дѣлитъ сфероидъ на два равныхъ *полусфероида*; изъ нихъ одинъ, въ которомъ находится сѣверный полюсъ, называется *сѣвернымъ*, а другой — *южнымъ*. Сѣченія сфероида плоскостями, проходящими черезъ ось вращенія, суть эллипсы и называются *меридіанами*; понятно, что всѣ меридіаны суть равные эллипсы, именно, равные эллипсу, который своимъ вращеніемъ образовалъ сфероидъ. Наконецъ всѣ прочія сѣченія сфероида плоскостями суть тоже эллипсы, но эти эллипсы различны, смотря по положенію сѣкущей плоскости.

Радіусъ экватора и половина оси вращенія называются *большою* и *малою полуосями сфероида* и означаются обыкновенно буквами a и b. Обѣ полуоси вполнѣ опредѣляютъ видъ и размѣры сфероида, но для удобства вычисленій вводятъ еще другія величины, зависящія отъ полуосей. Чаще всего употребляются *сжатіе* μ и *эксцентриситетъ* e; другія не имѣютъ особаго названія и обозначаются просто буквами δ, m и n. Значенія этихъ пяти вспомогательныхъ величинъ и соотношенія ихъ между собою выражаются слѣдующею таблицею формулъ.

$$\left.\begin{aligned}
\mu &= \frac{a-b}{a} = 1 - \sqrt{1-e^2} = 1 - \sqrt{\frac{1}{1+\delta}} = 1 - \sqrt{\frac{1-m}{1+m}} = \frac{2n}{1+n} \\
e &= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{2\mu-\mu^2} = \sqrt{\frac{\delta}{1+\delta}} = \sqrt{\frac{2m}{1+m}} = \frac{2\sqrt{n}}{1+n} \\
\delta &= \frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{2\mu-\mu^2}{(1-\mu)^2} = \frac{e^2}{1-e^2} = \frac{2m}{1-m} = \frac{4n}{1-n^2} \\
m &= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{2\mu-\mu^2}{1+(1-\mu)^2} = \frac{e^2}{2-e^2} = \frac{\delta}{2+\delta} = \frac{2n}{1+n^2} \\
n &= \frac{a-b}{a+b} = \frac{\mu}{2-\mu} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} = \frac{1-\sqrt{\frac{1}{1+\delta}}}{1+\sqrt{\frac{1}{1+\delta}}} = \frac{1-\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}}{1+\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Зная большую полуось a и одну изъ этихъ вспомогательныхъ величинъ, легко вычислить малую полуось b по формуламъ:

$$b = a(1-\mu) = a\sqrt{1-e^2} = \frac{a}{\sqrt{1+\delta}} = a\sqrt{\frac{1-m}{1+m}} = a\,\frac{1-n}{1+n} \quad (7)$$

Точно также съ этими вспомогательными величинами легко вычисляются длина четверти меридіана, поверхность и объемъ сфероида. Наиболѣе употребительныя для этого формулы суть слѣдующія:

Для *длины дуги четверти меридіана* сфероида, отъ экватора до одного изъ полюсовъ:

$$Q = \frac{\pi}{2} \cdot a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \ldots\right)$$

или

$$Q = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{1+n}\left(1 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{64}n^4 + \ldots\right)$$

Для вычисленія *поверхности всего сфероида* пользуются или точною формулою

$$\Pi = 2\pi a^2 \left\{1 + \frac{1-e^2}{2e}\, lg.\, nat\left(\frac{1+e}{1-e}\right)\right\}$$

или же однимъ изъ рядовъ, по которымъ поверхность сфероида можетъ быть вычислена съ любою степенью приближенія:

$$\Pi = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{15}e^4 - \frac{1}{35}e^6 - \ldots\right)$$

$$\Pi = 4\pi ab \left(1 + \frac{1}{6}\delta - \frac{1}{40}\delta^2 + \frac{1}{112}\delta^3 - \ldots\right)$$

Для вычисленія *объема* сфероида можно тоже, смотря по желанію, взять или точное выраженіе

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

или рядъ:

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \left(1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \ldots\right)$$

Разныя формулы приведены здѣсь и въ другихъ мѣстахъ этой книги съ тою цѣлью, чтобы вычислитель имѣлъ возможность *повѣрять* результаты своихъ цифровыхъ выкладокъ, проходя черезъ разныя числа. Опытъ показываетъ, что если сдѣланная ошибка принуждаетъ повторить вычисленіе по той же формулѣ, то весьма часто ошибаются вновь, и на томъ же мѣстѣ.

26. Сфероидъ Кларка (1880 г.). Точные размѣры полуосей сфероида, наилучше выражающаго общій видъ Земли, неизвѣстны, и изъ таблицы, приведенной въ § 18, легко усмотрѣть, что разные ученые приходили къ различнымъ числовымъ выводамъ. Однако въ практическихъ вычисленіяхъ надо принять какіе нибудь опредѣленные элементы и твердо держаться ихъ. Къ сожалѣнію, тріангуляціи въ различныхъ государствахъ вычисляются нынѣ по разнымъ элементамъ; въ Германіи, напримѣръ, до сихъ поръ пользуются элементами *Бесселя* 1841 года, и для нихъ Тригонометрическое Отдѣленіе Государственной Съемки составило прекрасныя таблицы. Русскія тріангуляціи вычислялись сперва по еще болѣе устарѣвшимъ элементамъ *Вальбека* (1819 г.), но нынѣ они замѣнены элементами *Кларка* (1880 г.). Всѣ числовые примѣры и всѣ таблицы, помѣщенные въ этой книгѣ, вычислены по этимъ новѣйшимъ элементамъ Кларка.

Самъ Кларкъ въ своей Геодезіи (см. Геодезія Кларка, русскій переводъ, 1890 г., стр. 332) помѣстилъ лишь величины полуосей сфероида и выразилъ ихъ *въ англійскихъ футахъ*. Здѣсь величины полуосей даны въ футахъ и въ саженяхъ (1 русск. саж. = 7 англ. фут.). Впрочемъ для сравненій и повѣрки прибавленъ еще переводъ въ метрахъ. О соотношеніи разныхъ мѣръ см. главу VI § 70. Значеніе буквъ объяснено въ предъидущемъ §; въ прямыя скобки [ ] заключены логариѳмы соотвѣтствующихъ чиселъ. Ниже приведены еще наиболѣе употребительныя постоянныя и ихъ логариѳмы.

	Въ футахъ:		Въ саженяхъ:		Въ метрахъ:
$a =$	**20 926 202**	=	**2 989 457,4**	=	**6 378 249**
	[7.320 6904 132]		[6.475 5923 732]		[6.804 7014 795]
$b =$	**20 854 895**	=	**2 979 270,7**	=	**6 356 515**
	[7.319 2080 076]		[6.474 1099 676]		[6.803 2190 739]

$$\mu = 0.003\,407\,54619 \quad [7.532\,4417\,522]$$
$$e^2 = 0.006\,803\,48102 \quad [7.832\,7311\,776]$$
$$\delta = 0.006\,850\,08545 \quad [7.835\,6959\,888]$$
$$m = 0.003\,413\,35185 \quad [7.533\,1810\,575]$$
$$n = 0.001\,706\,68089 \quad [7.232\,1523\,268]$$
$$\sqrt{1-e^2} = 0.996\,592\,4538 \quad [9.998\,5175\,944]$$

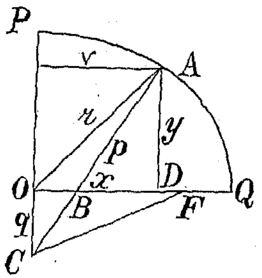
$Q =$	4 687 831,5 саженей	$=$	10 001 868	метровъ
$\Pi =$	448 195 231 кв. верстъ	$=$	510 064 916	кв. кил.
$V =$	892 222 786 080 куб. верстъ	$=$	1083 204 965 400	куб. кил.

Отношеніе окружн. къ діам. $\pi = 3.141\,592\,654\ [0.497\,1498\,727]$

Радіусъ круга въ секундахъ $\varkappa = 206\,264.806\ [5.314\,4251\,332]$

Модуль Бригговыхъ логар. $M = 0.434\,294\,482\ [9.637\,7843\,113]$

27. Формулы для одной точки на сфероидѣ. Въ каждой точкѣ A (черт. 12 и 13) на поверхности сфероида существуетъ одно вполнѣ опредѣленное направленіе AC, называемое *отвѣсною линіею* и представляющее направленіе силы тяжести въ этой точкѣ. Такая отвѣсная линія въ кривыхъ поверхностяхъ вообще называется *нормалью* и опредѣляется какъ перпендикуляръ къ плоскости, касающейся поверхности въ той же точкѣ. Всѣ нормали пересѣкаютъ ось вращенія сфероида, и точка пересѣченія лежитъ всегда въ части сфероида, противоположной той, на которой взята точка; такъ, для точки A сѣверной части сфероида нормаль AC пересѣкаетъ ось вращенія въ точкѣ C, лежащей въ южной его части. Плоскости, проведенныя черезъ отвѣсную линію или нормаль данной точки, называются вообще *вертикальными плоскостями*; та изъ нихъ, которая заключаетъ ось вращенія сфероида, есть плоскость *меридіана*, а перпендикулярная къ ней — плоскость *перваго вертикала*.



Черт. 13.

Уголъ, составляемый нормалью къ поверхности сфероида (отвѣсною линіею) въ данной точкѣ съ плоскостью экватора, называется *географическою широтою* этой точки; онъ означается обыкновенно буквою φ. Уголъ же, составляемый плоскостью меридіана данной точки съ плоскостью другого произвольно избраннаго меридіана, называется *географическою долготою* этой точки и обозначается буквою ω. Такъ какъ сфероидъ симметриченъ по отношенію къ плоскости каждаго меридіана, то долготы не входятъ въ математическія формулы одной точки; эти формулы одинаковы для всѣхъ точекъ той же параллели и зависятъ лишь отъ широты.

Когда географическая широта точки A на сфероидѣ дана, то, зная элементы сфероида, можно найти прямоугольныя координаты этой точки: $OD = x$ и $AD = y$. Онѣ вычисляются по формуламъ:

$$x = \frac{a \cdot \cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \qquad y = \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \tag{8}$$

Кривая, по которой каждая вертикальная плоскость пересѣкаетъ поверхность сфероида, называется *вертикальнымъ сѣченіемъ.* Изъ того, что сказано въ § 25, очевидно, что всѣ вертикальныя сѣченія сфероида суть вообще эллипсы; только для точекъ экватора вертикальное сѣченіе, совпадающее съ плоскостью самого экватора, есть кругъ.

Весьма малую часть дуги какой угодно кривой можно, безъ чувствительной погрѣшности, считать дугою круга; такой кругъ, называемый *соприкасающимся*, проводится черезъ три безконечно-близкія точки дуги кривой и служитъ мѣриломъ кривизны кривой; поэтому радіусъ соприкасающагося круга называется также *радіусомъ кривизны* кривой. Понятно, что для разныхъ точекъ какой нибудь кривой радіусы кривизны различны; только одинъ кругъ имѣетъ вездѣ одинаковую кривизну.

Радіусы кривизны всевозможныхъ вертикальныхъ сѣченій, проходящихъ черезъ какую нибудь точку кривой поверхности, вообще различны, но въ двухъ направленіяхъ имѣютъ наибольшую и наименьшую величины; во всѣхъ прочихъ направленіяхъ радіусы кривизны вертикальныхъ сѣченій имѣютъ величины промежуточныя. Сѣченія, соотвѣтствующія этимъ наибольшему и наименьшему радіусамъ кривизны, лежатъ во взаимноперпендикулярныхъ плоскостяхъ и называются *главными сѣченіями.* Въ сфероидѣ главныя сѣченія лежатъ въ плоскости меридіана и въ плоскости перваго вертикала. Радіусъ кривизны (ρ) сѣченія въ плоскости меридіана имѣетъ наименьшую, а въ плоскости перваго вертикала (p) наибольшую величину. Эти радіусы кривизны главныхъ сѣченій сфероида легко вычисляются, когда извѣстна широта (φ) даннаго мѣста, по формуламъ:

Радіусъ кривизны по меридіану . . . . $\rho = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$ (9)

Радіусъ кривизны по первому вертикалу . $p = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$ (10)

Подставляя сюда вмѣсто φ послѣдовательно 0° и 90°, легко видѣть, что для точекъ экватора радіусы кривизны главныхъ сѣченій будутъ:

Для $\varphi = 0^\circ \ldots \rho = a\,(1 - e^2) \qquad p = a$

для полюсовъ же эти радіусы кривизны (равно какъ и радіусы кривизны всѣхъ прочихъ вертикальныхъ сѣченій) равны, именно:

Для $\varphi = 90^\circ \ldots \rho = p = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}$

Радіусъ кривизны по первому вертикалу часто называютъ *длиною нормали* или даже просто *нормалью*, потому что онъ равенъ отрѣзку нормали (или отвѣсной линіи) отъ поверхности сфероида до точки пересѣченія ея съ осью вращенія, т. е. равенъ длинѣ AC (черт. 13).

Положеніе произвольной вертикальной плоскости и ея сѣченія въ данной на сфероидѣ точкѣ опредѣляется *азимутомъ* α, который есть уголъ, составляемый данною вертикальною плоскостью съ плоскостью меридіана; азимуты (α) считаются обыкновенно отъ сѣвера черезъ востокъ, отъ 0° до 360°. Радіусъ кривизны какого угодно вертикальнаго сѣченія (R) вычисляется по формулѣ *Эйлера*:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{p} \tag{11}$$

которой иногда придаютъ одинъ изъ слѣдующихъ двухъ видовъ:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} - \frac{p - \rho}{p \cdot \rho} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{1}{p} + \frac{p - \rho}{p \cdot \rho} \cdot \cos^2 \alpha \tag{12}$$

Легко видѣть, что при $\alpha = 0^\circ$ радіусъ R обращается въ ρ, а при $\alpha = 90^\circ$ въ p, т. е. въ радіусы кривизны сѣченій въ плоскостяхъ меридіана и перваго вертикала.

Для приближеннаго вычисленія пользуются еще формулами:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{\rho p}} \left(1 + \frac{1}{2}\, e^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos 2\alpha\right) \tag{13}$$

и

$$lg\,\frac{1}{R} = lg\,\frac{1}{\sqrt{\rho p}} + M\,.\,\frac{e^2}{2}\,.\,cos^2\varphi\,.\,cos\,2\,\alpha \qquad (14)$$

По этимъ приближеннымъ формуламъ величина R получается съ точностью до шести цифръ; при вычисленіи же пятизначными логариѳмами пользуются еще болѣе простою формулою:

$$R = \sqrt{\rho p} \qquad (15)$$

Геометрическое значеніе этой послѣдней формулы заключается въ томъ, что небольшую часть поверхности сфероида можно принимать за часть поверхности шара, радіусъ котораго равенъ среднему геометрическому изъ радіусовъ кривизны главныхъ сѣченій.

Радіусъ параллели данной широты, какъ легко видѣть изъ чертежа 13-го, равенъ абсциссѣ x. Отъ подставленія въ формулу абсциссы (8) значенія нормали изъ формулы (10), получаемъ слѣдующее простое выраженіе для радіуса параллели:

$$r = p\,.\,cos\,\varphi \qquad (16)$$

Понятно, что длина нормали p должна быть взята для широты φ данной параллели.

Радіусомъ-векторомъ u принято (хотя и неправильно) называть разстояніе точки на поверхности сфероида отъ его центра, т. е. величину AO (черт. 13). Очевидно, что

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (17)$$

Наконецъ иногда можетъ понадобиться вычислить еще нѣкоторыя величины, тоже вполнѣ опредѣляемыя положеніемъ точки на сфероидѣ; эти величины суть (см. черт. 13): $AB = l_1$, $BC = l_2$, $OB = k_1$, $BD = k_2$ и $OC = q$. Онѣ выражаются слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \frac{a\,(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2\,sin^2\varphi}} & \qquad k_1 &= \frac{ae^2\,cos\,\varphi}{\sqrt{1 - e^2\,sin^2\varphi}} \\ l_2 &= \frac{ae^2}{\sqrt{1 - e^2\,sin^2\varphi}} & \qquad k_2 &= \frac{a\,(1 - e^2)\,cos\,\varphi}{\sqrt{1 - e^2\,sin^2\varphi}} \\ & & q &= \frac{ae^2\,sin\,\varphi}{\sqrt{1 - e^2\,sin^2\varphi}} \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Легко повѣрить, что $l_1 + l_2 = p$ и $k_1 + k_2 = x = r$.

28. Числовой примѣръ. Для практическихъ приложеній всѣмъ предъидущимъ формуламъ можно придать болѣе простой и изящный видъ; именно, положивъ

$$\sin\psi = e\sin\varphi$$

получаемъ:

$$\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} = \cos\psi.$$

Геометрическое значеніе угла ψ показано на черт. 13 (уголъ OFC), причемъ точка F есть одинъ изъ фокусовъ меридіана.

Съ этой подстановкой получается слѣдующая таблица формулъ:

$$\left.\begin{array}{ll}
x = a.\cos\varphi.\sec\psi & l_1 = a(1 - e^2).\sec\psi \\
y = a.(1 - e^2).\sin\varphi.\sec\psi & l_2 = ae^2.\sec\psi \\
\rho = a.(1 - e^2).\sec^3\psi & k_1 = ae^2.\cos\varphi.\sec\psi \\
p = a\sec\psi & k_2 = a(1 - e^2)\cos\varphi.\sec\psi \\
r = a.\cos\varphi.\sec\psi = p\cos\varphi & q = ae^2.\sin\varphi.\sec\psi \\
u = a.\sec\psi\sqrt{1-(2-e^2)e^2\sin^2\varphi} &
\end{array}\right\} \quad (19)$$

Что касается величины R (форм. 11), то ее тоже не трудно преобразовать и, положивъ

$$tg\,\gamma = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}.\cos\varphi.\cos\alpha$$

получить точную формулу:

$$R = a.\sec\psi.\cos^2\gamma \qquad (20)$$

или приближенную, взамѣнъ (15):

$$R = b.\sec^2\psi \qquad (21)$$

Для примѣра здѣсь даны числовыя значенія всѣхъ вышестоящихъ величинъ, вычисленныя для $\varphi = 60^\circ$ и съ постоянными сфероида Кларка (см. § 26).

	Въ саженяхъ.	Прибл. въ верстахъ		Въ саженяхъ.	Прибл. въ верстахъ
x =	1 498 556.88 =	2997	l_1 =	2 976 722.95 =	5953
y =	2 577 917.70 =	5156	l_2 =	20 390.81 =	41
ρ =	2 991 989.91 =	5984	k_1 =	10 195.40 =	20
p =	2 997 113.76 =	5994	k_2 =	1 488 361.48 =	2977
r =	1 498 556.88 =	2997	q =	17 658.96 =	35
n =	2 981 833.73 =	5964	R =	2 993 269.23 =	5987

Изъ всѣхъ вышеприведенныхъ формулъ особенно часто примѣняются на практикѣ выраженія для ρ, p, r и R, необходимыя для перевода линейной длины небольшой дуги на поверхности сфероида въ угловую и, обратно, для перевода угловой въ линейную. Небольшую дугу эллипса можно считать дугою круга и, слѣдовательно, для сказаннаго перевода пользоваться формулами, указанными еще въ § 2 для шара, а именно:

Для перевода линейной длины въ угловую .... $\sigma'' = \varkappa \,.\, \frac{s}{R}$

Для перевода угловой величины дуги въ линейную . $s = \frac{\sigma''}{\varkappa} \,.\, R$

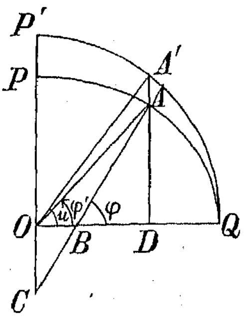
При вычисленіяхъ на сфероидѣ нужно лишь вставлять здѣсь вмѣсто R различныя величины (ρ, p, r и R), смотря по тому, какъ направлена дуга: по меридіану, по первому вертикалу, по параллели или, наконецъ, въ произвольномъ азимутѣ.

Для примѣра здѣсь приведены результаты перевода дугъ въ 100 верстъ длины, исходящихъ изъ точки подъ широтою $\varphi = 60^\circ$ и расположенныхъ по меридіану, по первому вертикалу ($\alpha = 90^\circ$), подъ азимутомъ 30° и по параллели въ угловую мѣру, а затѣмъ переводъ угловой величины дугъ въ $1^\circ = 3\,600''$ по тѣмъ же направленіямъ въ линейную мѣру. Какъ и выше, здѣсѣ взяты элементы сфероида Кларка (1880 г.).

Дуга въ 100 верстъ при $\varphi = 60^\circ$ составляетъ:		Дугѣ въ 1° при $\varphi = 60^\circ$ соотвѣтствуетъ:			
по меридіану . . .	$0^\circ 57' 26''.95$	104	версты	220	саженей.
по первому вертикалу .	$0^\circ 57' 21''.06$	104	»	309	»
подъ азимутомъ 30° .	$0^\circ 57' 25''.48$	104	»	242	»
по параллели . . .	$1^\circ 54' 42''.11$	52	»	155	»

29. Разнаго рода широты на сфероидѣ. Для каждой точки на сфероидѣ различаютъ три рода широтъ: географическую, геоцентрическую и приведенную.

Географическая широта употребляется въ вычисленіяхъ чаще другихъ; она получается непосредственно изъ наблюденій и, какъ уже было сказано, представляетъ уголъ, составляемый отвѣсною линіею данной точки съ плоскостью экватора. На чертежѣ 14, въ которомъ PQ есть четверть эллиптическаго меридіана, OQ—радіусъ экватора и AC—направленіе отвѣса въ точкѣ A, географическая широта есть уголъ $ABQ = \varphi$.



Черт. 14.

Геоцентрическая широта, обозначаемая черезъ φ', представляетъ уголъ AOQ, составляемый радіусомъ-векторомъ AO съ плоскостью экватора. Въ Геодезіи эта широта не примѣняется, но зато она имѣетъ большое значеніе въ астрономіи, потому что наблюденія, сдѣланныя на поверхности Земли, приводятся обыкновенно къ ея центру, точкѣ общей для всѣхъ наблюдателей. Для центра же Земли вычисляются и астрономическія таблицы.

Опишемъ около центра сфероида O дугу круга $P'Q$, радіусомъ, равнымъ большой полуоси a, и продолжимъ перпендикуляръ AD, опущенный изъ данной на сфероидѣ точки A на экваторъ, до пересѣченія съ этою дугою круга въ точкѣ A'. Соединивъ точку A' съ центромъ сфероида O, получимъ уголъ $A'OQ$, который называется *приведенною широтою* (названіе предложено Лежандромъ, latiude réduite). Этою широтою пользуются въ Геодезіи въ тѣхъ случаяхъ, когда приходится имѣть дѣло съ весьма большими треугольниками на поверхности сфероида. Не смотря на малое сжатіе земного сфероида, формулы сферической тригонометріи примѣнимы безъ чувствительной погрѣшности только къ небольшимъ сфероидическимъ треугольникамъ. Когда же они очень велики, то, чтобы не прибѣгать къ сложнымъ формуламъ сфероидической тригонометріи, переходятъ отъ географическихъ широтъ къ приведеннымъ (т. е. отъ поверхности сфероида къ поверхности шара), послѣ чего можно опять пользоваться простыми формулами тригонометріи сферической.

Изъ сравненія чертежей 13 и 14 легко усмотрѣть, что

$$AD = y = x \,.\, tg\,\varphi' \qquad A'D = x \,.\, tg\,u$$

Кромѣ того изъ теоріи эллипса извѣстно, что

$$\frac{A'D}{AD} = \frac{a}{b} \qquad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Слѣдовательно:

$$tg\,\varphi' = \frac{y}{x} \qquad tg\,u = \frac{y.a}{x.b} = \frac{y}{x\sqrt{1-e^2}}$$

Подставляя значенія x и y изъ формулъ (8) § 27, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\varphi' &= (1 - e^2)\,tg\,\varphi \\ tg\,u &= \sqrt{1 - e^2}\,.\,tg\,\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Отсюда ясно, что геоцентрическая и приведенная широты численно всегда меньше географической.

Эксцентриситетъ земного сфероида очень малъ, поэтому какъ геоцентрическая, такъ и приведенная широты не много отличаются отъ географической, и вмѣсто непосредственнаго примѣненія формулъ (22) нерѣдко пользуются нижеслѣдующими (по нимъ получаются не φ' и u, а разности $\varphi - \varphi'$ и $\varphi - u$):

$$\left.\begin{aligned} tg\,(\varphi - \varphi') &= e\,.\,cos\,\varphi\,.\,tg\,\psi\,.\,sec\,\psi \\ sin\,(\varphi - u) &= \sqrt{n}\,.\,cos\,\varphi\,.\,tg\,\psi \end{aligned}\right\}. \qquad (23)$$

По этимъ формуламъ можно вычислить φ' и u при помощи четырехзначныхъ логариөмовъ съ такою же точностью, съ какою тѣ же величины получились бы по формуламъ (22), при помощи логариөмовъ семизначныхъ.

Легко видѣть, что для точекъ экватора всѣ три широты обращаются въ 0, а для полюсовъ въ 90°; онѣ всего больше расходятся около широтъ $=\pm 45°$, гдѣ, для земного сфероида, разность между φ и φ' достигаетъ почти $12'$; а между φ и u почти $6'$.

Для предъидущаго примѣра, $\varphi = 60°$, получается

$$\varphi - \varphi' = 10'\,10''.77$$

$$\varphi - u = 5'\ 5''.13$$

и слѣдовательно:

$$\varphi' = 59°\,49'\,49''.23$$

$$u = 59°\,54'\,54''.87$$

30. Аналитическіе ряды. Какъ ни просты вышеприведенныя формулы, выражающія разныя величины для данной точки на сфероидѣ, но когда приходится ихъ примѣнять по нѣсколько сотъ разъ (напримѣръ для составленія таблицъ, подобныхъ приложеннымъ въ концѣ книги), то гораздо удобнѣе пользоваться рядами. Впрочемъ, вообще полезно имѣть нѣсколько формулъ для вычисленія тѣхъ же величинъ; уже было упомянуто, какъ важно имѣть средства предохранять вычисленія отъ почти всегда неизбѣжныхъ ошибокъ въ числовыхъ выкладкахъ; съ этою цѣлью здѣсь приведено иногда и по два ряда для вычисленія одной и той же величины; вычисливъ по точной формулѣ и по одному изъ рядовъ и замѣтивъ, что результаты не сходятся, можно повторить вычисленіе по другому ряду.

Нижеслѣдующіе ряды представляютъ ничто иное, какъ развертыванія предъидущихъ точныхъ формулъ въ строки, по возрастающимъ степенямъ малыхъ величинъ μ, e^2, δ и пр., причемъ значеніе буквъ сохранено уже разъ установленное въ §§ 25—29.

Смотря по требуемой степени точности можно пользоваться тѣмъ или другимъ числомъ членовъ, отбрасывая остальные.

Ряды для координатъ x и y.

$$x = a\left(1 + \frac{1}{8}e^2 + \frac{3}{64}e^4 + \frac{25}{1024}e^6 + \dots\right)\cos\varphi -$$

$$- a\left(\frac{1}{8}e^2 + \frac{9}{128}e^4 + \frac{45}{1024}e^6 + \dots\right)\cos 3\varphi +$$

$$+ a\left(\frac{3}{128}e^4 + \frac{25}{1024}e^6 + \dots\right)\cos 5\varphi - a\left(\frac{5}{1024}e^6 + \dots\right)\cos 7\varphi + \dots$$

$$y = a\left(1 - \frac{5}{8}e^2 - \frac{9}{64}e^4 - \frac{65}{1024}e^6 - \dots\right)\sin\varphi -$$

$$- a\left(\frac{1}{8}e^2 - \frac{1}{128}e^4 - \frac{15}{1024}e^6 - \dots\right)\sin 3\varphi +$$

$$+ a\left(\frac{3}{128}e^4 + \frac{11}{1024}e^6 + \dots\right)\sin 5\varphi - a\left(\frac{5}{1024}e^6 - \dots\right)\sin 7\varphi + \dots$$

Ряды для радіуса кривизны по меридіану.

$$\rho = a(1 - e^2)\left(1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi + \frac{3.5}{2.4}e^4\sin^4\varphi + \frac{3.5.7}{2.4.6}e^6\sin^6\varphi + \dots\right)$$

$$lg\frac{\varkappa}{\rho} = lg\frac{\varkappa}{a} + M\left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{7}{32}e^4 + \frac{17}{96}e^6 + \dots\right) +$$

$$+ M\left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{15}{64}e^6 + \dots\right)\cos 2\varphi -$$

$$- M\left(\frac{3}{32}e^4 + \frac{3}{32}e^6 + \dots\right)\cos 4\varphi + M\left(\frac{3}{192}e^6 + \dots\right)\cos 6\varphi - \dots$$

Ряды для радіуса кривизны по первому вертикалу.

$$p = a\left(1 + \frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}e^4\sin^4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}e^6\sin^6\varphi + \dots\right)$$

$$lg\frac{\varkappa}{p} = lg\frac{\varkappa}{a} - M\left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{5}{96}e^6 + \dots\right) + M\left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4 +\right.$$

$$\left. + \frac{5}{64}e^6 + \dots\right)\cos 2\varphi - M\left(\frac{1}{32}e^4 + \frac{1}{32}e^6 + \dots\right)\cos 4\varphi +$$

$$+ M\left(\frac{1}{192}e^6 + \dots\right)\cos 6\varphi - \dots$$

Рядъ для радіуса кривизны въ произвольномъ вертикалѣ.

$$R = p\,(1 - \delta \cos^2\varphi \cos^2\alpha + \delta^2 \cos^4\varphi \cos^4\alpha + \delta^3 \cos^6\varphi \cos^6\alpha + \ldots)$$

Ряды для радіуса вектора.

$$lg\,ч = lg\,a\sqrt{\frac{1+m^2}{1+m}} - \frac{3}{8}Mm^2 + \frac{1}{2}M\left(m - \frac{m^3}{4}\right)\cos 2\varphi -$$

$$-\frac{3}{8}Mm^2 \cos 4\varphi + \frac{7}{24}Mm^3 \cos 6\varphi - \ldots$$

$$lg\,ч = lg\,a - M\left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{32}e^4 - \frac{1}{96}e^6 - \ldots\right) + M\left(\frac{1}{4}e^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}e^4 + \frac{3}{64}e^6 + \ldots\right)\cos 2\varphi - M\left(\frac{3}{32}e^4 + \frac{3}{32}e^6 + \ldots\right)\cos 4\varphi +$$

$$+ M\left(\frac{7}{192}e^6 + \ldots\right)\cos 6\varphi - \ldots$$

Ряды для геоцентрической широты.

$$\varphi' = \varphi - \varkappa m \sin 2\varphi + \varkappa\frac{m^2}{2}\sin 4\varphi - \varkappa\frac{m^3}{3}\sin 6\varphi + \ldots$$

$$\varphi' = \varphi - \varkappa\left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{8}e^6 + \ldots\right)\sin 2\varphi +$$

$$+ \varkappa\left(\frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{8}e^6 + \ldots\right)\sin 4\varphi - \varkappa\left(\frac{1}{24}e^6 + \ldots\right)\sin 6\varphi + \ldots$$

Ряды для приведенной широты.

$$u = \varphi - \varkappa n \sin 2\varphi + \varkappa\frac{n^2}{2}\sin 4\varphi - \varkappa\frac{n^3}{3}\sin 6\varphi + \ldots$$

$$u = \varphi - \varkappa\left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4 + \frac{5}{64}e^6 + \ldots\right)\sin 2\varphi +$$

$$+ \varkappa\left(\frac{1}{32}e^4 + \frac{1}{32}e^6 + \ldots\right)\sin 4\varphi - \varkappa\left(\frac{1}{192}e^6 + \ldots\right)\sin 6\varphi + \ldots$$

Ряды для дуги меридіана отъ экватора до параллели φ.

$$S = \frac{a}{1+n}\left\{\left(1 + \frac{1}{4}n^2 + \ldots\right)\frac{\varphi''}{\varkappa} - \frac{3}{2}\left(n - \frac{1}{8}n^3 - \ldots\right)\sin 2\varphi + \right.$$

$$\left. \frac{15}{16}(n^2 - \ldots)\sin 4\varphi - \frac{35}{48}(n^3 - \ldots)\sin 6\varphi + \ldots\right\}$$

$$S = a\left\{\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \ldots\right)\frac{\varphi''}{\varkappa} - \left(\frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{32}e^4 + \right.\right.$$

$$+ \frac{45}{1024}e^6 + \ldots\Big) \sin 2\varphi + \left(\frac{15}{256}e^4 + \frac{45}{1024}e^6 + \ldots\right)\sin 4\varphi -$$

$$\left. - \left(\frac{35}{3072}e^6 + \ldots\right)\sin 6\varphi + \ldots\right\}$$

Ряды для поверхности пояса отъ экватора до параллели φ.

$$P = 2\pi a^2(1 - e^2)\left(1 + \frac{2}{3}e^2 \sin^2\varphi + \frac{3}{5}e^4 \sin^4\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{7}e^6 \sin^6\varphi + \ldots\right)\sin\varphi$$

$$P = 2\pi a^2\left\{\left(1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \ldots\right)\sin\varphi - \right.$$

$$- \left(\frac{1}{6}e^2 + \frac{1}{48}e^4 - \ldots\right)\sin 3\varphi + \left(\frac{3}{80}e^4 + \frac{1}{40}e^6 + \ldots\right)\sin 5\varphi -$$

$$\left. - \left(\frac{1}{112}e^6 + \ldots\right)\sin 7\varphi + \ldots\right\}$$

Легко видѣть, что при $\varphi = 90°$, ряды для S и P обращаются въ ряды для Q и $^1/_2 \Pi$ § 25, т. е. въ длину дуги четверти меридіана и въ поверхность полусфероида.

Очень рѣдко встрѣчается надобность вычислять длину дуги меридіана и поверхность пояса отъ самаго экватора; чаще нужно вычислять длину дуги меридіана и поверхность пояса между двумя данными параллелями; для этого служатъ ряды:

Ряды для дуги меридіана и поверхности пояса между параллелями φ_1 и φ_2.

$$S_1 = a\left\{\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \ldots\right)\frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{\varkappa} - \right.$$

$$- \frac{3}{4}\left(e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \frac{15}{128}e^6 + \ldots\right)\cos(\varphi_2 + \varphi_1)\sin(\varphi_2 - \varphi_1) +$$

$$+ \frac{15}{128}\left(e^4 + \frac{3}{4}e^6 + \ldots\right)\cos 2(\varphi_2 + \varphi_1)\sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) -$$

$$\left. - \frac{35}{1536}(e^6 + \ldots)\cos 3(\varphi_2 + \varphi_1)\sin 3(\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots\right\}$$

$$P_1 = 4\pi a^2 \Big\{\Big(1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \ldots\Big)\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} -$$

$$-\Big(\frac{1}{6}e^2 + \frac{1}{48}e^4 + \ldots\Big)\cos 3\frac{(\varphi_2+\varphi_1)}{2}\sin 3\frac{(\varphi_2-\varphi_1)}{2} +$$

$$+\Big(\frac{3}{80}e^4 + \frac{1}{40}e^6 + \ldots\Big)\cos 5\frac{(\varphi_2+\varphi_1)}{2}\sin 5\frac{(\varphi_2-\varphi_1)}{2} -$$

$$-\Big(\frac{1}{112}e^6 - \ldots\Big)\cos 7\frac{(\varphi_2+\varphi_1)}{2}\sin 7\frac{(\varphi_2-\varphi_1)}{2} + \ldots\Big\}$$

Послѣдній рядъ служитъ также для вычисленія поверхностей сфероидическихъ трапецій, ограниченныхъ дугами меридіановъ и параллелей. Если широты и долготы рамокъ трапеціи суть соотвѣтственно φ_1, φ_2 и ω_1, ω_2, то, превративъ разность $\omega_2 - \omega_1$ въ секунды, нужно величину P_1 умножить на отношеніе $(\omega_2 - \omega_1)''$ къ $360 . 60 . 60$. Такимъ образомъ получимъ, ограничиваясь членами e^4:

Рядъ для поверхности сфероидической трапеціи, ограниченной параллелями φ_1 и φ_2 и меридіанами ω_1 и ω_2.

$$P_2 = 2a^2\frac{(\omega_2-\omega_1)''}{\varkappa}\Big\{\Big(1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4\Big)\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} -$$

$$-\Big(\frac{1}{6}e^2 + \frac{1}{48}e^4\Big)\cos 3\frac{(\varphi_2+\varphi_1)}{2}\sin 3\frac{(\varphi_2-\varphi_1)}{2} +$$

$$+\frac{3}{80}e^4\cos 5\frac{(\varphi_2+\varphi_1)}{2}\sin 5\frac{(\varphi_2-\varphi_1)}{2}\Big\}$$

31. Числовые ряды. Всѣ предъидущіе ряды названы *аналитическими* потому, что ими можно пользоваться при вычисленіи соотвѣтствующихъ величинъ для произвольнаго сфероида, лишь бы сжатіе его было невелико. Когда же вычисляются величины, выражаемыя предъидущими рядами, для опредѣленнаго сфероида, напримѣръ для сфероида Кларка (1880 г.), то, понятно, вмѣсто a, b, μ, e^2 и пр. надо подставлять соотвѣтствующія числа; такимъ образомъ получаются *числовые ряды*, зависящіе лишь отъ произвольной широты φ. Ниже приведены наиболѣе употребительные ряды, вычисленные для элементовъ сфероида Кларка (1880 г.) и дающіе линейныя величины въ *саженяхъ*, а угловыя въ *секундахъ*. Числа, поставленныя въ прямыя скобки [ ], представляютъ логариѳмы соотвѣтствующихъ коэффиціентовъ; значеніе буквъ то же, что въ предъидущемъ §.

Числовые ряды для сфероида Кларка (1880 г.).

$$lg\,\frac{\varkappa}{\rho} = 8.83957586 + [7.3470579]\cos 2\varphi - [4.27818]\cos 4\varphi + [1.3343]\cos 6\varphi - \ldots$$

$$lg\,\frac{\varkappa}{p} = 8.83809219 + [6.8699366]\cos 2\varphi - [3.80106]\cos 4\varphi + [0.8571]\cos 6\varphi - \ldots$$

$$lg\,ч = 6.47485307 + [6.8699341]\cos 2\varphi - [4.27818]\cos 4\varphi + [1.7022]\cos 6\varphi - \ldots$$

$$lg\,\frac{ч}{a} = 9.99926069 + [6.8699341]\cos 2\varphi - [4.27818]\cos 4\varphi + [1.7022]\cos 6\varphi - \ldots$$

$$x = [6.4759625]\cos\varphi - [3.40690]\cos 3\varphi + [0.5141]\cos 5\varphi - \ldots$$

$$y = [6.4737302]\sin\varphi - [3.40505]\sin 3\varphi + [0.5123]\sin 5\varphi - \ldots$$

$$\varphi' = \varphi - [2.8476062]\sin 2\varphi + [0.07976]\sin 4\varphi - [7.4368]\sin 6\varphi + \ldots$$

$$u = \varphi - [2.5465775]\sin 2\varphi + [9.47770]\sin 4\varphi - [6.5338]\sin 6\varphi + \ldots$$

$$S = 8681^c.1695\,\frac{\varphi'}{10} - [3.8830952]\sin 2\varphi + [0.91113]\sin 4\varphi - [8.0342]\sin 6\varphi + \ldots$$

$$P\ (\text{въ кв. саж.}) = [10.4134285]\sin\varphi - [7.46986]\sin 3\varphi + [4.6564]\sin 5\varphi - \ldots$$

$$P\,(\text{въ кв. вер.}) = [5.0154884493]\,\sin\varphi - [2.0719199578]\sin 3\varphi +$$
$$+ [9.2584382]\,\sin 5\varphi - [6.4695]\,\sin 7\varphi + [3.716]\,\sin 9\varphi - \ldots$$

Ряды для P даютъ поверхность вырѣзка, ограниченнаго двумя меридіанами съ разностью долготъ $10'$ отъ экватора до широты φ.

$$S_1 = 8681^c.1695 - [1.6478507]\cos 2\varphi_n + [8.97691]\cos 4\varphi_n -$$
$$- [6.2761]\cos 6\varphi_n$$

$$P_2 = [2.4792144133]\cos\varphi_n - [0.0127660]\cos 3\varphi_n +$$
$$+ [7.42113]\cos 5\varphi_n - [4.7783]\cos 7\varphi_n + \ldots$$

здѣсь $\varphi_n = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, а $\varphi_2 - \varphi_1 = \omega_2 - \omega_1 = 10'$

P_2 выражено въ кв. верстахъ.

32. Дифференціальныя формулы. Тріангуляціи и другія геодезическія работы вычислялись и вычисляются въ разныхъ странахъ и въ разныя времена съ различными элементами земного сфероида. Такъ, у насъ въ Россіи долгое время примѣнялись элементы Вальбека, теперь — элементы Кларка (1880 г.), въ Германіи — элементы Бесселя и т. п. Поэтому случается, что величины, уже вычисленныя при однихъ элементахъ сфероида, нужно перевычислять при другихъ. Всѣми аналитическими рядами § 30 можно, разумѣется, пользоваться при какихъ угодно элементахъ, но если какія нибудь величины уже вычислены по точнымъ формуламъ или по числовымъ рядамъ § 31, то нѣтъ никакой надобности вычислять ихъ вновь. Для перехода отъ элементовъ одного сфероида къ элементамъ другого служатъ такъ называемыя *дифференціальныя формулы*, позволяющія вычислить, насколько измѣнится какая нибудь величина, если измѣнятся другія, отъ которыхъ она зависитъ. Такія формулы легко получаются дифференцированіемъ точныхъ формулъ §§ 25—29 или рядовъ § 30.

Означимъ перемѣны въ элементахъ a, b, μ, e^2... соотвѣтственно черезъ Δa, Δb, $\Delta\mu$, Δe^2...; онѣ связаны между собою дифференціальными формулами:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\mu &= \frac{b}{a^2}\left(\Delta a - \frac{a}{b}\Delta b\right)\\
\Delta e^2 &= \frac{2b^2}{a^3}\left(\Delta a - \frac{a}{b}\Delta b\right)\\
\Delta\delta &= \frac{2a}{b^2}\left(\Delta a - \frac{a}{b}\Delta b\right)\\
\Delta m &= \frac{4ab^2}{(a^2+b^2)^2}\left(\Delta a - \frac{a}{b}\Delta b\right)\\
\Delta n &= \frac{2b}{(a+b)^2}\left(\Delta a - \frac{a}{b}\Delta b\right)
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Въ свою очередь перемѣна въ полуоси b выражается слѣдующимъ образомъ въ перемѣнахъ полуоси a, сжатія μ и пр.:

$$\Delta b = b\,\frac{\Delta a}{a} - a.\Delta\mu = b\,.\,\frac{\Delta a}{a} - \frac{a^2}{2b}\,.\,\Delta e^2 = b.\,\frac{\Delta a}{a} - \frac{b^3}{2a^2}\,\Delta\delta =$$

$$= b\,.\,\frac{\Delta a}{a} - \frac{a^2}{b(1+m^2)}\,.\,\Delta m = b\,.\,\frac{\Delta a}{a} - \frac{2a}{(1+n)^2}\,.\,\Delta n \tag{25}$$

Всѣ дифференціальныя формулы справедливы въ сущности лишь для безконечно-малыхъ измѣненій элементовъ, но на практикѣ, въ приближенныхъ вычисленіяхъ, ими можно пользоваться и при небольшихъ конечныхъ измѣненіяхъ.

Примѣръ. Вычислить μ, e^2, δ, m и n для сфероида Бесселя. Извѣстно, что для сфероидовъ:

Кларка	$a = 6\,378\,249^m$	$b = 6\,356\,515^m$
Бесселя	$a = 6\,377\,397$	$b = 6\,356\,079$
	$\Delta a = \quad -852$	$\Delta b = \quad -436$

Подставляя эти перемѣны Δa и Δb въ формулы (24), получимъ:

$\Delta\mu = -0.000\,064\,78$ $\Delta e^2 = -0.000\,129\,11$ $\Delta\delta = -0.000\,130\,87$

$\Delta m = -0.000\,064\,99$ $\Delta n = -0.000\,032\,50$

Придавъ эти перемѣны элементовъ къ элементамъ Кларка (см. § 26), получаемъ для *сфероида Бесселя:*

$$\mu = 0.003\,342\,77$$

$$e^2 = 0.006\,674\,37$$

$$\delta = 0.006\,719\,22$$

$$m = 0.003\,348\,36$$

$$n = 0.001\,674\,18$$

Наконецъ, по формулѣ (25) легко повѣрить, что перемѣна въ полуоси b получается всѣ пять разъ одинаково, именно

$$\Delta b = -436^m.$$

Необходимо замѣтить, что, для большей точности выводовъ, въ дифференціальныя формулы вообще надо подставлять *средніе* элементы разсматриваемыхъ сфероидовъ.

Подобнымъ же образомъ для вычисленія перемѣнъ разныхъ величинъ, относящихся къ одной точкѣ на сфероидѣ, при переходѣ отъ элементовъ одного сфероида къ элементамъ другого, служатъ формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x &= \left\{\Delta a + \tfrac{1}{2} a \sin^2\varphi \sec^2\psi \,.\, \Delta e^2\right\} \cos\varphi \sec\psi \\
\Delta y &= \left\{(1-e^2)\,\Delta a - a\left(1 - \tfrac{1}{2}(1-e^2)\sin^2\varphi \sec^2\psi\right)\Delta e^2\right\} \sin\varphi \sec\psi \\
\Delta \rho &= \left\{(1-e^2)\,\Delta a - a\left(1 - \tfrac{3}{2}(1-e^2)\sin^2\varphi \sec^2\psi\right)\Delta e^2\right\} \sec^3\psi \\
\Delta p &= \left\{\Delta a + \tfrac{1}{2} a \sin^2\varphi \sec^2\psi\, \Delta e^2\right\} \sec\psi \\
\Delta \varphi' &= -\tfrac{\varkappa}{2} \sin 2\varphi \,\{1 + e^2\,(1 - \cos 2\varphi)\}\, \Delta e^2 \\
\Delta u &= -\tfrac{\varkappa}{4} \sin 2\varphi \left\{1 + e^2\left(1 - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\right\} \Delta e^2
\end{aligned}\right\} (26)$$

Наконецъ, вотъ дифференціальныя формулы для длины дуги меридіана, поверхности и объема сфероида; онѣ даны лишь до членовъ съ e^2, но желающіе могутъ легко развить ихъ съ какою угодно степенью приближенія.

$$\Delta Q = \frac{\pi}{2} a \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} e^2 \right) \frac{\Delta a}{a} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \right) \Delta e^2 \right\}$$

$$\Delta \Pi = 8\pi a^2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} e^2 \right) \frac{\Delta a}{a} - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{5} e^2 \right) \Delta e^2 \right\}$$

$$\Delta V = 4\pi a^3 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \right) \frac{\Delta a}{a} - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) \Delta e^2 \right\}$$

$$\Delta S = \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} e^2 \right) \frac{\varphi''}{\varkappa} - \frac{3}{8} e^2 \sin 2\varphi \right\} \Delta a -$$

$$- \frac{1}{4} a \left\{ \left(1 - \frac{3}{8} e^2 \right) \frac{\varphi''}{\varkappa} + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4} e^2 \right) \sin 2\varphi - \frac{15}{32} e^2 \sin 4\varphi \right\} \Delta e^2$$

$$\Delta P = 4\pi a \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \right) \sin\varphi - \frac{1}{6} e^2 \sin 3\varphi \right\} \Delta a -$$

$$- \pi a^2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) \sin\varphi + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} e^2 \right) \sin 3\varphi - \frac{3}{20} e^2 \sin 5\varphi \right\} \Delta e^2$$

$$\Delta S_1 = \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} e^2 \right) \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)''}{\varkappa} - \frac{3}{4} e^2 \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right\} \Delta a -$$

$$- \frac{1}{4} a \left\{ \left(1 + \frac{3}{8} e^2 \right) \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)''}{\varkappa} + \left(3 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{15}{16} e^2 \cos 2(\varphi_2 + \varphi_1) \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) \right\} \Delta e^2$$

$$\Delta P_2 = 4a \frac{(\omega_2 - \omega_1)''}{\varkappa} \cdot \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \Delta a -$$

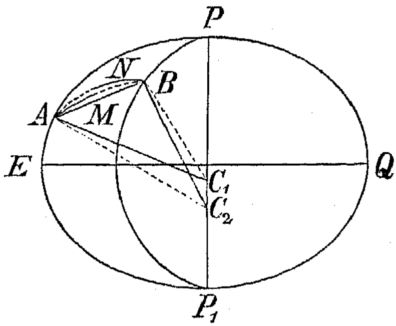
$$- 2a^2 \frac{(\omega_2 - \omega_1)''}{\varkappa} \left\{ \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} - \frac{1}{6} \cos 3 \frac{(\varphi_2 + \varphi_1)}{2} \sin 3 \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} \right\} \Delta e^2$$

По формулѣ для $\Delta \Pi$ легко убѣдиться въ справедливости замѣчанія, сдѣланнаго въ § 18 о приращеніи поверхности сфероида при данномъ увеличеніи его полуосей.

Помимо своего прямого назначенія дифференціальныя формулы могутъ служить и для повѣрки вычисленій. Пусть потребовалось, напримѣръ, узнать величину радіуса кривизны по меридіану (ρ) для данной точки какого нибудь сфероида; тогда для ручательства, что въ вычисленіи по формулѣ (9) не сдѣлано ошибки, можно взять величину ρ для сфероида Кларка (1880 г.) изъ таблицъ, помѣщенныхъ въ концѣ книги, и прибавить къ ней величину $\Delta\rho$, вычисленную по дифференціальной формулѣ. Оба результата должны быть одинаковы. Радость, которую испытаетъ вычислитель отъ убѣжденія въ вѣрности результата, съ избыткомъ вознаградитъ его за лишній трудъ.

33. Двойственность вертикальныхъ сѣченій. Будь Земля правильнымъ шаромъ, всѣ нормальныя или вертикальныя сѣченія представляли бы дуги большихъ круговъ. Такъ какъ двѣ точки, вообще говоря, вполнѣ опредѣляютъ положеніе большого круга на поверхности шара, то плоскость, проведенная черезъ радіусы двухъ точекъ A и B на шарѣ, представляла бы вертикальную плоскость, общую для обѣихъ точекъ, и пересѣкала бы поверхность шара по дугѣ большого круга, которая, какъ извѣстно изъ геометріи, есть кратчайшее разстояніе между этими точками. Если вообразить въ тѣхъ же точкахъ A и B высокіе вертикально поставленные шесты, то и визирныя линіи изъ A на B и изъ B на A лежали бы въ той же общей для обѣихъ точекъ вертикальной плоскости.

На сфероидѣ $EPQP_1$ (черт. 15) нормали двухъ точекъ (не лежащихъ въ одномъ меридіанѣ или въ одной параллели) не встрѣчаются и пересѣкаютъ ось вращенія въ разныхъ точкахъ; если обѣ точки лежатъ въ сѣверномъ полусфероидѣ, то нормаль южной точки A, т. е. прямая AC_1 пересѣчетъ ось PP_1 въ точкѣ C_1, а нормаль сѣверной точки B, т. е. прямая BC_2 — въ точкѣ C_2. Поэтому вертикальная плоскость AC_1B въ точкѣ A, проходящая черезъ B, пересѣчетъ поверхность сфероида по плоской эллиптической кривой AMB, а вертикальная плоскость BC_2A въ точкѣ B, проходящая черезъ A, пересѣчетъ поверхность сфероида по другой плоской эллиптической кривой BNA, лежащей на всемъ своемъ протяженіи сѣвернѣе кривой AMB. Это ясно изъ того, что обѣ взаимныя вертикальныя плоскости пересѣкаются, конечно, по хордѣ AB, но плоскость AC_1B, къ югу отъ хорды AB, лежитъ сѣвернѣе плоскости BC_2A и, слѣдовательно, наоборотъ, эта же плоскость къ сѣверу отъ хорды AB, лежитъ южнѣе плоскости BC_2A. Такимъ образомъ, вообще говоря, взаимныя вертикальныя плоскости двухъ точекъ на сфероидѣ не совпадаютъ. Если гдѣнибудь по линіи AMB поставить вѣшку, то для смотрящаго изъ A (предполагая сфероидъ прозрачнымъ) эта вѣшка казалась бы какъ разъ надъ вѣшкою въ B; смотрящему же изъ точки B, та же вѣшка представилась бы уклоненною отъ A влѣво. Совпаденіе вертикальныхъ плоскостей бываетъ лишь въ двухъ случаяхъ: когда обѣ точки лежатъ на одномъ меридіанѣ и когда онѣ лежатъ на одной параллели; въ первомъ случаѣ, хотя нормали AC_1 и BC_2 и пересѣкутъ ось PP_1 въ разныхъ точкахъ, но зато обѣ лежатъ въ одной плоскости, въ плоскости ихъ общаго меридіана, а во второмъ случаѣ обѣ нормали пересѣкутъ ось въ той же точкѣ и потому опредѣлятъ, конечно, одну, общую для обѣихъ точекъ вертикальную плоскость.



Черт. 15.

Если бы земной сфероидъ имѣлъ большое сжатіе, то объясненная двойственность вертикальныхъ сѣченій могла бы причинить значительныя неудобства, но такъ какъ, къ счастію, сжатіе нашего сфероида невелико, всего около $^1/_{300}$, то эта двойственность для точекъ не очень удаленныхъ другъ отъ друга не имѣетъ практическаго значенія. Дѣйствительно, разность азимутовъ кривыхъ AMB и ANB въ точкахъ A и B, т. е. уголъ между касательными къ этимъ кривымъ въ тѣхъ же точкахъ выражается приближенною формулою:

$$\Delta\alpha'' = \frac{1}{4}\,\varkappa\,.\,e^2\left(\frac{s}{a}\right)^2.\cos^2\varphi_n\,\sin 2\alpha_n \tag{27}$$

гдѣ $\varkappa = 206\,264''.8$, e^2 и a—квадратъ эксцентриситета и большая полуось сфероида, s — линейное разстояніе, а φ_n и α_n—

средніе широта и азимутъ точекъ A и B, т. е., называя широты и азимуты ихъ черезъ φ_1, φ_2 и α_1, α_2:

$$\varphi_n = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \qquad \alpha_n = \frac{\alpha_1 + (\alpha_2 - 180^\circ)}{2}$$

Наибольшее значеніе угла $\Delta\alpha$ бываетъ, очевидно, при направленіяхъ, составляющихъ съ меридіаномъ уголъ въ 45°. Для среднихъ широтъ Россіи, т. е. для $\varphi_n = 50^\circ$, $\Delta\alpha$ достигаетъ $0''.01$ при $s = 50$ и $0''.1$ при $s = 160$ верстамъ.

Точно также весьма незначительно и наибольшее линейное удаленіе l кривыхъ AMB и ANB; оно выражается приближенною формулою:

$$l = \frac{1}{16}\, e^2 . s \left(\frac{s}{a}\right)^2 . \cos^2 \varphi_n . \sin 2\alpha_n \qquad (28)$$

въ которой значеніе буквъ то же, что и въ предъидущей. Величина l для тѣхъ же широтъ достигаетъ 0.1 дюйма при $s = 80$ и 1 дюйма при $s = 170$ верстамъ.

Такимъ образомъ, благодаря малости сжатія, а, слѣдовательно, и эксцентриситета земного сфероида, двойственность вертикальныхъ сѣченій для всѣхъ встрѣчающихся на практикѣ разстояній между непосредственно наблюдаемыми точками, вообще говоря, не имѣетъ значенія, и оба сѣченія можно считать совпадающими.

Указанная двойственность можетъ имѣть однако значеніе и на небольшихъ разстояніяхъ, если наблюдаемая точка расположена очень высоко, напримѣръ на вершинѣ горы. Въ самомъ дѣлѣ, благодаря тому обстоятельству, что отвѣсная линія точки B (черт. 15) не лежитъ въ вертикальной плоскости AC_1B, заключающей лишь проекцію точки B на поверхности сфероида, поднятіе наблюдаемой точки B надъ поверхностью сфероида по своей отвѣсной линіи выводитъ ее изъ вертикальной плоскости визированія AC_1B съ A, такъ что, по мѣрѣ поднятія B надъ поверхностью сфероида, эта точка будетъ уклоняться въ другія вертикальныя плоскости наблюдателя въ A. Иными словами, *высота наблюдаемой точки* надъ уровенною поверхностью вліяетъ на азимутъ вертикальнаго сѣченія, а слѣдовательно и на горизонтальные углы между предметами.

Поправка азимута за высоту наблюдаемой точки вычисляется по формулѣ:

$$\Delta\alpha'' = \frac{1}{2}\varkappa e^2 \cdot \frac{H_1}{a} \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin 2\alpha \tag{29}$$

гдѣ $\varkappa = 206\,264''.8$, a и e^2—элементы сфероида, φ и α—широта и азимутъ въ точкѣ наблюденія, а H_1—абсолютная высота наблюдаемой точки, выраженная, конечно, въ тѣхъ же линейныхъ единицахъ, какъ и полуось a. Поправка азимута $\Delta\alpha$ достигаетъ наибольшей величины при направленіяхъ, составляющихъ съ меридіаномъ углы въ 45° (при $\alpha = 45°$, 135°, 225° и 315°, $\sin 2\alpha = \pm 1$, во всѣхъ прочихъ случаяхъ $\sin 2\alpha$ меньше единицы). Для широтъ средней Россіи, именно для $\varphi = 50°$, поправка $\Delta\alpha$ достигаетъ $0''.01$ при $H_1 = 100$ саж. и $0''.1$ при $H_1 = 2$ верстамъ. Такимъ образомъ при производствѣ тріангуляцій въ гористыхъ странахъ эту поправку необходимо вводить въ вычисленіе.

Изъ той же формулы (29), представляющей первый и наибольшій членъ разложенія въ рядъ, видно, что величина поправки азимута не зависитъ отъ разстоянія до наблюдаемой точки, что и понятно: хотя на близкихъ разстояніяхъ линейное удаленіе отвѣсной линіи наблюдаемой точки отъ вертикальной плоскости наблюдающей и меньше, но угловое удаленіе остается то же. Необходимо еще замѣтить, что *высота точки наблюденія* не вліяетъ на измѣряемые на ней азимуты.

34. Геодезическая линія. Выше было объяснено, что если двѣ точки поверхности сфероида лежатъ не на одномъ меридіанѣ или не на одной параллели, то соотвѣтствующія вертикальныя плоскости пересѣкаютъ поверхность сфероида по двумъ различнымъ плоскимъ, эллиптическимъ кривымъ. При небольшомъ удаленіи точекъ эти двѣ кривыя можно считать совпадающими (см. формулы 27 и 28), и геодезисту не представляется сомнѣнія, что ему считать за направленіе съ одной на другую и что за разстояніе между ними; при значительномъ же удаленіи точекъ допущеніе совпаденія плоскихъ кривыхъ не можетъ быть терпимо, не только въ смыслѣ математической неопредѣленности, но и въ смыслѣ практической ошибки. Является вопросъ, изъ какихъ кривыхъ долженъ быть составленъ треугольникъ на сфероидѣ, чтобы избѣжать указанной двойственности?

Помимо кривыхъ вертикальныхъ сѣченій между двумя точками на сфероидѣ можно вообразить безчисленное множество другихъ линій, имѣющихъ частью лишь теоретическій интересъ, частью же и практическое значеніе.

Представимъ себѣ линію, образуемую просто провѣшиваніемъ. Если выставлять вѣхи послѣдовательно, начиная съ точки A (черт. 15) направляясь постоянно на конечную точку B, на поверхности сфероида образуется кривая двоякой кривизны, которая будетъ касаться въ точкѣ A кривой AMB, а въ точкѣ B кривой ANB. Эта кривая называется *линіею провѣшиванія.*

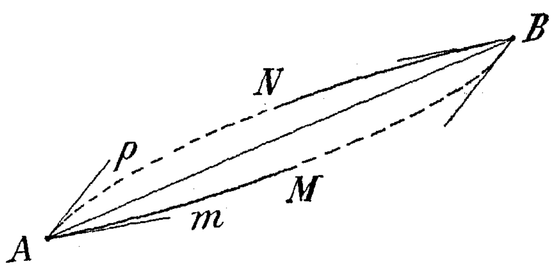
Можно вообразить кривую, въ каждой точкѣ которой разность азимутовъ на концы A и B была бы ровно 180°. Эта кривая есть пересѣченіе косой плоскости со сфероидомъ; она тоже будетъ касаться кривой AMB въ A и кривой ANB въ B; это будетъ геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ нормали къ поверхности сфероида, проводимыя изъ послѣдовательныхъ точекъ хорды AB, пересѣкаютъ эту поверхность.

Вообразимъ дугу большого круга, соединяющую зениты точекъ A и B. Геометрическое мѣсто точекъ на поверхности сфероида, имѣющихъ свои зениты въ этой дугѣ большого круга, составитъ кривую, отличную отъ обѣихъ предъидущихъ. Это будетъ плоская кривая, потому что въ каждой ея точкѣ нормали къ поверхности сфероида параллельны одной опредѣленной плоскости, и, слѣдовательно, касательныя плоскости въ каждой ея точкѣ параллельны данной прямой и своими пересѣченіями образуютъ цилиндрическую поверхность, точки касанія которой къ сфероиду лежатъ въ плоскости, проходящей черезъ центръ сфероида.

Всѣ эти и многія другія кривыя представляютъ значительныя теоретическія неудобства и не пригодны для практическихъ вычисленій. Напримѣръ, линія провѣшиванія, вообще такая простая и естественная для небольшихъ разстояній, представляетъ слѣдующее неудобство: если на ней, соединяющей двѣ точки A и B, взять двѣ промежуточныя точки C и D, то линія провѣшиванія, проведенная между C и D, не совпадетъ съ кривою AB.

Въ Геодезіи, при разсматриваніи весьма большихъ треугольниковъ, употребляютъ исключительно такъ называемую *геодезическую* или кратчайшую линію. Это та линія, по которой расположилась бы нить, туго натянутая на поверхности сфероида между двумя данными на ней точками, и, слѣдовательно, геодезическая линія на сфероидѣ соотвѣтствуетъ понятію о прямой на плоскости и дугѣ большого круга на шарѣ. Для всѣхъ паръ промежуточныхъ ея точекъ она будетъ тоже геодезическою.

Геодезическая линія была предложена еще знаменитымъ *Клеро* и ею занимались потомъ выдающіеся математики: *Эйлеръ*,



Черт. 16.

Лежандръ, *Бессель*, *Якоби* и другіе. Если узкій вырѣзокъ $AMBN$ поверхности сфероида, на которомъ проведены различныя вышеуказанныя кривыя, въ томъ числѣ и геодезическая линія, развернуть на плоскость, то всѣ кривыя на сфероидѣ останутся кривыми и на плоскости, только одна геодезическая линія обратится въ прямую AB (черт. 16). При этомъ углы, образуемые геодезическою линіею съ соотвѣтствующими вертикальными сѣченіями, т. е. углы mAB и таковой же при B равны, и каждый изъ нихъ равенъ приблизительно одной трети угла mAp, образуемаго вертикальными сѣченіями между собою (сравн. формулы 27 и 30).

Означимъ черезъ α астрономическій азимутъ направленія AB, т. е. уголъ, составленный наблюдаемымъ направленіемъ съ полуденною линіею въ точкѣ A, а черезъ α_1 азимутъ геодезическій, т. е. уголъ, составляемый съ нею же геодезическою линiею AB; разность между этими двумя азимутами выразится слѣдующею приближенною формулою (годною какъ для вычисленiя угла mAB въ точкѣ A, такъ и для соотвѣтствующаго ему угла въ точкѣ B):

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{1}{12}\,\varkappa\,.\,e^2\,.\left(\frac{s}{a}\right)^2.\cos^2\varphi_n\,.\,\sin 2\alpha_n \tag{30}$$

Значенiе буквъ см. форм. (27); легко видѣть, что уголъ mAB приблизительно въ три раза меньше угла pAm.

Удаленiе геодезической линiи отъ плоскихъ кривыхъ вертикальныхъ сѣченiй различно, смотря по разстоянiю соотвѣтствующихъ точекъ отъ начальныхъ A и B, но, вообще говоря, оно меньше, чѣмъ взаимное расхожденiе кривыхъ вертикальныхъ сѣченiй AMB и ANB, наибольшая величина котораго выражается формулою (28).

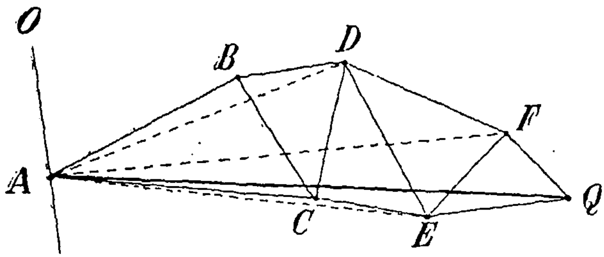
Разность между длинами кривыхъ вертикальныхъ сѣченiй и длиною геодезической линiи весьма незначительна и равна

$$\frac{1}{360}\,e^4.s\,.\left(\frac{s}{a}\right)^4.\cos^4\varphi_n\,.\sin^2 2\alpha_n \tag{31}$$

Эта разность достигаетъ 1 дюйма лишь при разстоянiи около 3 000 верстъ.

Изъ предъидущаго легко усмотрѣть, что для разстоянiй, встрѣчающихся при дѣйствительныхъ наблюденiяхъ на трiангуляцiяхъ и весьма рѣдко превосходящихъ 100 верстъ, геодезическую линiю можно считать практически сливающеюся съ обѣими кривыми вертикальныхъ сѣченiй и, говоря о треугольникахъ на поверхности сфероида, можно безразлично разумѣть треугольники, составленные геодезическими линiями между вершинами, или треугольники, составленные соотвѣтствующими кривыми вертикальныхъ сѣченiй. Геодезическая линiя прiобрѣтаетъ практическое значенiе только при весьма значительномъ удаленiи точекъ на сфероидѣ, и тогда ея примѣненiе приводитъ къ единству формулъ и легкости вычисленiй.

Сущность введенiя геодезической линiи въ вычисленiя заключается въ томъ, что около центра сфероида радiусомъ, равнымъ его большой полуоси, описываютъ шаръ. При возставленiи перпендикуляровъ къ плоскости экватора, для каждой точки на сфероидѣ получится вполнѣ опредѣленная точка на шарѣ, причемъ широты этихъ послѣднихъ точекъ будутъ, очевидно, приведенными широтами точекъ сфероида (см. § 29), а геодезическимъ линіямъ на *сфероидѣ будутъ* соотвѣтствовать дуги большихъ круговъ на шарѣ. При значительномъ разстояніи между точками такое преобразованіе приноситъ великую пользу, потому что позволяетъ рѣшеніе сфероидическихъ треугольниковъ замѣнить рѣшеніемъ сферическихъ. Необходимо еще замѣтить, что если тріангуляція составлена изъ ряда смежныхъ треугольниковъ, какъ показано на черт. 17, то послѣ вычисленія



Черт. 17.

по формуламъ сферической тригонометріи діагонали AQ, которая можетъ быть огромна, ея длина и прилежащіе углы получаются не для той или иной кривой вертикальныхъ сѣченій, а именно для геодезической линіи, соединяющей конечныя точки A и Q.

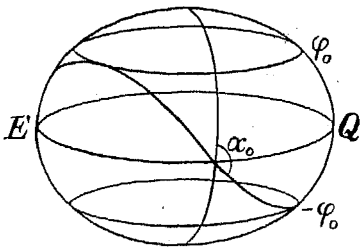
35. Ходъ геодезической линіи на сфероидѣ. Теорія геодезической линіи представляетъ много любопытнаго и подробно излагается въ спеціальныхъ трактатахъ; основное свойство геодезической линіи заключается въ томъ, что въ каждой ея точкѣ произведеніе синуса ея азимута на разстояніе точки отъ малой оси сфероида есть величина постоянная. Такимъ образомъ, если назвать азимуты геодезической линіи вообще черезъ α, а разстоянія соотвѣтствующихъ точекъ черезъ r (это есть очевидно радіусъ параллели), упомянутое свойство выразится формулою:

$$r \, . \sin \alpha = \text{постоянной}$$

Пользуясь этою формулою, легко прослѣдить ходъ геодезической линіи въ разныхъ частныхъ случаяхъ. Если азимутъ α

равенъ 0°, то и постоянная будетъ 0, т. е., каково бы ни было значеніе r, величина α должна оставаться равной 0° или 180°; это будетъ случай меридіана и, слѣдовательно, на сфероидѣ всѣ меридіаны суть геодезическія линіи. Параллели вообще очевидно не геодезическія линіи, потому что даже на шарѣ дуга параллели не есть кратчайшее разстояніе между двумя точками; изъ всѣхъ параллелей только одинъ экваторъ есть геодезическая линія, и для него вездѣ $r = a$, а $\alpha = 90^\circ$ или 270° и, слѣдовательно, постоянная равна $+a$ или $-a$.

Пусть геодезическая линія началась отъ нѣкоторой точки съ широтою φ и подъ азимутомъ α между 0° и 90° (черт. 18); переходя постепенно въ точки съ болѣе сѣверною широтою, т. е. съ меньшимъ r, величина $\sin\alpha$ должна увеличиваться, и это увеличиваніе будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока кривая не достигнетъ такой широты φ_0, гдѣ $\sin\alpha$ сдѣлается равнымъ единицѣ, а $\alpha = 90^\circ$. Такъ какъ $\sin\alpha$ не можетъ быть больше 1, то величина r не можетъ уже уменьшаться; съ другой стороны величина r не можетъ оставаться и постоянною, ибо тогда кривая пошла бы по параллели, что невозможно. Слѣдовательно, отъ точки съ широтою φ_0 величина r должна начать увеличиваться, а $\sin\alpha$ уменьшаться, т. е. геодезическая линія отъ этой точки повернетъ на югъ, и азимуты ея будутъ непрерывно увеличиваться (при $\alpha > 90^\circ$, $\sin\alpha$ съ увеличиваніемъ угла α уменьшается). Это непрерывное увеличиваніе азимута будетъ продолжаться до самаго экватора, гдѣ r достигнетъ наибольшей своей величины (a), $\sin\alpha$ — наименьшей, а α—наибольшей, напримѣръ α_0. Пройдя экваторъ, геодезическая линія вступитъ въ южный полусфероидъ, гдѣ r начнетъ непрерывно уменьшаться, а слѣдовательно $\sin\alpha$ непрерывно увеличиваться (само α уменьшаться), пока наконецъ $\sin\alpha$ не достигнетъ 1, азимутъ α — величины 90°, а r сдѣлается опять



Черт. 18.

наименьшимъ. Очевидно, геодезическая линія достигнетъ южной широты—φ_0, численно равной наибольшей сѣверной широтѣ φ_0. Послѣ этого r начнетъ опять увеличиваться, а $\sin\alpha$ уменьшаться (α остается меньше 90°). Въ нѣкоторой точкѣ геодезическая линія опять достигнетъ экватора и, перейдя въ сѣверную часть сфероида, начнетъ снова увеличивать свой азимутъ.

Продолжая такъ далѣе, легко заключить, что геодезическая линія будетъ послѣдовательно касаться двухъ предѣльныхъ параллелей съ широтами $+\varphi_0$ и $-\varphi_0$ и имѣть азимуты лишь въ 1-ой и 2-ой четвертяхъ. Величина предѣльныхъ широтъ и фигура отдѣльныхъ вѣтвей зависятъ отъ постоянной; если она равна 0, то, какъ было замѣчено выше, геодезическая линія обращается въ меридіанъ, а если она равна a—въ экваторъ; во всѣхъ остальныхъ случаяхъ геодезическая линія описываетъ на поверхности сфероида безконечное число оборотовъ, причемъ противоположныя и послѣдовательныя точки пересѣченія кривой съ экваторомъ отстоятъ не ровно на 180°, а приблизительно на $180°-180°.\mu\cos\varphi_0$, т. е. на величину, зависящую отъ сжатія сфероида μ и отъ широты предѣльныхъ параллелей φ_0.

Подобнымъ же образомъ можно разсмотрѣть ходъ геодезической линіи, начавшейся подъ азимутами въ 3-ей и 4-ой четвертяхъ. Существенной разницы между ними нѣтъ, потому что ходъ можно разсматривать и въ ту, и въ другую сторону.

Если вообразить безчисленное множество геодезическихъ линій, вышедшихъ изъ одной точки сфероида подъ всевозможными азимутами, то онѣ не пересѣкутся въ одной точкѣ (какъ дуги большихъ круговъ, вышедшія изъ одной точки на поверхности шара), а образуютъ, точками своихъ пересѣченій, вогнутую съ четырьмя выступающими углами кривую, похожую на обертку прямой линіи данной длины, скользящей своими концами по двумъ взаимно-перпендикулярнымъ прямымъ.

36. Вычисленіе малыхъ треугольниковъ на сфероидѣ. Стороны треугольниковъ тріангуляцій, получаемыя непосредственными наблюденіями, весьма рѣдко достигаютъ 100 верстъ, а обыкновенно имѣютъ не болѣе 25 или 30 верстъ; поэтому геодезическія линіи, соединяющія вершины такихъ треугольпиковъ, можно всегда считать не только эллиптическими дугами, но и просто дугами круговъ, а самые треугольники вычислять какъ сферическіе. Однако и примѣненіе формулъ сферической тригонометріи сопряжено здѣсь съ двоякаго рода неудобствами.

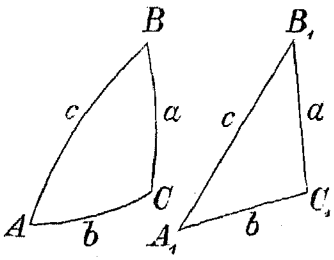
1) Базисъ (сторона тріангуляціи, получаемая непосредственнымъ измѣреніемъ) всегда выраженъ въ линейныхъ единицахъ (саженяхъ, метрахъ и т. п.) и точно также всѣ прочія стороны тріангуляціи нужно опредѣлить въ линейныхъ же единицахъ, между тѣмъ формулы сферической тригонометріи требуютъ выраженія сторонъ въ градусахъ, минутахъ и секундахъ; слѣдовательно, передъ началомъ и послѣ окончанія вычисленія треугольниковъ необходимо тратить время на превращеніе сторонъ изъ линейныхъ единицъ въ угловыя, и обратно.

2) Вслѣдствіе малости сторонъ (даже 100 верстъ составляютъ на поверхности Земли менѣе 1°) подъискиваніе логариомовъ ихъ тригонометрическихъ величинъ сопряжено съ значительными чисто практическими затрудненіями; каждый, кто занимался вычисленіями, знаетъ, какъ непріятно подъискивать *lg sin* или *lg tg* малыхъ угловъ.

Чтобы избѣжать указанныхъ неудобствъ, уже издавна, при вычисленіи тріангуляцій, отъ сторонъ треугольниковъ на поверхности сфероида переходили къ хордамъ, стягивающимъ вершины этихъ треугольниковъ, и рѣшали, вмѣсто сферическихъ, плоскіе треугольники, составленные соотвѣтствующими хордами. Но и этотъ способъ довольно сложенъ: стороны треугольниковъ необходимо переводить изъ дугъ въ хорды, а наблюденные горизонтальные углы, т. е. углы между вертикальными плоскостями на каждой вершинѣ, приходится переводить въ углы между хордами; для послѣдней цѣли необходимо вводить въ вычисленіе абсолютныя высоты отдѣльныхъ вершинъ, чего не нужно дѣлать даже при вычисленіи треугольниковъ, какъ сферическихъ.

Всѣ затрудненія были устранены знаменитымъ французскимъ геометромъ *Лежандромъ*, который въ своемъ мемуарѣ 1787 года доказалъ, что сферическіе треугольники съ малыми относительно радіуса шара сторонами можно, съ совершенно достаточнымъ приближеніемъ, вычислять какъ плоскіе; необходимо лишь углы даннаго сферическаго треугольника уменьшить на одну треть его сферическаго избытка.

Пусть данъ сферическій треугольникъ ABC (черт. 19), т. е. даны всѣ его углы и стороны a, b и c, выраженныя въ линейныхъ единицахъ. По этимъ тремъ сторонамъ построимъ плоскій треугольникъ $A_1B_1C_1$ и разсмотримъ, насколько плоскіе углы A_1, B_1 и C_1 отличаются отъ сферическихъ A, B и C. Возьмемъ, напримѣръ, углы A и A_1.



Черт. 19.

Называя радіусъ шара, на которомъ построенъ сферическій треугольникъ ABC, черезъ R, по основной формулѣ сферической тригонометріи имѣемъ:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\cdot\sin\frac{c}{R}\cdot\cos A$$

откуда

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{R} - \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}}{\sin\frac{b}{R}\cdot\sin\frac{c}{R}}$$

Вслѣдствіе малости сторонъ треугольника ABC относительно радіуса шара, можно воспользоваться разложеніями синусовъ и косинусовъ въ тригонометрическіе ряды:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Полагая, что стороны треугольника не болѣе 100 верстъ, можно ограничиться лишь членами *до* 5-ой степени; дѣйствительно, полагая, напримѣръ, $a = 100$ верстамъ, $R = 6\,000$ верстамъ, имѣемъ:

$$\frac{1}{1.2.3.4.5}\left(\frac{a}{R}\right)^5 = \frac{1}{120.60^5} \text{ что } < 0.000\,000\,000\,01$$

т. е. членъ 5-ой степени не можетъ произвести погрѣшности даже при вычисленіи десятизначными логариѳмами.

Такимъ образомъ, ограничиваясь членами до пятаго порядка, получимъ

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} - \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}\right)}{\left(\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3}\right)\left(\frac{c}{R} - \frac{c^3}{6R^3}\right)}$$

Сдѣлавъ перемноженіе на самомъ дѣлѣ, ограничиваясь вездѣ лишь членами четвертаго порядка и воспользовавшись формулою бинома Ньютона для отрицательнаго показателя, получимъ въ болѣе простомъ видѣ:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{24\,bcR^2} \qquad (a)$$

Съ другой стороны, плоскій треугольникъ $A_1B_1C_1$ даетъ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A_1$$

откуда:

$$\cos A_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad (b)$$

$$\sin^2 A_1 = 1 - \cos^2 A_1 = \frac{4\,b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4\,b^2c^2} =$$

$$= \frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{4\,b^2c^2} \qquad (c)$$

Сравнивъ выраженія (a) съ (b) и (c), получимъ:

$$\cos A = \cos A_1 - \frac{bc\,.\sin^2 A_1}{6\,R^2}$$

Но такъ какъ площадь P плоскаго треугольника $A_1B_1C_1$ можетъ быть представлена формулою

$$P = \frac{1}{2}\,bc\,.\sin A_1$$

то

$$\cos A = \cos A_1 - \frac{P}{3R^2}\sin A_1 \qquad (d)$$

Коэффиціентъ при $sin\, A_1$ очевидно очень малъ (въ его знаменателѣ стоитъ огромная величина R^2), поэтому разница между косинусами, а слѣдовательно и между самыми углами A и A_1 должна быть тоже очень мала. Означимъ ее черезъ ΔA, такъ что

$$A = A_1 + \Delta A \tag{e}$$

и

$$cos\, A = cos\, A_1\, cos\, \Delta A - sin\, A_1\, sin\, \Delta A$$

По малости угла ΔA можно положить, что

$$cos\, \Delta A = 1 \text{ и } sin\, \Delta A = \frac{\Delta A}{\varkappa}$$

слѣдовательно:

$$cos\, A = cos\, A_1 - \frac{\Delta A}{\varkappa} . sin\, A_1 \tag{f}$$

Сравнивая выраженіе (d) съ (e) и (f), получимъ:

$$A = A_1 + \varkappa . \frac{P}{3\, R^2}$$

Если произвести подобныя же разложенія для угловъ B и C, то, такъ какъ членъ $\varkappa . \frac{P}{3\, R^2}$ зависитъ лишь отъ площади треугольника $A_1 B_1 C_1$, а не отъ величины его угловъ, получились бы выраженія:

$$B = B_1 + \varkappa . \frac{P}{3\, R^2}$$

$$C = C_1 + \varkappa . \frac{P}{3\, R^2}$$

Сложивъ почленно всѣ три послѣднія уравненія и зная, что $A_1 + B_1 + C_1 = 180^\circ$, получимъ:

$$A + B + C = 180^\circ + \varkappa . \frac{P}{R^2} \tag{g}$$

Съ другой стороны извѣстно, что сумма угловъ сферическаго треугольника больше 180° на величину такъ называемаго сферическаго избытка ε, т. е.

$$A + B + C = 180^\circ + \varepsilon \tag{h}$$

Поэтому изъ ур. (g) и (h) выходитъ:

$$\varepsilon'' = \varkappa . \frac{P}{R^2} \tag{32}$$

а подставляя это ε въ вышеприведенныя выраженія для угловъ A, B и C, получимъ наконецъ:

$$\left.\begin{aligned} A - A_1 &= \frac{\varepsilon}{3} \\ B - B_1 &= \frac{\varepsilon}{3} \\ C - C_1 &= \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Итакъ всѣ углы плоскаго треугольника $A_1B_1C_1$ отличаются отъ соотвѣтствующихъ угловъ малаго сферическаго треугольника ABC съ тѣми же сторонами a, b и c на одинаковую величину, равную одной трети сферическаго избытка даннаго треугольника. Въ этомъ и состоитъ такъ называемая *теорема Лежандра.*

Формула (32) показываетъ еще, что площадь указаннымъ выше образомъ построеннаго плоскаго треугольника равна поверхности сферическаго треугольника, а такъ какъ площадь P плоскаго треугольника вообще вычисляется по формуламъ:

$$P = \frac{bc \,.\, \sin A_1}{2} \text{ или } P = \frac{b^2 \,.\, \sin A_1 \sin C_1}{2 \sin (A_1 + C_1)}$$

смотря по тому, даны ли въ немъ двѣ стороны и заключенный между ними уголъ или сторона и два прилежащіе угла, то для вычисленія сферическаго избытка малаго сферическаго треугольника, углы котораго можно считать почти равными соотвѣтствующимъ угламъ плоскаго, получаются формулы:

$$\varepsilon'' = [4]\, bc \sin A \quad \text{или} \quad \varepsilon'' = [4]\, b^2 \frac{\sin A \,.\, \sin C}{\sin (A + C)} \qquad (34)$$

въ которыхъ

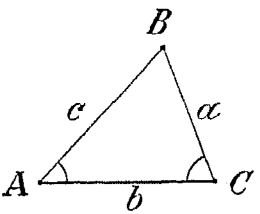
$$[4] = lg \frac{\varkappa}{2R^2}$$

Для шара величина R есть его радіусъ, а для сфероида $R = \sqrt{\rho p}$ (см. форм. 15) и зависитъ отъ широты; величина [4] дается въ таблицахъ, въ концѣ книги, и берется для средней широты изъ широтъ всѣхъ трехъ вершинъ треугольника. Въ выраженіяхъ для ε поставлены углы сферическіе (безъ значковъ внизу), а для P углы плоскіе (со значками); слѣдовало бы и въ ε поставить плоскіе углы, но они передъ вычислепіемъ неизвѣстны. Однако самъ избытокъ обыкновенно такъ малъ, что ошибка отъ такой замѣны нечувствительна, и формулы (34) можно считать практически точными.

37. Числовые примѣры. Для уясненія сущности примѣненія теоремы Лежандра къ практическимъ вычисленіямъ ниже приведены формулы и числовые примѣры рѣшенія небольшихъ сфероидическихъ треугольниковъ въ двухъ наиболѣе часто повторяющихся случаяхъ: 1) по одной сторонѣ и двумъ прилежащимъ угламъ и 2) по двумъ сторонамъ и углу между ними.

1-й случай. Даны сторона b и углы A и C; найти уголъ B и стороны a и c (черт. 20).

Формулы:



Черт. 20.

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon'' &= [4]\, b^2\, \frac{\sin A \sin C}{\sin (A+C)} \\
B &= (180^\circ + \varepsilon) - (A + C) \\
a &= b\,.\,\operatorname{cosec}\left(B - \frac{\varepsilon}{3}\right).\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{3}\right) \\
c &= b\,.\,\operatorname{cosec}\left(B - \frac{\varepsilon}{3}\right).\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{3}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Схема вычисленія:

Сфер. углы		Плоскіе углы.		lg сторонъ.		Вычисленія.			
$\frac{\varepsilon}{3}$	(9)			$lg \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{3}\right)$	(15)			[4]	(1)
								$lg\, b^2$	(2)
B	(10)	$B - \frac{\varepsilon}{3}$	(11)	$lg\, b$	—	$lg \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{3}\right)$	(16)	$lg \sin A$	(3)
								$lg \sin C$	(4)
A	—	$A - \frac{\varepsilon}{3}$	(12)	$lg\, a$	(19)	$lg\, b \operatorname{cosec}\left(B - \frac{\varepsilon}{3}\right)$	(18)	сумма	(6)
								$lg \sin (A+C)$	(5)
C	—	$C - \frac{\varepsilon}{3}$	(13)	$lg\, c$	(20)	$lg \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{3}\right)$	(17)	$lg\, \varepsilon''$	(7)
ε''	(8)	180°	(14)						

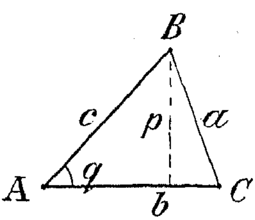
Цифры въ скобкахъ показываютъ порядокъ вычисленія. Послѣ выписки въ заранѣе приготовленную схему (на графленой бумагѣ) данныхъ величинъ $lg\, b$, A и C, показанныхъ чертою —, прежде всего вычисляютъ сферическій избытокъ ε (послѣдній столбецъ), а затѣмъ, глядя на формулы и послѣдовательныя числа въ скобкахъ, постепенно доводятъ вычисленіе до конца. Если все вычисленіе ведется семизначными логариѳмами, то сферическій избытокъ совершенно достаточно вычислить четырехзначными.

Примѣръ:

	Сфер. углы.	Плоскіе углы.	lg сторонъ.	Вычисленія.	
	0″.44		9.904 1996		2.0607
B	53°19′34″.01	53°19′33″.57	4.049 0100	9.990 8662	8.0980
A	78°17′25″.41	78°17′24″.97	4.135 6766	4.144 8104	9.9909
C	48°23′ 1″.90	48°23′ 1″.46	4.018 4853	9.873 6749	9.8737
	1″.32	180° 0′ 0″.00			0.0233
					9.9042
					0.1191

2-ой случай. Даны двѣ стороны b и c и уголъ A; найти сторону a и углы B и C (черт. 21).

Формулы:



Черт. 21.

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon'' = [4]\, bc \sin A \\
&\left.\begin{aligned} p &= c\,.\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{3}\right) \\ q &= c\,.\cos\left(A - \frac{\varepsilon}{3}\right) \end{aligned}\right\}\ \text{вспомог. величины} \\
&tg\left(C - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{p}{b-q} \\
&a = \frac{b-q}{\cos\left(C - \frac{\varepsilon}{3}\right)} \\
&B = (180^\circ + \varepsilon) - (A + C)
\end{aligned}\right\}\ \textbf{(36)}$$

Схема вычисленія:

Сфер. углы	Плоскіе углы.	lg сторонъ.	Вычисленія.		
$\frac{\varepsilon}{3}$ (6)			$lg \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{3}\right)$ (8)	$lg\, p$ (10)	[4] (1)
B (21)	$B - \frac{\varepsilon}{3}$ (20)	$lg\, b$ —	$lg\, c$ —	$lg\,(b-q)$ (14)	$lg\, bc$ (2)
A —	$A - \frac{\varepsilon}{3}$ (7)	$lg\, a$ (18)	$lg \cos\left(A - \frac{\varepsilon}{3}\right)$ (9)	$lg \cos\left(C - \frac{\varepsilon}{3}\right)$ (17)	$lg \sin A$ (3)
C (19)	$C - \frac{\varepsilon}{3}$ (16)	$lg\, c$ —	Δ (13)	$lg\, tg\left(C - \frac{\varepsilon}{3}\right)$ (15)	$lg\, \varepsilon''$ (4)
ε'' (5)	180° —		$lg\, b$ —		
			$lg\, q$ (11)	$lg\, b - lg\, q$ (12)	

При вычисленіи $lg\,(b - q)$ надо пользоваться логариѳмами суммъ и разностей; если уголъ A тупой, то необходимо обратить вниманіе на то, что величина q будетъ отрицательная, и вмѣсто подъискиванія въ таблицахъ разностей (subtraction) надо пріискивать въ таблицахъ суммъ (addition).

Пользуясь таблицами суммъ и разностей съ разнымъ числомъ десятичныхъ, надо помнить, что расположеніе ихъ различно: въ семизначныхъ таблицахъ *Цеха* (1821—1864) и въ большинствѣ другихъ аргументомъ служитъ разность данныхъ логариѳмовъ, и полученное по аргументу число надо прибавлять къ бо̀льшему слагаемому или вычитать изъ уменьшаемаго; въ таблицахъ же *Бремикера* (1804—1877) и нѣкоторыхъ другихъ аргументомъ служитъ дополненіе разности данныхъ логариѳмовъ (разность между меньшимъ и большимъ), и полученное число надо иногда прибавлять къ бо̀льшему слагаемому или уменьшаемому, а иногда вычитать изъ него.

Примѣры:

Вершины.	Углы сферическіе.	Углы плоск.	lg сторонъ въ саженяхъ.	Вычисленія.		
	0″.44			9.990 8662	4.009 3515	2.0607
B	53°19′34″.01	33.57	4.049 0100	4.018 4853	3.957 9352	8.0675
A	78°17′25″.41	24.97	4.135 6766	9.307 3967	9.822 2586	9.9909
C	48°23′ 1″.90	1.46	4.018 4853	— 91 0748	0.051 4163	0.1191
	180° 0′ 1″.32	0.00		4.049 0100		
				3.325 8820	0.723 1280	
	0″.15			9.669 7447	3.481 0405	2.0615
B	18°46′36″.43	36.29	4.120 2405	3.811 2958	4.276 7972	7.9315
A	152° 7′49″.73	49.57	4.282 2893	n 9.946 4592	9.994 5079	9.6697
C	9° 5′34″.30	34.14	3.811 2958	+ 156 5567	9.204 2433	9.6627
	180° 0′ 0″.46	0.00		4.120 2405		
				n 3.757 7550	0.362 4855	

38. Вычисленіе большихъ треугольниковъ на сфероидѣ. Когда стороны треугольниковъ весьма значительны, то вычисленіе ихъ по теоремѣ Лежандра дѣлается неточнымъ. Самъ *Лежандръ* въ своемъ мемуарѣ 1806 г., а затѣмъ *Гауссъ*, *Ганзенъ* и другіе ученые показали, что, продолжая указанное выше разложеніе тригонометрическихъ величинъ далѣе, а также принимая въ разсчетъ различную кривизну сторонъ сфероидическаго треугольника, можно получить формулы для приведенія и большого сфероидическаго треугольника къ плоскому съ тѣми же сторонами, но разности соотвѣтствующихъ угловъ оказываются уже не одинаковыми и, слѣдовательно, вычисленіе значительно усложняется. Наиболѣе удобны для практическаго примѣненія формулы, данныя датскимъ геодезистомъ *Андре* (1812—1893) въ его извѣстномъ описаніи первоклассной тріангуляціи въ Даніи (Den Danske Gradmaaling, 1867). При ограниченіи членами 4-го порядка, разности между углами сфероидическаго и соотвѣтствующаго ему плоскаго треугольника выражаются слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} A - A_1 &= \frac{\varepsilon}{3} - \frac{1}{60}\varepsilon . n\,(a^2 - m^2) + \frac{1}{12}\cdot\frac{\varepsilon}{n}\,(n_1 - n) \\ B - B_1 &= \frac{\varepsilon}{3} - \frac{1}{60}\varepsilon . n\,(b^2 - m^2) + \frac{1}{12}\cdot\frac{\varepsilon}{n}\,(n_2 - n) \\ C - C_1 &= \frac{\varepsilon}{3} - \frac{1}{60}\varepsilon . n\,(c^2 - m^2) + \frac{1}{12}\cdot\frac{\varepsilon}{n}\,(n_3 - n) \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

гдѣ A, B, C углы сфероидическаго, а A_1, B_1, C_1 соотвѣтствующіе углы плоскаго треугольника съ одинаковыми сторонами a, b, c; далѣе

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \qquad n = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{3}$$

$$\varepsilon = \varkappa n\,\frac{bc\sin A_1}{2}\left(1 + \frac{1}{8}\,nm^2\right)$$

Наконецъ, что касается n_1, n_2 и n_3, то это суть величины $\frac{1}{\rho p}$ для вершинъ A, B и C, и ихъ легко получить изъ таблицъ, приложенныхъ въ концѣ книги, для [1] и [2], такъ что

$$n_1 = \frac{[1]\,[2]}{\varkappa^2} \text{ для } A \qquad n_2 = \frac{[1]\,[2]}{\varkappa^2} \text{ для } B \qquad n_3 = \frac{[1]\,[2]}{\varkappa^2} \text{ для } C$$

Въ формулу для ε входитъ плоскій уголъ A_1, сперва неизвѣстный; поэтому надо сначала вмѣсто A_1 взять сферическій уголъ A и, получивъ приближенное значеніе ε, повторить вычисленіе.

Каждая разность сфероидическихъ и плоскихъ угловъ формулъ (37) состоитъ изъ трехъ членовъ: первый—это треть сферическаго избытка, т. е. то же, что въ формулахъ (33) для приведенія къ плоскимъ малыхъ сферическихъ треугольниковъ, второй представляетъ результатъ дальнѣйшаго разложенія тригонометрическихъ величинъ сторонъ, считаемыхъ однако дугами круговъ, а третій—это уже поправка за сфероидичность треугольника. Для большого треугольника на поверхности шара нужно было бы принимать въ разсчетъ лишь первые два члена, такъ какъ очевидно, что для шара $n_1 = n_2 = n_3 = n$.

Теоретическое изслѣдованіе показываетъ, что пока теорему Лежандра можно примѣнять для шара въ ея простѣйшемъ видѣ, т. е. уменьшая всѣ три угла только на треть сферическаго избытка, до тѣхъ поръ нѣтъ надобности принимать въ разсчетъ и сфероидичность земной поверхности; если же треугольникъ такъ великъ, что простое уменьшеніе на треть избытка неточно даже для шара, то надо принимать въ разсчетъ и сфероидичность поверхности.

Выше не разъ приходилось упоминать слова «малый» и «большой» треугольники, безъ соотвѣтствующихъ поясненій. Добавочные члены формулъ (37) даютъ ключъ къ такому различенію. Если для даннаго треугольника эти добавочные члены меньше предѣльной точности вычисленія угловъ, то треугольникъ можно считать «малымъ» и, вычисляя его какъ плоскій, уменьшать всѣ углы только на треть избытка; если же они больше предѣльной точности вычисленія угловъ, то треугольникъ будетъ «большой», и, вычисляя его какъ плоскій, надо примѣнять формулы (37) съ добавочными членами. Такъ какъ тріангуляціи вычисляются въ настоящее время вообще не точнѣе какъ до $0''.01$ (пользуясь семизначными логариѳмическими таблицами), то въ каждомъ данномъ случаѣ весьма легко узнать, слѣдуетъ ли примѣнять формулы (37) или можно довольствоваться простымъ уменьшеніемъ угловъ на треть избытка: стоитъ лишь вычислить добавочные члены и посмотрѣть, составятъ ли они величину бо̀льшую $0''.01$ или нѣтъ.

Вообще можно сказать, что, при точности вычисленій до $0''.01$, теорема Лежандра въ ея простѣйшемъ видѣ примѣнима съ полною безопасностью для треугольниковъ со сторонами до 200 верстъ, а если треугольникъ очень узкій (при вычисленіи полярныхъ координатъ, см. § 133), то и со сторонами гораздо бо̀льшими. Такимъ образомъ формулы (37) приведены здѣсь не для того, чтобы ими пользоваться (онѣ точны для треугольниковъ со сторонами до 1 500 верстъ) на самомъ дѣлѣ, а лишь для того, чтобы убѣдить читателя, что простое уменьшеніе угловъ на одну треть сферическаго избытка совершенно достаточно во всѣхъ встрѣчающихся на практикѣ случаяхъ.

39. Числовой примѣръ. Наибольшій изъ треугольниковъ, составленныхъ до настоящаго времени дѣйствительно наблюденными направленіями, образовался при геодезическомъ соединеніи Алжира съ Испаніею. Вотъ его элементы:

Названія вершинъ.	Набл. углы.	Логар. сторонъ въ саженяхъ.	Широты вершинъ.
Фильхаусенъ (A) .	$78°43'39''.20$	5.102 0088	$35°\ 0'35''$
Муласенъ (B) . .	$22°28'45''.27$	4.692 8200	$37°\ 3'17''$
Сабиха (C)	$78°48'45''.56$	5.102 1369	$35°39'37''$

Съ этими данными:

$$\begin{aligned} a^2 &= 15\,996\,230\,000 \text{ кв. с.} \\ b^2 &= \ \ 2\,430\,190\,000 \ \text{»} \ \text{»} \\ c^2 &= 16\,005\,670\,000 \ \text{»} \ \text{»} \\ \hline m^2 &= 11\,477\,363\,000 \text{ кв. с.} \end{aligned}$$

По геодезическимъ таблицамъ, съ данными географическими широтами вершинъ, находимъ:

$$\begin{aligned} \text{для } A \ldots n_1 &= 1\,121\,587.10^{-19} \\ \text{» } \ B \ldots n_2 &= 1\,121\,068.10^{-19} \\ \text{» } \ C \ldots n_3 &= 1\,121\,423.10^{-19} \\ \hline n &= 1\,121\,359.10^{-19} \end{aligned}$$

Далѣе, послѣ двухъ послѣдовательныхъ приближеній получаемъ:

$$\varepsilon = 70''.745\,18$$

и, слѣдовательно, по формуламъ (37):

$$A - A_1 = 23''.581\,73 - 0''.000\,60 + 0''.001\,20 = 23''.582\,33$$

$$B - B_1 = 23''.581\,73 + 0''.001\,20 - 0''.001\,53 = 23''.581\,40$$

$$C - C_1 = 23''.581\,73 - 0''.000\,60 + 0''.000\,34 = 23''.581\,47$$

Такимъ образомъ съ точностью до $0''.01$, т. е. въ предѣлахъ *точности вычисленій съ семизначными логариѳмами*, поправки всѣхъ трехъ угловъ *оказываются одинаковыми*, и самый треугольникъ можно вычислять, пользуясь простымъ правиломъ Лежандра — уменьшивъ углы только на треть сферическаго избытка.

Весьма поучительныя замѣчанія о вычисленіи большихъ треугольниковъ на сфероидѣ можно прочитать въ рѣдкомъ сочиненіи *графа Канъете дель-Пинаръ*: Algunas consideraciones sobre el Enlace geodésico y astronómico de Argelia con Espana (Madrid, 1894). Въ этомъ сочиненіи графъ справедливо порицаетъ пріемы вычисленій, примѣненные французскими и испанскими геодезистами при обработкѣ наблюденій на вершинахъ знаменитаго геодезическаго четыреугольника, связавшаго Испанію съ Алжиромъ въ 1879 году.

III.

О тріангуляціи вообще.

40. Значеніе тріангуляціи для съемокъ. Подъ тріангуляціею разумѣютъ совокупность полевыхъ работъ и вычисленій, имѣющихъ цѣлью по возможности точное опредѣленіе относительнаго положенія точекъ на земной поверхности. Такое опредѣленіе точекъ необходимо какъ для градусныхъ измѣреній, производящихся только ради изысканій о видѣ уровенной поверхности Земли, такъ и для нуждъ точныхъ топографическихъ съемокъ. Общее понятіе о тріангуляціяхъ, производящихся для изысканія вида уровенной поверхности Земли, дано въ § 4; въ этихъ случаяхъ тріангуляціи представляютъ ряды смежныхъ треугольниковъ, простирающіеся вдоль меридіана, по параллели или въ любомъ косвенномъ направленіи. Что касается тріангуляцій, производящихся для нуждъ точныхъ топографическихъ съемокъ, то онѣ представляютъ обыкновенно сплошную сѣть треугольниковъ, покрывающую все пространство, подлежащее будущей съемкѣ.

Вслѣдствіе медленности производства точныхъ топографическихъ работъ, пространство, подлежащее съемкѣ, разбивается на небольшіе участки, раздаваемые отдѣльнымъ лицамъ и снимаемые послѣдовательно въ продолженіи многихъ лѣтъ; только по окончаніи работъ на отдѣльныхъ участкахъ съемочные брульоны сводятся въ одну общую карту. Если бы каждый съемщикъ работалъ независимо отъ другихъ, то, отъ неизбѣжныхъ погрѣшностей графическихъ построеній на бумагѣ, по границамъ участковъ образовались бы несводки, уничтоженіе которыхъ, помимо значительной потери времени при перерисовкѣ, неизбѣжно исказило бы и самую съемку, сдѣланную первоначально съ возможною точностью. Вотъ почему прежде, чѣмъ начинать точную съемку, на предполагаемомъ къ съемкѣ пространствѣ заранѣе опредѣляютъ положеніе цѣлой системы точекъ, называемыхъ *основными* или *опорными*. Для каждаго съемочнаго участка принято опредѣлять 3 или 4 опорныя точки, расположенныя болѣе или менѣе равномѣрно по всему снимаемому пространству. Когда координаты такихъ опорныхъ точекъ вычислены, то самыя точки наносятъ на мензульные планшеты, и каждый отдѣльный съемщикъ начинаетъ свою работу отъ этихъ опорныхъ точекъ, какъ бы съ концовъ дѣйствительно измѣренныхъ базисовъ.

Опорныя точки служатъ началомъ для составленія геометрической сѣти и представляютъ нѣчто въ родѣ канвы, обезпечивающей правильность зарисовки всѣхъ подробностей; онѣ же служатъ и для повѣрки всѣхъ графическихъ построеній на бумагѣ. Ошибки графическихъ построеній могутъ накопляться лишь на пространствахъ между опорными точками; съ каждой слѣдующей опорной точки работа начинается опять безошибочно. Кромѣ того, такъ какъ координатами опорныхъ точекъ служатъ обыкновенно ихъ географическія широты и долготы, то эти точки даютъ возможность непосредственно сводить отдѣльные съемочные участки въ одну общую географическую карту.

Опорныя точки могутъ быть *астрономическія*, опредѣляемыя исключительно астрономическими наблюденіями, и *тригонометрическія*, получаемыя тріангуляціею, причемъ, начиная отъ одной или нѣсколькихъ астрономическихъ точекъ, широты и долготы всѣхъ прочихъ получаются изъ вычисленій тріангуляціи. Конечно, изъ астрономическихъ наблюденій выводятся прямо *абсолютныя* положенія точекъ (ихъ широты и долготы), тогда какъ изъ тріангуляцій получаются положенія *относительныя* (разности широтъ и разности долготъ), но зато, если въ числѣ тригонометрическихъ точекъ имѣется хоть одна астрономическая, то абсолютное положеніе всѣхъ прочихъ выводится несравненно *скорѣе* и *точнѣе*, чѣмъ если бы всѣ точки были астрономическія.

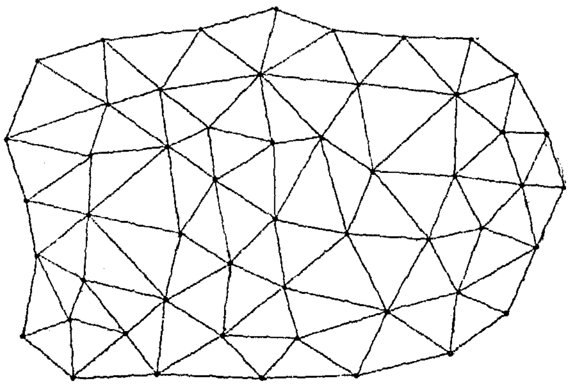
Что опредѣленіе тригонометрическихъ точекъ производится скорѣе опредѣленія астрономическихъ, видно изъ слѣдующаго. Наблюденія на тріангуляціяхъ могутъ производиться какъ въ ясную, такъ и въ пасмурную погоду и притомъ, по существу, просты и исполняются небольшими и доступными для пониманія каждаго инструментами; астрономическія же наблюденія могутъ производиться только въ ясныя ночи, требуютъ перевозки большихъ и сложныхъ инструментовъ, и сами наблюдатели должны обладать обширными познаніями и долголѣтнею подготовкою. Вообще одинъ астрономъ въ теченіи года (занимаясь лѣтомъ и осенью наблюденіями, а зимою и весною вычисленіями) въ рѣдкихъ случаяхъ опредѣляетъ болѣе 10 точекъ, тріангуляторъ же, въ тотъ же промежутокъ времени, легко опредѣляетъ положеніе 50 опорныхъ точекъ.

Чтобы понять, почему положеніе тригонометрическихъ точекъ оказывается точнѣе положенія астрономическихъ, достаточно вспомнить, что самые совершенные угломѣрные инструменты въ настоящее время даютъ углы съ погрѣшностями около $0''.5$. Такая ошибка въ широтѣ (радіусъ угла около 6 000 верстъ) составляетъ на поверхности Земли болѣе 7 саженей; та же ошибка въ углахъ треугольниковъ, стороны которыхъ рѣдко превосходятъ 60 верстъ, сдѣлаетъ положеніе точки ошибочнымъ лишь на нѣсколько сотыхъ сажени.

Къ предъидущему необходимо еще добавить, что измѣреніе вертикальныхъ угловъ на тріангуляціи позволяетъ, кромѣ широтъ и долготъ, опредѣлять высоты опорныхъ точекъ, т. е. ихъ третью координату; астрономическія же наблюденія вовсе не даютъ высотъ, и для ихъ полученія надо производить отдѣльныя работы, съ новою затратою времени и труда.

Такимъ образомъ положеніе опорныхъ точекъ для точныхъ инструментальныхъ съемокъ всего проще и надежнѣе получается изъ тріангуляцій. Конечно, тріангуляціи позволяютъ опредѣлять лишь ихъ относительное положеніе, а для составленія будущей карты все же необходимо знать и абсолютное положеніе опорныхъ точекъ. Но для этого въ каждой тріангуляціи достаточно имѣть хоть одну астрономическую точку; отъ ошибки въ положеніи этой точки всѣ вычисленныя по ней тригонометрическія точки будутъ тоже нѣсколько ошибочны, но такъ какъ *относительное* положеніе опорныхъ точекъ будетъ весьма точно, то и вся будущая съемка можетъ быть исполнена очень вѣрно.

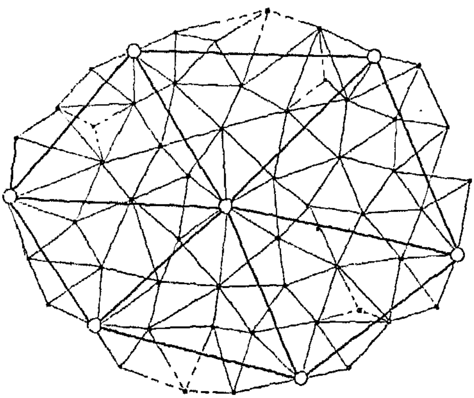
41. Треугольники разныхъ классовъ. Чтобы покрыть извѣстное пространство необходимымъ для съемки числомъ опорныхъ точекъ, эти послѣднія должны быть достаточно часты. Напримѣръ, инструментальныя съемки въ Европейской Россіи производятся участками, заключающими отъ 70 до 120 кв. верстъ, и на каждомъ участкѣ должны быть 3—4 опорныя точки. При равномѣрномъ распредѣленіи этихъ точекъ, на каждую изъ нихъ прійдется около 25 кв. вер. и, слѣдовательно, линейное разстояніе между ними должно быть около 5 верстъ. Тріангуляцію, которая позволила бы опредѣлить точнѣйшимъ образомъ столь близкія точки, можно составить двояко: 1) покрыть всю мѣстность однообразною сѣтью мелкихъ треугольниковъ, стороны которыхъ имѣли бы въ среднемъ около пяти верстъ (черт. 22), и 2) составить сперва сѣть изъ возможно большихъ треугольниковъ, и въ промежуткахъ опредѣлить систему мелкихъ (черт. 23).



Черт. 22.

Ниже (см. формулу 39) будетъ доказано, что ошибки вычисленныхъ сторонъ возрастаютъ пропорціонально квадратному корню изъ числа промежуточныхъ треугольниковъ, и потому, при условіи, что наблюденія на всѣхъ точкахъ произведены съ одинаковою точностью, сѣть крупныхъ треугольниковъ оказывается выгоднѣе. При такой системѣ (черт. 23), помимо большей точности, является и значительное сбереженіе труда и времени. Дѣйствительно, только наблюденія на главныхъ точкахъ должны быть произведены съ возможною тщательностью; на промежуточныхъ же точкахъ можно наблюдать менѣе совершенными инструментами и въ болѣе короткое время: ошибки въ ихъ положеніи не опасны, потому что онѣ не распространяются на *всѣ* слѣдующія точки, а остаются лишь внутри большихъ треугольниковъ, и отъ каждой послѣдующей главной точки второстепенныя будутъ опредѣлены опять весьма точно.

Такимъ образомъ, и съ цѣлью получить бóльшую точность опредѣленія всѣхъ точекъ, и съ цѣлью облегченія и ускоренія работы, тригонометрическая сѣть составляется изъ двухъ различныхъ системъ треугольниковъ: главныхъ, большихъ или *перво-классныхъ* (означенныхъ на чертежѣ 23 толстыми линіями) и второстепенныхъ, малыхъ или *второ-классныхъ* (означенныхъ тонкими линіями).



Черт. 23.

Преслѣдуя тѣ же цѣли далѣе, въ нѣкоторыхъ заграничныхъ тріангуляціяхъ раздѣляютъ треугольники на многіе классы: послѣ перво-классныхъ, очень большихъ и наблюденныхъ весьма точно, прокладываютъ сѣть второклассныхъ, меньшихъ и менѣе точныхъ, затѣмъ внутри второклассныхъ прокладываютъ треугольники 3-го, 4-го и т. д. классовъ, исполняя ихъ все скорѣе и менѣе совершенными инструментами. Общая точность всей работы отъ этого нисколько не страдаетъ, а скорость увеличивается чрезвычайно. Дѣленіе треугольниковъ на многіе классы вызывается тѣмъ обстоятельствомъ, что въ нѣкоторыхъ странахъ инструментальныя съемки производятся въ весьма крупномъ масштабѣ, и отдѣльные съемочные участки заключаютъ, напримѣръ, не болѣе 1 кв. версты. Опорныя точки для такихъ съемокъ должны отстоять другъ отъ друга не далѣе полуверсты, и непосредственный переходъ отъ большихъ первоклассныхъ треугольниковъ къ мелкимъ былъ бы затруднителенъ, а огромное число мелкихъ треугольниковъ внутри одного большого сдѣлало бы эти мелкіе треугольники недостаточно точными. *Словомъ, начало подраздѣленія треугольниковъ на многіе классы вызывается въ этихъ случаяхъ тѣми же соображеніями, которыми вызывается и раздѣленіе ихъ только на два класса.*

У насъ въ Россіи инструментальныя съемки производятся въ довольно мелкомъ масштабѣ, и потому наши тріангуляціи, пролагаемыя для доставленія опорныхъ точекъ съемкамъ, составляются обыкновенно только изъ треугольниковъ первоклассныхъ и второклассныхъ. Въ этихъ треугольникахъ, для повѣрки наблюденій, измѣряютъ всѣ три угла и, слѣдовательно, на всѣхъ ихъ вершинахъ производятъ самостоятельныя наблюденія. Однако встрѣчаются точки, съ которыхъ невозможно производить наблюденій, но которыя могли бы служить превосходными опорными точками для съемокъ: кресты церквей, дымовыя трубы заводовъ и отдѣльныхъ зданій, флагштоки, вѣхи, укрѣпленныя на одиноко стоящихъ деревьяхъ, и т. п. Такія точки *позволяютъ сокращать общее число мѣстъ стоянія инструмента и потому обязательно наблюдаются съ окружающихъ точекъ 1-го и 2-го классовъ и называются у насъ точками 3-го класса.* Треугольники, образованные направленіями на точки 3-го класса, называются *третьеклассными.*

Чтобы на чертежѣ легко различать треугольники разныхъ классовъ, принято изображать стороны первоклассныхъ треугольниковъ сплошными толстыми линіями, стороны второклассныхъ сплошными тонкими линіями, а стороны третьеклассныхъ, наблюденныхъ лишь въ одномъ направленіи,—тонкими линіями, проведенными на половину (отъ точки наблюденія) сплошь и на половину (къ наблюдаемой) пунктиромъ.

Итакъ русскія тріангуляціи, прокладываемыя для доставленія опорныхъ точекъ съемщикамъ, составляются изъ треугольниковъ трехъ родовъ: 1) *первоклассныхъ*, съ возможно большими сторонами (20 и болѣе верстъ) и на вершинахъ которыхъ наблюденія производятся самыми лучшими и точными инструментами; 2) *второклассныхъ*, длина сторонъ которыхъ опредѣляется густотою сѣти опорныхъ точекъ (около пяти верстъ), и на вершинахъ которыхъ углы измѣряются малыми, менѣе совершенными инструментами, но зато очень скоро, и 3) *третьеклассныхъ*, составляемыхъ направленіями съ точекъ 1-го и 2-го классовъ, наблюденныхъ лишь въ одну сторону, и въ которыхъ измѣрены только два угла. Повѣркою наблюденій треугольниковъ первыхъ двухъ классовъ служатъ измѣренія всѣхъ трехъ угловъ въ каждомъ треугольникѣ и измѣреніе направленій взаимно-пересѣкающихся діагоналей, а треугольниковъ третьяго класса—наблюденія на ту же точку съ трехъ и болѣе окружающихъ.

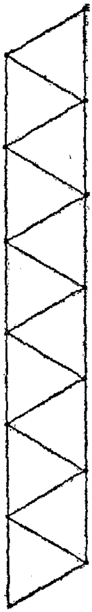
Необходимо прибавить, что наблюденія на точкахъ перваго класса производятся обыкновенно столь тщательно, что ряды смежныхъ первоклассныхъ треугольниковъ могутъ служить для цѣлей градуснаго измѣренія. Такъ, напримѣръ, тріангуляціи, проложенныя генераломъ *Теннеромъ* въ западной полосѣ Россіи для обезпеченія съемочныхъ планшетовъ опорными точками, заключали въ себѣ прекрасные ряды первоклассныхъ треугольниковъ, которые и вошли затѣмъ какъ въ большое русское градусное измѣреніе по меридіану, такъ и въ градусное измѣреніе по параллели 52° сѣверной широты.

42. Расположеніе треугольниковъ въ первоклассныхъ тріангуляціяхъ. При составленіи системы первоклассныхъ треугольниковъ на обширномъ пространствѣ можно или покрыть все это пространство сплошною тріангуляціею, какъ показано на черт. 23, или же расположить первоклассные треугольники отдѣльными рядами, заполнивъ промежутки между ними треугольниками второклассными и третьеклассными. Въ первомъ случаѣ образуется сплошная *сѣть первоклассныхъ треугольниковъ*, во второмъ—отдѣльныя *цѣпи первоклассныхъ треугольниковъ*. Имѣя въ виду медленность работъ на первоклассныхъ тріангуляціяхъ и значительность издержекъ на ихъ производство, сплошныя сѣти первоклассныхъ треугольниковъ прокладывались лишь въ небольшихъ странахъ; въ Европѣ, напримѣръ, сплошныя сѣти проложены только въ Великобританіи, Италіи и нѣкоторыхъ мелкихъ государствахъ. Въ болѣе обширныхъ странахъ, напримѣръ во Франціи, Австріи и Россіи первоклассные треугольники образуютъ обыкновенно отдѣльныя цѣпи, пересѣкающіяся между собою въ различныхъ направленіяхъ. Конечно, второклассныя точки, лежащія въ промежуткахъ между цѣпями первоклассныхъ треугольниковъ, опредѣляются менѣе точно, чѣмъ второклассныя же точки, лежащія внутри самихъ цѣпей, но все же положеніе ихъ остается достаточно надежнымъ для цѣлей съемки. Необходимо лишь, чтобы разстоянія между цѣпями были не очень велики. Зато работы при расположеніи первоклассныхъ треугольниковъ въ видѣ отдѣльныхъ цѣпей, какъ полевыя, такъ и вычислительныя, чрезвычайно упрощаются и ускоряются. Отчетныя карты первоклассныхъ тріангуляцій Франціи, Испаніи и Остъ-Индіи представляютъ очень правильныя цѣпи треугольниковъ, расположенныя по меридіанамъ и по параллелямъ и образующія почти квадраты со сторонами отъ 150 до 400 верстъ.

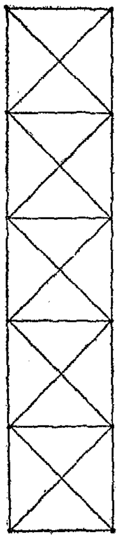
Что касается второклассныхъ треугольниковъ, то они составляютъ обыкновенно сплошную сѣть, хотя бываютъ случаи, когда вслѣдствіе мѣстныхъ препятствій и ихъ прокладываютъ въ видѣ отдѣльныхъ цѣпей, примыкающихъ къ цѣпямъ первоклассныхъ треугольниковъ.

Первоклассная цѣпь можетъ состоять или изъ ряда смежныхъ *простыхъ треугольниковъ* (большинство цѣпей Западной Европы и Россіи, чертежъ 24), или изъ ряда смежныхъ *четыреугольниковъ* съ двумя пересѣкающимися діагоналями въ каждомъ (новѣйшія тріангуляціи въ Соединенныхъ Штатахъ Сѣверной Америки, черт. 25), или же наконецъ изъ ряда смежныхъ *многоугольниковъ*, образующихъ такъ называемыя *центральныя системы* (нѣкоторыя цѣпи въ Западной Европѣ и большинство цѣпей въ Остъ-Индіи, черт. 26). Цѣпь простыхъ треугольниковъ требуетъ наименьшаго труда, какъ въ полѣ, такъ и вычислительнаго, цѣпь четыреугольниковъ опредѣляетъ точки съ наибольшею точностью, но зато требуетъ больше времени, наконецъ цѣпь многоугольниковъ сложнѣе предъидущихъ, менѣе точна, чѣмъ цѣпь четыреугольниковъ, но первоклассныя точки обнимаютъ наибольшее пространство.

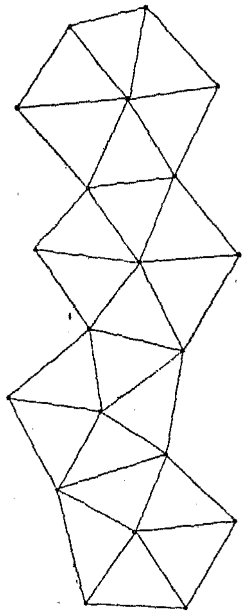
У насъ въ Россіи почти исключительно ведутся цѣпи изъ простыхъ треугольниковъ, и потому въ нижеслѣдующихъ изысканіяхъ о видѣ и размѣрахъ треугольниковъ разсматриваются лишь такія простыя цѣпи. Впрочемъ, правила, выработанныя для нихъ, въ общихъ чертахъ могутъ быть приложены какъ



Черт. 24.



Черт. 25.



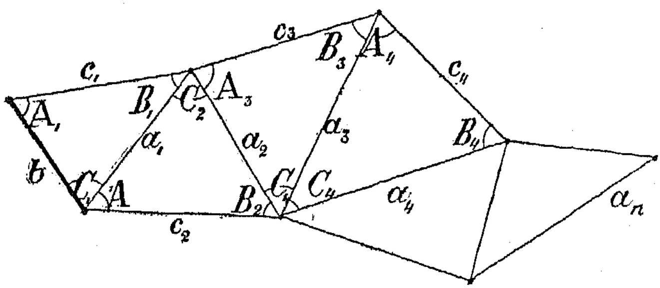
Черт. 26.

къ другимъ цѣпямъ, такъ и къ сплошнымъ сѣтямъ треугольниковъ.

43. Ошибки вычисленныхъ сторонъ. Для вычисленія всѣхъ сторонъ треугольниковъ, составляющихъ непрерывную цѣпь (или сѣть), достаточно знать длину только одной стороны и всѣ углы треугольниковъ. Сторона, получаемая непосредственнымъ измѣреніемъ, называется *базисомъ*, но весьма часто базисъ не есть сторона первокласснаго треугольника, а только связанъ съ таковою особою вспомогательною тріангуляціею. Связанная съ базисомъ сторона первокласснаго треугольника, служащая затѣмъ началомъ для вычисленія всей тріангуляціи, называется *основною стороною*.

Въ каждомъ треугольникѣ различаютъ *стороны связывающія*, служащія для вычисленія послѣдующихъ треугольниковъ, и *сторону промежуточную*, не входящую въ такое вычисленіе. Соотвѣтственно этому *связывающими углами* называютъ углы, лежащіе противъ связывающихъ сторонъ, и *промежуточнымъ угломъ*—уголъ, лежащій противъ промежуточной стороны.

На чертежѣ 27-мъ b есть основная сторона тріангуляціи, a_1, a_2, a_3 .... —связывающія, а c_1, c_2, c_3 .... — промежуточныя



Черт. 27.

стороны отдѣльныхъ треугольниковъ. Углы A_1, B_1, A_2, B_2.... суть связывающіе, и C_1, C_2 .... — промежуточные.

Хотя треугольники на поверхности Земли суть сфероидическіе, но въ предстоящемъ изслѣдованіи ошибокъ вычисленныхъ сторонъ они для простоты считаются плоскими, потому что это изслѣдованіе справедливо для треугольниковъ, расположенныхъ на любой поверхности.

По чертежу 27, по правиламъ прямолинейной тригонометріи имѣемъ:

$$a_1 = b.\frac{\sin A_1}{\sin B_1} \qquad c_1 = b.\frac{\sin C_1}{\sin B_1}$$

$$a_2 = b.\frac{\sin A_1 \sin A_2}{\sin B_1 \sin B_2} \qquad c_2 = b.\frac{\sin A_1 \sin C_2}{\sin B_1 \sin B_2}$$

$$a_3 = b.\frac{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3}{\sin B_1 \sin B_2 \sin B_3} \qquad c_3 = b.\frac{\sin A_1 \sin A_2 \sin C_3}{\sin B_1 \sin B_2 \sin B_3}$$

. . . .

$$a_n = b.\frac{\sin A_1 \sin A_2 \ldots \sin A_n}{\sin B_1 \sin B_2 \ldots \sin B_n} \qquad c_n = b.\frac{\sin A_1 \sin A_2 \ldots \sin C_n}{\sin B_1 \sin B_2 \ldots \sin B_n}$$

Изъ этихъ формулъ легко видѣть, что въ выраженія всѣхъ сторонъ цѣпи входятъ почти только связывающіе углы (A и B); въ выраженія связывающихъ сторонъ (a) промежуточные углы (C) не входятъ вовсе, а въ выраженія промежуточныхъ сторонъ (c) они входятъ лишь по одному разу. На этомъ основаніи можно ограничиться изслѣдованіемъ выраженія стороны a_n, представляющаго достаточно общую формулу для вычисленія любой стороны тріангуляціи.

Такъ какъ всѣ вычисленія тріангуляціи производятся при помощи логариѳмовъ, то, взявъ логариѳмы обѣихъ частей уравненія, для a_n получаемъ:

$$lg\, a_n = lg\, b + (lg \sin A_1 - lg \sin B_1) +$$
$$+ (lg \sin A_2 - lg \sin B_2) + \ldots \qquad (a)$$

Если бы сторона b и всѣ углы $A_1, B_1, A_2, B_2 \ldots$ были извѣстны совершенно точно, то по этой формулѣ можно было бы вычислить сторону a_n съ тою точностью, какую только допускаютъ логариѳмическія таблицы. На самомъ дѣлѣ какъ сторона b, такъ и всѣ углы, входящіе въ эту формулу, извѣстны изъ наблюденій, т. е. лишь съ большимъ или меньшимъ приближеніемъ къ истинѣ; называя ошибки въ логариѳмѣ стороны и въ углахъ соотвѣтствующими буквами со знакомъ Δ, можно, по форм. (a), составить слѣдующее выраженіе:

$$lg\, a_n + \Delta\, lg\, a_n = lg\, b + \Delta\, lg\, b + \{lg \sin(A_1 + \Delta A_1) -$$
$$- lg \sin(B_1 + \Delta B_1)\} + \{lg \sin(A_2 + \Delta A_2) -$$
$$- lg \sin(B_2 + \Delta B_2)\} + \ldots \qquad (b)$$

но

$$lg \sin(A_1 + \Delta A_1) = lg \sin A_1 + \alpha_1 . \Delta A_1$$
$$lg \sin(B_1 + \Delta B_1) = lg \sin B_1 + \beta_1 . \Delta B_1$$
. . . .

гдѣ α_1, β_1 .... суть перемѣны логариѳмовъ синусовъ соотвѣтствующихъ угловъ, при измѣненіи самихъ угловъ на $1''$, а ΔA_1, $\Delta B_1 \ldots$ предполагаются выраженными въ секундахъ. Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (b) и вычитая изъ него почленно уравненіе (a), получимъ:

$$\begin{aligned}\Delta\, lg\, a_n = \Delta\, lg\, b + (\alpha_1 . \Delta A_1 - \beta_1 \Delta B_1) + \\ + (\alpha_2 \Delta A_2 - \beta_2 \Delta B_2) + \ldots\end{aligned} \tag{38}$$

Ошибка основной стороны b обыкновенно такъ мала, что ею, по сравненію съ прочими ошибками, происходящими отъ невѣрности угловъ, можно почти всегда пренебречь. Означивъ еще, для краткости, ошибку $\alpha.\Delta A - \beta.\Delta B$, происходящую отъ каждаго треугольника, черезъ δ, получимъ:

$$\Delta\, lg\, a_n = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$$

или по правиламъ теоріи ошибокъ

$$\Delta\, lg\, a_n = \pm \sqrt{\delta_1^{\,2} + \delta_2^{\,2} + \ldots + \delta_n^{\,2}}$$

Полагая, что ошибки отдѣльныхъ треугольниковъ одинаковы, т. е. что $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \ldots$, для ошибки стороны n-аго треугольника получимъ выраженіе:

$$\Delta\, lg\, a_n = \pm \delta . \sqrt{n} \tag{39}$$

т. е. ошибка въ логариѳмѣ какой нибудь стороны равна средней ошибкѣ, происходящей отъ одного треугольника, умноженной на корень квадратный изъ числа треугольниковъ, или, другими словами, *ошибка вычисленной стороны возрастаетъ пропорціонально корню квадратному изъ числа треугольниковъ, отдѣляющихъ эту сторону отъ основной стороны или отъ базиса.*

Вотъ почему большіе треугольники выгоднѣе малыхъ: чтобы проложить тріангуляцію на извѣстномъ пространствѣ, число большихъ треугольниковъ всегда меньше, чѣмъ число малыхъ.

44. Ошибка геометрической связи. Разсмотримъ теперь, чему равна величина δ^2 формулы (39) и отъ чего она зависитъ. Для каждаго отдѣльнаго треугольника

$$\delta^2 = (\alpha . \Delta A - \beta . \Delta B)^2 \tag{a}$$

гдѣ α и β суть перемѣны логариѳмовъ синусовъ, а ΔA и ΔB— ошибки угловъ A и B. Ошибки ΔA и ΔB не суть просто ошибки измѣренныхъ угловъ A и B, потому что въ каждомъ первоклассномъ треугольникѣ измѣряются всѣ три угла A, B и C и исправляются затѣмъ одною третью ошибки этого треугольника (см. § 119). Такъ какъ ошибкою треугольника называютъ разность между суммою измѣренныхъ угловъ и суммою теоретическою ($180° + \varepsilon$, гдѣ ε сферическій избытокъ треугольника), то, называя непосредственно измѣренные углы черезъ A_0, B_0 и C_0, а углы, входящіе въ вычисленіе тріангуляціи, т. е. исправленные одною третью ошибки треугольника, по прежнему черезъ A, B и C, имѣемъ, напримѣръ, для угла A:

$$A = A_0 - \frac{A_0 + B_0 + C_0 - (180° + \varepsilon)}{3} \tag{b}$$

Означая ошибки значкомъ Δ, получимъ:

$$A + \Delta A = A_0 + \Delta A_0 - \\ - \frac{A_0 + \Delta A_0 + B_0 + \Delta B_0 + C_0 + \Delta C_0 - (180° + \varepsilon)}{3} \tag{c}$$

Вычитая (b) изъ (c), послѣ сокращеній получимъ:

$$\Delta A = \frac{2}{3}\Delta A_0 - \frac{1}{3}\Delta B_0 - \frac{1}{3}\Delta C_0$$

точно также для ошибки ΔB:

$$\Delta B = \frac{2}{3}\Delta B_0 - \frac{1}{3}\Delta A_0 - \frac{1}{3}\Delta C_0$$

Вставляя эти выраженія въ формулу (a) и собирая члены съ ΔA, ΔB и ΔC, получимъ:

$$\delta^2 = \left\{\Delta A_0\left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta\right) - \Delta B_0\left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta\right) - \Delta C_0\left(\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta\right)\right\}^2$$

или, послѣ дѣйствительнаго возвышенія въ квадратъ:

$$\delta^2 = \Delta A_0^{\,2}\left(\frac{4}{9}\alpha^2 + \frac{4}{9}\alpha\beta + \frac{1}{9}\beta^2\right) + \Delta B_0^{\,2}\left(\frac{1}{9}\alpha^2 + \frac{4}{9}\alpha\beta + \frac{4}{9}\beta^2\right) + \\ + \Delta C_0^{\,2}\left(\frac{1}{9}\alpha^2 - \frac{2}{9}\alpha\beta + \frac{1}{9}\beta^2\right) + \\ + \text{члены съ } 2\Delta A_0\,\Delta B_0,\ 2\Delta A_0\,\Delta C_0 \text{ и } 2\Delta B_0\,\Delta C_0$$

По неизвѣстности знаковъ у ΔA_0, ΔB_0 и ΔC_0 легко понять, что только первые три члена, заключающіе квадраты ошибокъ, имѣютъ значеніе въ общемъ разсужденіи о случайныхъ ошибкахъ; члены же съ удвоенными произведеніями ошибокъ будутъ иногда положительными, иногда отрицательными, и потому въ общемъ разсужденіи ими можно пренебречь. Далѣе, такъ какъ всѣ три угла треугольника измѣряются обыкновенно однимъ и тѣмъ же инструментомъ, съ равнымъ тщаніемъ и при одинаковыхъ обстоятельствахъ, и притомъ ошибки измѣреній отдѣльныхъ угловъ не зависятъ отъ величины самихъ угловъ, то, называя вообще ошибку измѣреннаго угла черезъ m, можно положить

$$\Delta A_0^2 = \Delta B_0^2 = \Delta C_0^2 = m^2$$

и предъидущее выраженіе обратится, послѣ приведеній, въ

$$\delta^2 = m^2 \cdot \frac{1}{3} \{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2\}$$

или означая

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3} \{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2\} &= \mathfrak{S} \\ \delta^2 &= m^2 . \mathfrak{S} \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Величина $\mathfrak{S}$ называется *ошибкою геометрической связи треугольника.* Легко замѣтить, что она зависитъ отъ величины связывающихъ угловъ треугольника, потому что въ нее входятъ только величины α и β, которыя тѣмъ больше, чѣмъ связывающіе углы A и B меньше. Выражая эти α и β (равно какъ и $\mathfrak{S}$) въ единицахъ седьмого знака логариѳмовъ и полагая, для простоты, что углы при исходной сторонѣ, т. е. A и C равны, и слѣдовательно $B = 180° - 2A$, легко составить слѣдующую таблицу ошибокъ геометрической связи для разныхъ угловъ A и B:

$\angle A = \angle C$	$\angle B$	α	β	$\alpha + \beta$	$\mathfrak{S}$
0°	180°	∞	$-\infty$	0	∞
5	170	240.6	−119.4	121.2	28 960
10	160	119.4	− 57.8	61.6	7 132
15	150	78.6	− 36.5	42.1	3 092

$\angle A = \angle C$	$\angle B$	α	β	$\alpha + \beta$	$\mathfrak{S}$
20°	140°	57.8	− 25.1	32.7	1 683
25	130	45.2	− 17.7	27.5	1 035
30	120	36.5	− 12.2	24.3	690
35	110	30.1	− 7.7	22.4	488
40	100	25.1	− 3.7	21.4	367
45	90	21.1	0	21.1	286
50	80	17.7	+ 3.7	21.4	261
51	78	17.0	+ 4.5	21.5	258
52	76	16.4	+ 5.2	21.6	256
53	74	15.9	+ 6.0	21.9	256
54	72	15.3	+ 6.8	22.1	257
55	70	14.7	+ 7.7	22.4	259
60	60	12.2	+ 12.2	24.4	296
65	50	9.8	+ 17.7	27.5	388
70	40	7.7	+ 25.1	32.8	587
75	30	5.6	+ 36.5	42.1	1 045
80	20	3.7	+ 57.8	61.5	2 383
85	10	1.8	+ 119.4	121.2	9 655
90	0	0	+ ∞	∞	∞

Необходимо замѣтить, что приведенныя въ этой таблицѣ величины α и β суть не просто взятыя изъ логариѳмическихъ таблицъ разности логариѳмовъ синусовъ, а величины, вычисленныя по формулѣ *):

$$\alpha = 10^7 . M . \cot g\, A . \sin 1''$$

$$\beta = 10^7 . M . \cot g\, B . \sin 1''$$

гдѣ M — модуль Бригговыхъ логариѳмовъ.

*) Согласно обозначеніямъ, принятымъ въ текстѣ, величины α, β и γ суть перемѣны логариѳмовъ синусовъ угловъ, при измѣненіи самихъ угловъ на 1″; напримѣръ, для угла A:

$$\alpha = lg \sin (A + 1'') - lg \sin A = lg \frac{\sin (A + 1'')}{\sin A} =$$

$$= lg \frac{\sin A \cos 1'' + \cos A \sin 1''}{\sin A} = lg\,(1 + \cot g\, A \sin 1'') = M . \cot g\, A \sin 1''$$

Зная выраженіе для ошибки геометрической связи отдѣльныхъ треугольниковъ, легко представить въ другомъ видѣ ошибку въ логариѳмѣ любой вычисленной стороны тріангуляціи, именно, по формулѣ (38) и по теоріи случайныхъ ошибокъ получимъ:

$$\Delta\, lg\, a_n = \pm \sqrt{(\Delta\, lg\, b)^2 + m^2 . \Sigma\mathfrak{S}} \tag{41}$$

Здѣсь m^2 вынесено изъ-подъ знака Σ потому, что случайныя ошибки всѣхъ угловъ однородной тріангуляціи можно считать одинаковыми; множитель $\Sigma\mathfrak{S}$ выражаетъ сумму ошибокъ геометрической связи всѣхъ треугольниковъ, расположенныхъ между сторонами b и a_n.

45. Выгоднѣйшій видъ треугольниковъ. Основываясь на формулѣ (41), весьма легко опредѣлить видъ или фигуру треугольника, при которой ошибки вычисленныхъ сторонъ будутъ наименьшія. Видъ треугольника имѣетъ вліяніе только на множитель $\Sigma\mathfrak{S}$; послѣдній будетъ всего меньше, когда каждое слагаемое $\mathfrak{S}$ будетъ наименьшимъ. Ошибки вычисленныхъ сторонъ a и c треугольника ABC выражаются формулами:

$$\Delta\, lg\, a = \pm \sqrt{(\Delta\, lg\, b)^2 + m^2 . \mathfrak{S}}$$

$$\Delta\, lg\, c = \pm \sqrt{(\Delta\, lg\, b)^2 + m^2 . \mathfrak{S}'}$$

гдѣ

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{3}\,\{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2\}$$

$$\mathfrak{S}' = \frac{1}{3}\,\{\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2\}$$

а α, β и γ—перемѣны логариѳмовъ синусовъ угловъ A, B и C, при измѣненіи этихъ угловъ на $1''$.

Такъ какъ нѣтъ никакой причины вычислять одну сторону

Здѣсь $cos\, 1''$ замѣненъ черезъ 1, а въ разложеніи $lg\,(1 + cotg\, A\, sin\, 1'')$ взять только первый членъ. Чтобы получить α въ единицахъ седьмого десятичнаго знака, его надо еще умножить на 10^7. Въ практическихъ вычисленіяхъ безъ чувствительной погрѣшности берутъ величины α и β непосредственно изъ логариѳмическихъ таблицъ; въ нихъ даются перемѣны логариѳмовъ синусовъ при измѣненіи угловъ на $10''$, такъ что α и β получаются дѣленіемъ стоящихъ въ таблицахъ разностей на 10.

точнѣе другой (да впередъ иногда и неизвѣстно, которая изъ сторонъ будетъ связывающею и послужитъ для вычисленія послѣдующихъ треугольниковъ), то всего естественнѣе требовать, чтобы $\Delta\, lg\, a = \Delta\, lg\, c$, а это случится, когда $a = c$, т. е. когда треугольникъ есть равнобедренный, и $\angle A = \angle C$. Но на основной сторонѣ b можно составить безчисленное множество равнобедренныхъ треугольниковъ. При одинаковой ошибкѣ основной стороны b и одинаковой точности измѣренія угловъ (m) ошибки вычисленныхъ сторонъ a и c будутъ всего меньше, когда ошибки геометрической связи $(\mathfrak{S})$ будутъ наименьшими. Изъ таблицы предъидущаго §, въ которой приведены величины $\mathfrak{S}$ именно для равнобедренныхъ треугольниковъ, легко видѣть, что $\mathfrak{S}$ оказывается наименьшею для угловъ A и C около 53°. Если уменьшить промежутки табличныхъ величинъ угловъ, то выйдетъ, что наименьшее $\mathfrak{S}$ соотвѣтствуетъ угламъ

$$A = C = 52^\circ 46' 16''.1 \text{ и } B = 74^\circ 27' 27''.8$$

Впрочемъ, справедливость этого вывода легко доказать и путемъ аналитическимъ. Дѣйствительно (см. выноску стр. 122),

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{3}\,\{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2\} =$$

$$= \frac{M^2 . \sin^2 1''}{3}\,\{cotg^2 A + cotg^2 B + (cotg\, A + cotg\, B)^2\}$$

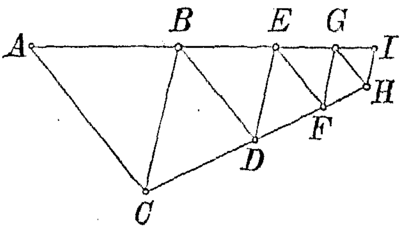
Для равнобедреннаго треугольника $B = 180° - 2A$, и потому множитель въ скобкахъ обращается въ

$$cotg^2 A + cotg^2 2A + (cotg\, A - cotg\, 2A)^2 = \frac{3\, cotg^4 A + 1}{2\, cotg^2 A}$$

Чтобы узнать, когда послѣднее выраженіе будетъ наименьшимъ, должно приравнять его первую производную нулю, послѣ чего получается:

$$cotg\, A = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \text{ и } A = 52^\circ 46' 16''.1$$

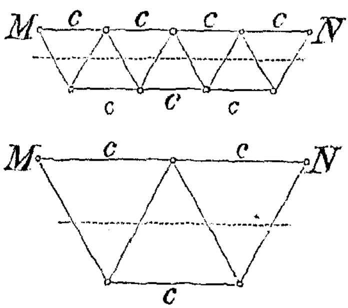
Итакъ, чисто теоретическое разсужденіе приводитъ къ заключенію, что самые выгодные треугольники суть *равнобедренные съ углами при основаніи около 52°.8*; однако, преслѣдуя эту систему неотступно, нельзя распространять цѣпь треугольниковъ сколько нибудь далеко. Изъ чертежа 28-го легко убѣдиться, что если построить на основной сторонѣ $AC = b$ равнобедренный треугольникъ ABC съ углами $A = C = 52°.8$, затѣмъ на сторонѣ BC подобный же треугольникъ BDC и т. д., то стороны послѣдующихъ треугольниковъ будутъ все меньше и меньше, почти въ отношеніи 83 къ 100, такъ что если, напримѣръ, сторона $AC = 25$ верстамъ, то равныя стороны десятаго треугольника будутъ всего по 3.7 версты. Словомъ, при такой системѣ, тріангуляція подвигалась бы весьма медленно, и, благодаря большому числу треугольниковъ, ошибки сторонъ, удаленныхъ отъ начальной, были бы значительны: хотя отдѣльныя слагаемыя формулы (38) и были бы наименьшія, но зато число ихъ было бы очень велико. Поэтому, на практикѣ, самыми выгодными треугольниками признаются не равнобедренные, съ указанными выше углами, а *равносторонніе*, съ равными углами по 60°. Для такихъ треугольниковъ ошибка геометрической связи только немногимъ больше ошибки геометрической связи теоретически наивыгоднѣйшаго треугольника (295.54 и 255.95), но зато въ большой цѣпи изъ многихъ равностороннихъ треугольниковъ ошибка въ каждой отдаленной сторонѣ, благодаря меньшему числу промежуточныхъ треугольниковъ, будетъ меньше.



Черт. 28.

46. Выгоднѣйшая величина треугольниковъ. Въ предъидущемъ изслѣдованіи о выгоднѣйшемъ видѣ треугольниковъ оставленъ безъ вниманія вопросъ о величинѣ ихъ сторонъ. Если между двумя крайними точками M и N (черт. 29) нужно проложить цѣпь простыхъ треугольниковъ, то, держась правила составлять равносторонніе треугольники, можно проложить большое число малыхъ треугольниковъ или небольшое число большихъ. Такъ какъ ошибка вычисленной стороны возрастаетъ прямо пропорціонально квадратному корню изъ числа промежуточныхъ треугольниковъ, то, очевидно, второй способъ выгоднѣе. Помимо бо̀льшей точности, большіе треугольники выгоднѣе и потому, что время, необходимое для производства какъ полевой работы, такъ и вычисленій, будетъ короче.

Въ цѣпи изъ равностороннихъ треугольниковъ каждый треугольникъ подвигаетъ работу впередъ на половину длины своей промежуточной стороны c. Поэтому половина длины промежуточной стороны называется *подвигомъ треугольника*, и понятно, что, чѣмъ больше подвигъ отдѣльныхъ треугольниковъ, тѣмъ скорѣе подвигается впередъ и вся тріангуляція.



Черт. 29.

Такимъ образомъ, треугольникъ оказывается тѣмъ лучше, чѣмъ всѣ стороны его больше. Въ цѣпи изъ большихъ треугольниковъ всѣ стороны будутъ вычисляться точнѣе, и работа подвигаться скорѣе, чѣмъ въ цѣпи изъ малыхъ. Однако очень большіе треугольники имѣютъ и свои невыгоды: 1) длинныхъ линій визированія можно достигнуть лишь въ странѣ гористой, въ равнинѣ пришлось бы воздвигать весьма высокіе тригонометрическіе знаки, съ которыхъ наблюденія не могутъ уже имѣть большой точности; 2) наблюденіямъ по длиннымъ сторонамъ препятствуетъ недостаточная прозрачность воздуха, и отдаленныя точки бываютъ видимы лишь при исключительно благопріятныхъ атмосферическихъ условіяхъ, выжидать которыя было бы напрасною потерею времени; наконецъ 3) при длинныхъ линіяхъ визированія точность наблюденій страдаетъ отъ такъ называемаго бокового преломленія (см. § 103, п. 14).

Изъ разсмотрѣнія дѣйствительныхъ тріангуляцій оказывается, что очень большіе треугольники удавалось прокладывать лишь въ странахъ гористыхъ, гдѣ лучъ зрѣнія идетъ такъ высоко надъ промежуточными равнинами, въ слояхъ чистаго и разрѣженнаго воздуха, что отдаленныя вершины бываютъ хорошо видимы; въ такихъ случаяхъ наблюденія отличались точностью, хотя и требовали иногда много времени для выжиданія благопріятныхъ обстоятельствъ. Въ большинствѣ же случаевъ менѣе длинныя разстоянія оказывались выгоднѣе, и въ среднемъ стороны дѣйствительныхъ первоклассныхъ треугольниковъ оказываются около *25 верстъ.*

Къ тому же выводу приводятъ и теоретическія соображенія. Если бы все пространство, подлежащее тріангуляціи, представляло открытую равнину, то видимость отдаленныхъ точекъ опредѣлялась бы только возвышеніемъ точекъ наблюденія надъ сферическою поверхностью Земли. При разстояніи s двѣ точки будутъ взаимно видимы, если ихъ высоты h_1 и h_2 удовлетворяютъ приближенному уравненію (см. § 152)

$$s = 2\left\{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right\}$$

гдѣ s выражено въ верстахъ, а h_1 и h_2 въ футахъ. Чтобы подняться на большую высоту, необходимо строить высокіе тригонометрическіе знаки; вообще инструментъ трудно расположить выше 5 — 6 саженей. Принимая для простоты $h_1 = h_2 = 40$ фут., для разстоянія s получимъ величину 25 верстъ.

Такимъ образомъ изслѣдованія о выгоднѣйшемъ видѣ и размѣрахъ треугольниковъ приводятъ къ заключенію, что идеаломъ хорошаго первокласснаго треугольника можно признать равносторонній треугольникъ со сторонами въ *25 верстъ* и углами по *60°*. Такой треугольникъ называется *нормальнымъ.*

47. Достоинство треугольниковъ тріангуляціи. Составлять сѣть или цѣпи изъ нормальныхъ треугольниковъ на физической поверхности Земли почти невозможно; горы и холмы, лѣсныя пространства, постройки и другія препятствія принуждаютъ уклоняться отъ теоретически наивыгоднѣйшихъ вида и размѣровъ треугольниковъ. Уклоненія отъ идеала могутъ быть какъ въ углахъ, такъ и въ сторонахъ. Имѣя въ виду быстрое увеличеніе ошибки геометрической связи по мѣрѣ уменьшенія связывающихъ угловъ, стараются не дѣлать ихъ меньшими 40°, и только для второклассныхъ треугольниковъ допускаются связывающіе углы еще меньше, но не меньше 30°. Величины же сторонъ, въ зависимости отъ мѣстныхъ обстоятельствъ, колеблются въ гораздо бо́льшихъ предѣлахъ, и въ дѣйствительныхъ тріангуляціяхъ можно указать на стороны около 10 верстъ и на стороны, достигающія 100, 200 и болѣе верстъ *).

Необходимость допускать на практикѣ треугольники, болѣе или менѣе уклоняющіеся отъ нормальныхъ, побудила выработать мѣрило ихъ достоинства. Такимъ мѣриломъ служатъ *вѣса* треугольниковъ; различаютъ вѣса *геометрическій*, *тригонометрическій* и *общій*. Во всѣхъ случаяхъ единицею сравненія служатъ соотвѣтствующіе вѣса нормальнаго треугольника.

Подъ геометрическимъ вѣсомъ разумѣютъ достоинство треугольника въ смыслѣ его вида и размѣровъ, которые опредѣляются ошибкою геометрической связи и подви́гомъ. Понятно, что треугольникъ будетъ тѣмъ лучше, чѣмъ его ошибка геометрической связи будетъ меньше и чѣмъ его подвигъ больше, такъ что мѣрою достоинства вида и размѣровъ треугольника можетъ служить дробь

$$\frac{{}^1/_2\, c}{\mathfrak{S}}$$

въ числителѣ которой стоитъ половина промежуточной стороны c (подви́гъ), а въ знаменателѣ ошибка геометрической связи $\mathfrak{S}$. Геометрическимъ вѣсомъ G называютъ отношеніе этой дроби для разсматриваемаго треугольника къ таковой же дроби для треугольника нормальнаго, т. е. къ дроби

$$\frac{{}^1/_2\, c_0}{\mathfrak{S}_0} = \frac{12.5 \text{ верстъ}}{295.54}$$

Такъ что

$$G = \frac{c \cdot \mathfrak{S}_0}{c_0 \cdot \mathfrak{S}} \tag{42}$$

---

*) Вотъ наибольшія стороны треугольниковъ дѣйствительныхъ тріангуляцій:

Гильяллъ-Мекипелюсъ въ русскомъ градусномъ измѣреніи	77	верстъ
Десіерто-Кампвей во французскомъ градусномъ измѣреніи	151	„
Сливъ Докартъ-Ска Фель въ англійской тріангуляціи . .	168	„
Годореби-Эльбрусъ, въ закавказской тріангуляціи	219	„
Муласенъ-Фильхаусенъ въ связи Испаніи съ Алжиромъ .	253	„
Діабло-Шаста въ Калифорніи	367	„

гдѣ c — длина промежуточной стороны разсматриваемаго треугольника, c_0 — длина стороны нормальнаго (25 верстъ), а $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_0$ — ошибки геометрической связи разсматриваемаго и нормальнаго треугольниковъ.

Большая величина геометрическаго вѣса не служитъ еще порукою достоинства треугольника вообще: треугольникъ можетъ быть очень хорошимъ въ смыслѣ вида и размѣровъ, но если углы его измѣрены дурно, то и вычисленныя стороны окажутся со значительными погрѣшностями. Изъ формулы (41) видно непосредственно, что ошибка стороны зависитъ не только отъ ошибки геометрической связи $\mathfrak{S}$, но также и отъ величины m, т. е. средней ошибки измѣренныхъ угловъ.

О точности измѣренія угловъ треугольниковъ всего проще судить по согласію суммы ихъ съ суммою теоретическою; именно, *ошибкою треугольника* (v) называютъ разность между суммою измѣренныхъ угловъ и $180° + \varepsilon$, гдѣ ε — сферическій избытокъ даннаго треугольника, такъ что

$$v = A_0 + B_0 + C_0 - (180° + \varepsilon)$$

Отсюда средняя ошибка одного измѣреннаго угла (m) будетъ

$$m = \pm\sqrt{\frac{v^2}{3}}$$

Такъ какъ величина v можетъ быть и положительною, и отрицательною, то, чтобы не разсматривать знаковъ, тригонометрическимъ вѣсомъ (T) называютъ дробь

$$T = \frac{1}{m^2} \qquad (43)$$

Понятно, что чѣмъ средняя ошибка угла m больше, тѣмъ тригонометрическій вѣсъ его T меньше, и наоборотъ.

Наконецъ общимъ вѣсомъ треугольника (P) называютъ произведеніе изъ вѣсовъ геометрическаго и тригонометрическаго, такъ что

$$P = G \,.\, T \qquad (44)$$

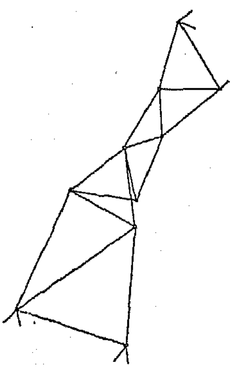
Изъ этой формулы видно, что общее достоинство треугольника, его общій вѣсъ, зависитъ какъ отъ правильности его вида и размѣровъ въ смыслѣ приближенія къ идеальному, нормальпому треугольнику, такъ и отъ точности измѣренія его угловъ. Въ нижеслѣдующемъ § приведенъ примѣръ, какимъ образомъ дурные по виду треугольники были затѣмъ улучшены хорошими наблюденіями, такъ что общее достоинство ихъ было очень значительно.

Достоинство отдѣльныхъ треугольниковъ тріангуляціи можетъ быть чисто случайнымъ; если, напримѣръ, ошибка какого нибудь треугольника окажется равною 0, то тригонометрическій, а слѣдовательно и общій вѣсъ его по формуламъ (43) и (44) будетъ равенъ безконечности. Поэтому, разбирая достоинство цѣлой тріангуляціи, цѣлой цѣпи изъ n треугольниковъ, обыкновенно вычисляютъ ихъ средніе вѣса по формуламъ

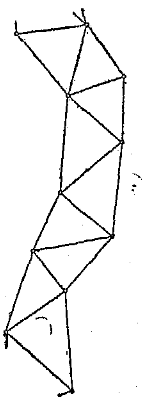
$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{\mathfrak{S}_0}{c_0} \cdot \frac{\Sigma c}{\Sigma \mathfrak{S}} \\ T &= \frac{3n}{\Sigma v^2} = \frac{n}{\Sigma m^2} \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Вмѣсто суммы Σc промежуточныхъ сторонъ всѣхъ треугольниковъ можно брать просто удвоенное разстояніе между крайними точками тріангуляціи.

48. Числовые примѣры. Въ Русское градусное измѣреніе по меридіану вошли тріангуляціи не одинаковаго достоинства; онѣ произведены въ разное время, разными наблюдателями и различными инструментами. Въ геометрическомъ смыслѣ хуже всего составлены Балтійскіе треугольники, часть которыхъ изображена на черт. 30. Здѣсь экономическія соображенія часто заставляли пользоваться мѣстными предметами (колокольнями кирокъ) вмѣсто дорого стоющихъ тригонометрическихъ знаковъ, и потому встрѣчаются довольно острые связывающіе углы, зато наблюденія отличались вообще высокою точностью. При составленіи же треугольниковъ въ Волынской губерніи, энергическая



Черт. 30.



Черт. 31.

дѣятельность начальника тріангуляціи, генерала *Теннера*, доводила нѣкоторые изъ нихъ почти до нормальнаго вида (черт. 31); однако здѣсь приходилось строить очень высокіе тригонометрическіе знаки, наблюденія съ которыхъ оказались не особенно точными. Въ результатѣ, средніе геометрическіе вѣса Балтійскихъ и Волынскихъ треугольниковъ суть: 0.390 и 0.554, тригонометрическіе вѣса равны соотвѣтственно 3.040 и 0.632, а общіе 1.186 и 0.350. Такимъ образомъ превосходныя качества вида Волынскихъ треугольниковъ были испорчены дурными наблюденіями.

Въ нижеслѣдующихъ таблицахъ приведены числовыя данныя для всѣхъ частей русскаго градуснаго измѣренія по меридіану.

Наименованіе частей.	Число треугольниковъ.	G	T	P
Финмаркенъ	12	0.578	0.242	0.140
Лапландія	21	0.653	0.639	0.417
Финляндія	70	0.424	1.312	0.556
Бальтійскія губ.	28	0.390	3.040	1.186
Литовскія губ.	49	0.500	0.749	0.374
Волынская губ.	33	0.554	0.632	0.350
Бессарабская губ.	43	0.402	0.938	0.378

Необходимо замѣтить, что числа этой таблицы взяты непосредственно изъ сочиненія В. Струве «Дуга Меридіана» (Томъ II, стр. 9). По формуламъ (42) и (44) геометрическіе и общіе вѣса оказались бы немного бо̀льшими, такъ какъ Струве принимаетъ для длины стороны нормальнаго треугольника 15 000 тоазовъ, а въ § 46 она принята равною 25 верстамъ (около 13 684 тоаза). Это измѣненіе сдѣлано какъ по объясненнымъ въ томъ же § соображеніямъ, такъ и потому, что 25 верстъ, будучи круглымъ числомъ въ русскихъ мѣрахъ, представляетъ дѣйствительно среднюю длину сторонъ всѣхъ треугольниковъ нашего градуснаго измѣренія по меридіану.

49. Базисныя сѣти. Всѣ стороны треугольниковъ тріангуляціи легко вычисляются, когда извѣстна длина одной, называемой поэтому *основною*. Для повѣрки же весьма полезно имѣть, особенно въ большихъ тріангуляціяхъ, нѣсколько основныхъ сторонъ, и въ такомъ случаѣ ихъ распредѣляютъ по возможности равномѣрно по всей сѣти треугольниковъ. Если первоклассная тріангуляція представляетъ непрерывную цѣпь треугольниковъ, то основныя стороны избираются примѣрно черезъ каждые 20—30 треугольниковъ, т. е. на разстояніяхъ отъ 200 до 300 верстъ. Такъ, въ большой цѣпи Русскаго градуснаго измѣренія по меридіану, на 258 треугольниковъ, растянутыхъ на 2 500 верстъ, имѣется 10 основныхъ сторонъ.

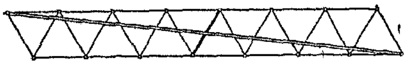
Для точности вычисленія всего лучше, если каждая основная сторона представляетъ линію, измѣренную непосредственно, т. е. *базисъ*. Однако медленность работы измѣренія линіи на мѣстности и трудность найти большое, ровное и удобное для измѣреній пространство принуждаютъ ограничиваться короткими базисами, верстъ въ 7 или 8. Основная же сторона, какъ сторона одного изъ первоклассныхъ треугольниковъ, должна имѣть около 25 верстъ длины.

Переходъ отъ базиса къ основной сторонѣ производится при помощи особой вспомогательной тріангуляціи, называемой *базисною сѣтью*. Необходимость постепеннаго увеличиванія сторонъ треугольниковъ принуждаетъ дѣлать въ базисныхъ сѣтяхъ довольно острые связывающіе углы; чтобы ослабить вредное вліяніе послѣднихъ на точность вычисленія основной стороны, стараются помимо направленій, необходимыхъ для вычисленія, наблюдать по возможности и другія направленія на всѣ видимыя окружающія точки. Такимъ образомъ базисныя сѣти представляютъ обыкновенно довольно сложныя системы треугольниковъ со многими пересѣкающимися діагоналями.

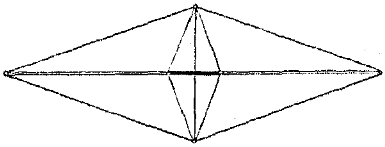
Отличительныя свойства базисныхъ сѣтей побудили многихъ ученыхъ ближе изслѣдовать точность, съ которою получаются большія основныя стороны тріангуляціи по малымъ базисамъ при различныхъ видахъ входящихъ въ базисныя сѣти треугольниковъ. Особеннаго вниманія заслуживаютъ труды *Шверда* (1792–1871) «Die kleine Speyerer Basis» и *Гельмерта*—

«Zur Theorie der Basisnetze». Не останавливаясь на подробностяхъ изслѣдованій этихъ ученыхъ, достаточно указать, что они разобрали главнымъ образомъ базисныя сѣти двухъ системъ: цѣпную и ромбическую.

Цѣпная базисная сѣть (черт. 32) состоитъ изъ ряда смежныхъ треугольниковъ, въ которыхъ стороны равны длинѣ самого базиса (толстая черта), а основная сторона представляетъ пересѣкающую всю цѣпь діагональ (двойная черта). *Ромбическая* же *сѣть* (черт. 33) состоитъ изъ парныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, построенныхъ послѣдовательно сперва



Черт. 32.

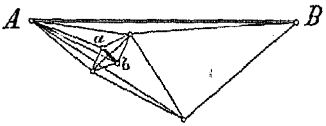


Черт. 33.

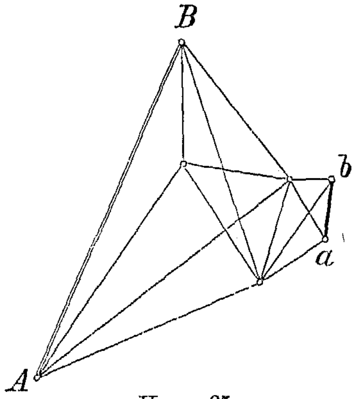
на базисѣ, потомъ на длинной діагонали ромба и т. д., пока не получится діагональ требуемой длины.

На обѣ системы надо конечно смотрѣть, какъ на типы базисныхъ сѣтей, возможные только на идеальной, открытой равнинѣ; этихъ типовъ надо держаться въ общихъ чертахъ при проектированіи базисныхъ сѣтей на дѣйствительной мѣстности. Главная цѣль должна заключаться въ томъ, чтобы сдѣлать переходъ отъ малаго базиса къ большой основной сторонѣ при помощи возможно меньшаго числа точекъ, составляющихъ возможно лучшіе треугольники, съ наибольшими геометрическими вѣсами. Легко разсчитать, что въ ромбической сѣти при острыхъ углахъ ромба даже въ 60°, отношеніе его діагоналей равно $1:1^3/_4$, а при острыхъ углахъ въ 40°, оно равно $1:2^3/_4$, и стало быть, въ послѣднемъ случаѣ достаточно только двухъ ромбовъ, т. е. введенія всего двухъ вспомогательныхъ точекъ, чтобы получить основную сторону, въ семь разъ бо́льшую базиса. При цѣпной системѣ для такого же увеличенія потребовалось бы составить 14 треугольниковъ и наблюдать на 12-ти вспомогательныхъ точкахъ (см. черт. 32).

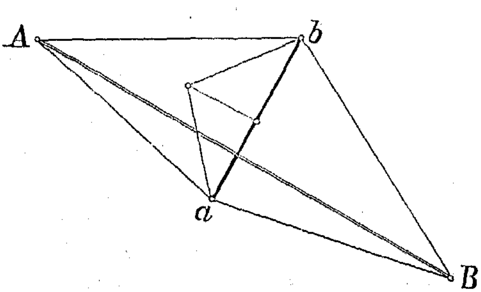
Мѣстныя условія едва-ли позволятъ даже въ будущемъ осуществлять указанные типы базисныхъ сѣтей; существующія сѣти отличаются чрезвычайнымъ разнообразіемъ. Нижеслѣдующіе чертежи представляютъ примѣры расположенія базисныхъ сѣтей: на нихъ толстыми чертами изображены базисы, а двойными — основныя стороны. Чертежъ 34 представляетъ сѣть Бесселя въ окрестностяхъ Кенигсберга; длина базиса ab равна лишь 935 тоазамъ (около $1^3/_4$ версты), а длина основной стороны AB почти 30 верстамъ. На чертежѣ 35 изображена базисная сѣть въ южной Финляндіи у Элиме.



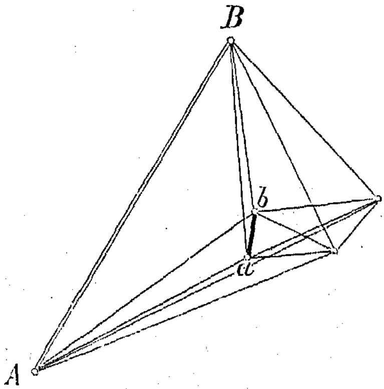
Черт. 34.



Черт. 35.



Чер . 36.



Черт. 37.

Длина базиса ab равна $2^1/_2$ в., а основная сторона AB (Мустила-Корсмальмъ), составляющая сторону первокласснаго треугольника Русско-скандинавскаго градуснаго измѣренія, равна 17 верстамъ. На чертежѣ 36 изображена Орская базисная сѣть нашего измѣренія по параллели 52° сѣверной широты. Длины базиса и основной стороны суть соотвѣтственно $8^1/_3$ и $22^1/_4$ верстъ. Наконецъ на черт. 37 представлена базисная сѣть у Санди-Крика (Озерной съемки Соедин. Штатовъ Сѣверной Америки). Длины базиса и основной стороны суть $4^1/_2$ и $45^1/_4$ верстъ. Въ русскомъ градусномъ измѣреніи по меридіану есть случай (Попедѣльскій базисъ), когда измѣренный непосредственно базисъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ основная сторона тріангуляціи.

50. Перечень работъ на тріангуляціяхъ. Работы на большихъ тріангуляціяхъ состоятъ изъ дѣйствій на мѣстности и послѣдующихъ вычисленій. На мѣстности производятся:

1) *Рекогносцировка*, имѣющая цѣлью общій осмотръ мѣстности для выбора и временнаго означенія вершинъ будущихъ треугольниковъ, а также для выбора мѣста базиса.

2) *Постройка тригонометрическихъ знаковъ* и заложеніе центровъ, т. е. возведеніе сооруженій, дѣлающихъ выбранныя на мѣстности точки видимыми издали и удобными для наблюденій съ нихъ; центры же обезпечиваютъ долговременное сохраненіе точекъ тріангуляціи на мѣстности.

3) *Измѣреніе базисовъ.*

4) *Измѣреніе* горизонтальныхъ и вертикальныхъ *угловъ.*

5) *Приведенія наблюденій.*

Послѣдующія вычисленія представляютъ слѣдующія отдѣльныя работы:

1) *Выводъ среднихъ результатовъ* на каждомъ отдѣльномъ мѣстѣ наблюденій.

2) *Предварительное вычисленіе тріангуляціи*, необходимое для нѣкоторыхъ вспомогательныхъ послѣдующихъ вычисленій.

3) *Вычисленіе приведеній.*

4) *Уравнительныя вычисленія.*

5) *Окончательное вычисленіе тріангуляціи.*

6) *Вычисленіе географическихъ координатъ* всѣхъ точекъ тріангуляціи.

7) *Вычисленіе ихъ высотъ.*

Подробное описаніе перечисленныхъ работъ съ указаніемъ на теоретическія ихъ основанія и на практическіе пріемы ихъ производства составляютъ содержаніе нижеслѣдующихъ главъ книги. Здѣсь же перечислены послѣдовательныя вычисленія геодезическихъ работъ со ссылками на §§, въ которыхъ изложены подробности отдѣльныхъ дѣйствій.

Вычисленіе тріангуляціи начинается съ вывода предварительныхъ направленій и угловъ на всѣхъ точкахъ (§ 114). По этимъ угламъ и приближенно извѣстной длинѣ базиса составляется чертежъ тріангуляціи и вычисляются пятизначными логариѳмами по простымъ формуламъ прямолинейной тригонометріи стороны всѣхъ треугольниковъ и ихъ сферическіе избытки (§ 36). Затѣмъ вычисляютъ приведенія для точекъ, на которыхъ наблюденія производились не съ центра и гдѣ вершины тригонометрическихъ знаковъ не находились въ одной отвѣсной линіи съ центромъ (§§ 110 и 111). Такимъ образомъ получаютъ такъ называемые приведенные направленія и углы.

Далѣе приступаютъ къ уравнительнымъ вычисленіямъ. Если тріангуляція состоитъ изъ цѣпи одиночныхъ треугольниковъ, то это вычисленіе заключается въ приведеніи суммъ угловъ во всѣхъ треугольникахъ къ $180^\circ + \varepsilon$ простымъ дѣленіемъ соотвѣтствующихъ ошибокъ на три равныя части (§ 132); если она представляетъ цѣпь изъ четыреугольниковъ съ двумя діагоналями или центральныхъ системъ, то каждая фигура уравнивается отдѣльно по правиламъ, объясненнымъ въ §§ 121, 125 и 126; если же, наконецъ, тріангуляція представляетъ сложную сѣть со многими перекрещивающимися діагоналями, то примѣняютъ общій пріемъ уравниванія (§ 122). Эти уравнительныя вычисленія могутъ быть исполнены и безъ знанія точной длины базиса или основной стороны тріангуляціи, потому что въ нихъ входятъ только углы; для послѣдующаго же уравниванія между базисами (§ 124) или для смыканія полигоновъ (§§ 141—143) надо знать окончательныя длины базисовъ, приведенныя къ уровню океана (§ 77).

Послѣ уравниванія тріангуляціи выписываютъ и вычисляютъ всѣ треугольники перваго класса, причемъ пользуются обыкновенно семизначными логариѳмами. Затѣмъ вычисляютъ треугольники второго и третьяго классовъ (шестизначными логариѳмами), причемъ уравниваніе третьеклассныхъ точекъ производится по правиламъ, объясненнымъ въ §§ 127 и 128; для точекъ же, опредѣленныхъ помощью задачи Потенота, углы и стороны вычисляются, какъ объяснено въ § 129, и уравниваются по правиламъ, даннымъ въ § 130.

Нерѣдко вычисляютъ еще полярныя координаты отдѣльныхъ точекъ, хотя вообще говоря онѣ и не нужны. Спеціальное назначеніе и способы вычисленія полярныхъ координатъ объяснены въ § 133.

Затѣмъ вычисляютъ географическія координаты всѣхъ точекъ, начиная съ данной астрономической или тригонометрической. Для этого пользуются обыкновенно простѣйшими формулами §§ 135 и 136. Когда извѣстны полярныя координаты конечной точки, то весьма полезно, послѣ вычисленія широтъ, долготъ и азимутовъ всѣхъ точекъ цѣпи, вычислить ихъ для конечной точки непосредственно съ начальной, для чего могутъ понадобиться болѣе развитыя формулы § 137. Если новая тріангуляція представляетъ соединеніе двухъ прежнихъ, то вычисленіе надо начинать съ рѣшенія обратной геодезической задачи (§ 138).

Наконецъ послѣ опредѣленія положенія проекцій всѣхъ точекъ на уровенной поверхности вычисляютъ высоты ихъ, по правиламъ и формуламъ, даннымъ въ §§ 147 и 151.

IV.

Рекогносцировки.

51. Необходимость рекогносцировокъ. Выборъ точекъ для вершинъ треугольниковъ не представлялъ бы никакихъ затрудненій на ровной и открытой мѣстности; на ней имѣлась бы полная возможность пролагать цѣпи или сѣть нормальныхъ треугольниковъ. На самомъ дѣлѣ мѣстныя условія заставляютъ пользоваться выдающимися вершинами горъ и холмовъ, а также существующими высокими постройками и выбирать тѣ изъ нихъ, которыя составляютъ собою треугольники, по возможности менѣе уклоняющіеся отъ нормальныхъ. Разыскиваніе такихъ точекъ и составляетъ цѣль *рекогносцировокъ*. Надо стараться достигнуть наилучшихъ результатовъ съ наименьшими издержками. При разъѣздахъ въ горной странѣ, выдающіяся вершины прямо бросаются въ глаза, и остается лишь выбрать изъ нихъ тѣ, которыя доступны для подъема и составляютъ хорошіе въ геометрическомъ смыслѣ треугольники. Въ мѣстности закрытой, лѣсистой, надо имѣть большую опытность и, такъ сказать, геодезическое чутье, чтобы находить наивысшія точки, съ которыхъ открывался бы большой кругозоръ и съ которыхъ визирныя линіи проходили бы высоко надъ почвой. Послѣднее обстоятельство имѣетъ весьма важное значеніе, потому что оно облегчаетъ производство наблюденій и увеличиваетъ ихъ точность; нижніе, прилегающіе къ почвѣ слои атмосферы обыкновенно всего болѣе насыщены парами воды и пылью, которые часто дѣлаютъ ихъ мало прозрачными; кромѣ того лучи свѣта, проходя вблизи нагрѣтой солнечными лучами почвы или стѣнъ зданій, претерпѣваютъ неправильныя преломленія.

Рекогносцировки необходимо производить для выбора всѣхъ точекъ тріангуляцій, но особенно важное значеніе онѣ имѣютъ при разыскиваніи будущихъ точекъ тріангуляціи первоклассной. Стороны первоклассныхъ треугольниковъ должны имѣть наибольшую длину, видъ ихъ долженъ быть по возможности ближе къ нормальному и наблюденія на ихъ вершинахъ нужно производить съ наибольшею точностью; слѣдовательно, эти вершины должны лежать на доступныхъ мѣстахъ и вблизи городовъ или селеній, чтобы будущій наблюдатель имѣлъ возможность жить удобно *). Точки второклассныя и третьеклассныя могутъ составлять менѣе выгодные треугольники и находиться дальше отъ населенныхъ мѣстъ, а визирныя линіи могутъ лежать, безъ ущерба для точности, ближе къ почвѣ. Третьеклассными точками, съ которыхъ не производится вовсе наблюденій, могутъ быть даже совершенно недоступныя вершины горъ. Во всякомъ случаѣ точки тріангуляціи должны выбираться въ мѣстахъ, обезпеченныхъ отъ наводненій и отъ посягательствъ владѣльцевъ земельныхъ участковъ и злоумышленниковъ.

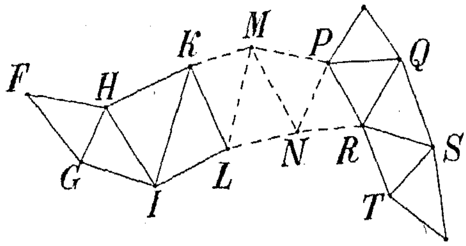
Если производится новая тріангуляція на мѣстности, гдѣ таковой прежде не было, то сперва необходимо выбрать ровное и открытое мѣсто для базиса и найти точки, удобныя для составленія базисной сѣти (см. § 49). Въ виду незначительной длины сторонъ треугольниковъ базисной сѣти, выборъ ихъ вершинъ обыкновенно не представляетъ большихъ затрудненій и производится въ сравнительно короткое время; главное вниманіе должно быть обращено на то, чтобы самый базисъ представлялъ линію, по возможности горизонтальную и на всемъ своемъ протяженіи доступную непосредственному измѣренію; базисная же сѣть должна быть составлена небольшимъ числомъ взаимно-видимыхъ точекъ и по возможности приближаться къ типу ромбической: въ послѣднемъ случаѣ переходъ отъ малаго базиса къ большой основной сторонѣ производится въ скорѣйшее время и съ наибольшею точностью.

При рекогносцировкахъ для проложенія цѣпей треугольни-

---

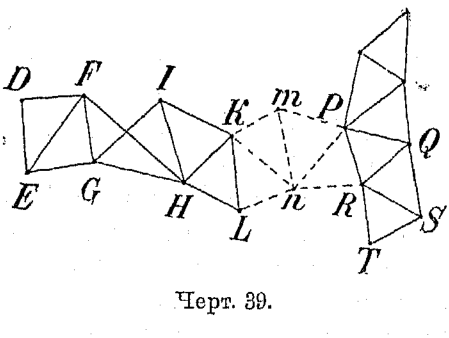
*) Наблюденія на первоклассныхъ точкахъ продолжаются иногда нѣсколько дней, недѣль и даже мѣсяцевъ; въ суровомъ климатѣ не совсѣмъ пріятно жить все это время подъ открытымъ небомъ или даже въ палаткѣ.

ковъ легко сообразить, что въ случаѣ цѣпи простыхъ треугольниковъ задача сводится къ послѣдовательному разысканію точекъ, съ которыхъ были бы видны *двѣ* предъидущія; такъ, послѣ выбора первыхъ двухъ точекъ A и B, съ третьей C должны быть видны эти первыя точки A и B, съ четвертой D должны быть видны точки B и C, съ пятой E— точки C и D и т. д. Для проложенія болѣе сложныхъ цѣпей рекогносцировки затруднительнѣе: для цѣпи многоугольниковъ (черт. 26) съ послѣдней точки каждаго многоугольника должны быть видимы *три* предшествующія, а для цѣпи четыреугольниковъ (черт. 25) половина всѣхъ точекъ должна удовлетворять видимости *двухъ*, а половина—видимости *трехъ* предъидущихъ.



Черт. 38.

Для составленія сѣти первоклассныхъ треугольниковъ, а также для примыканія новой цѣпи къ точкамъ старой тріангуляціи нерѣдко является необходимость найти такую точку, съ которой должны быть видны *четыре* и *болѣе* предъидущихъ. Пусть, напримѣръ, новая тріангуляція $FGHIKL$ (черт. 38 и 39), которую нужно соединить съ прежнею цѣпью $PQRST$, доведена уже до точекъ K и L, съ которыхъ однако не видно ни одной точки старой тріангуляціи. Задача рекогносцировки будетъ заключаться въ томъ, чтобы найти: 1) такія двѣ точки M и N (черт. 38), съ которыхъ видны одновременно по *четыре* другихъ, или 2) двѣ точки m и n (черт. 39), изъ которыхъ съ одной m видны *три*, а съ другой n—*пять* точекъ.



Черт. 39.

52. Производство рекогносцировокъ. Для сбереженія времени рекогносцировки производятся обыкновенно верхомъ или въ легкомъ экипажѣ, причемъ нужно имѣть съ собою существующую самую подробную карту мѣстности, ручную подзорную трубу или бинокль, анероидъ, мѣрную тесьму, ручную буссоль, транспортиръ, записную книжку съ карандашемъ и снаряды для подъема на деревья и для постановки вѣхъ, т. е. канатъ, длиною саженей десять, веревочную лѣстницу, нѣсколько тонкихъ веревокъ, топоръ и гвозди.

Пріѣхавъ на первую точку, напримѣръ на вершину горы, рекогносцировщикъ внимательно осматриваетъ и изучаетъ горизонтъ той стороны, куда нужно вести работу. Замѣтивъ отдѣльный холмъ, высокое зданіе, колокольню и т. п., онъ опредѣляетъ при помощи буссоли магнитные азимуты этихъ предметовъ и затѣмъ прочерчиваетъ на картѣ соотвѣтствующія направленія изъ точки стоянія. Кромѣ того въ записной книжкѣ необходимо хоть въ общихъ чертахъ зарисовать внѣшній видъ каждаго выдающагося предмета и тотъ горизонтъ, на который онъ проектируется: будетъ ли это небо или сзади простирается лѣсъ, горы, какая нибудь постройка и т. п. Затѣмъ рекогносцировщикъ переѣзжаетъ на другую, намѣченную съ первой точку, показавшуюся ему наиболѣе подходящею, и производитъ тамъ такія же дѣйствія.

Взаимныя пересѣченія прочерченныхъ направленій съ первыхъ двухъ точекъ на замѣченныя удаленныя и возвышенныя мѣста покажутъ на картѣ ихъ приблизительное положеніе. Сообразуясь съ величиною угловъ, составленныхъ этими направленіями, а также съ отдаленностью полученныхъ точекъ пересѣченія, рекогносцировщикъ ѣдетъ на одну изъ нихъ. Горку, отчетливо видимую съ первыхъ двухъ точекъ, не легко иногда найти на мѣстности; кромѣ карты необходимо прибѣгать къ распросамъ обывателей, которые весьма часто могутъ непосредственно указать мѣсто, считаемое наивысшимъ во всей окрестности. Бываютъ случаи, именно въ лѣсистыхъ странахъ, что за гору принимаются возвышающіяся вершины деревьевъ, тогда какъ тамъ нѣтъ горы, а деревья поднялись высоко благодаря болѣе счастливымъ условіямъ ихъ роста. Если мѣстность вообще не представляетъ рѣзко бросающихся въ глаза горъ и холмовъ, то высшее мѣсто можно открыть при помощи анероида (см. § 166).

Отыскавъ на мѣстности точку, замѣченную съ первыхъ двухъ, рекогносцировщикъ осматриваетъ открывающійся отсюда горизонтъ, находитъ посѣщенныя уже мѣста и оріентируетъ по нимъ карту. Затѣмъ онъ старается увидѣть точки раньше намѣченныя, образованныя пересѣченіями направленій съ первыхъ двухъ, и открыть новыя въ сторону продолженія работы. Для разысканія ранѣе намѣченныхъ точекъ пользуются буссолью, устанавливая ее по азимуту, взятому по картѣ. Сообразивъ выгоды и недостатки расположенія нѣсколькихъ полученныхъ на картѣ мѣстъ пересѣченія, рекогносцировщикъ ѣдетъ дальше на точку, найденную наиболѣе выгодною. Тамъ онъ убѣждается, что съ нея видны предъидущія точки, изслѣдуетъ горизонтъ дальше и вообще дѣлаетъ все то, что дѣлалъ на прежде посѣщенныхъ мѣстахъ.

Разсматривать горизонтъ и карту очень легко, когда стоишь на вершинѣ горы, на крышѣ зданія или на колокольнѣ церкви. Гораздо труднѣе работать на верхушкѣ дерева среди лѣса; прежде всего надо взобраться на дерево, а сосны и ели зачастую не имѣютъ крѣпкихъ вѣтвей внизу. Въ такихъ случаяхъ перебрасываютъ камень съ привязанною къ нему бичевкою черезъ одну изъ верхнихъ надежныхъ вѣтокъ и, приростивъ затѣмъ къ бичевкѣ канатъ (простой или съ узлами) или веревочную лѣстницу, подымаютъ ихъ и укрѣпляютъ наверху такъ, чтобы взлѣзаніе было безопасно. На деревья безъ сучьевъ легко подыматься также при помощи стремянокъ, которыми пользуются механики при починкахъ на вершинахъ телеграфныхъ столбовъ. Устроившись на верхушкѣ дерева, рекогносцировщикъ часто не имѣетъ достаточнаго кругозора; ему могутъ мѣшать верхушки окружающихъ близкихъ деревьевъ. Въ этихъ случаяхъ необходимо посылать опытныхъ, смышленныхъ и расторопныхъ рабочихъ, которые бы находили мѣшающія деревья и срубали бы ихъ цѣликомъ или однѣ вершинки. Если мелкія порубки не могутъ открыть достаточнаго кругозора, то къ избранному высокому дереву надо привязать прочную вѣху и умѣть взлѣзть на нее. При работѣ въ лѣсу нужно также измѣрять мѣрною тесьмою или веревкою высоту того мѣста, съ котораго открылся достаточный кругозоръ. Такая запись послужитъ потомъ основаніемъ для разсчета постройки тригонометрическаго знака.

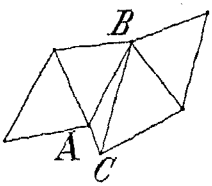
Оставляя посѣщенное мѣсто, надо сдѣлать его видимымъ съ другихъ. Конечно отдѣльная и характернаго вида вершина горы или высокое зданіе нельзя смѣшать съ другими, но небольшіе холмы и особенно точки, избранныя въ лѣсу, необходимо отмѣтить вѣхами съ привязанными къ нимъ флагами, пучками соломы или подушками изъ бѣлыхъ холщевыхъ мѣшковъ, набитыхъ соломою. Несоблюденіе такихъ предосторожностей заставляло иногда возвращаться назадъ.

Отдаленные предметы не во всѣ часы дня одинаково хорошо и ясно видны; въ ясную погоду всего лучше производить осмотръ горизонта во время спокойныхъ изображеній (см. § 97), т. е. послѣ полудня, отъ 3 до 6 часовъ, или утромъ, вскорѣ послѣ разсвѣта. Сообразно этому надо распредѣлять время такъ, чтобы совершать переѣзды съ мѣста на мѣсто въ срединѣ дня и ночью. Въ пасмурную погоду видимость остается хорошею въ теченіи цѣлаго дня.

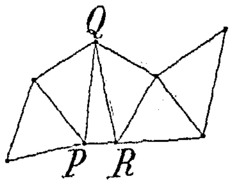
Не слѣдуетъ жалѣть времени на рекогносцировку и особенно на переѣзды, кажущіеся излишними. Достоинство всей тріангуляціи зависитъ главнымъ образомъ отъ удачнаго выбора точекъ. Когда рекогносцировка сдѣлана добросовѣстно, то при дальнѣйшей работѣ, т. е. при постройкѣ знаковъ и при наблюденіяхъ нельзя ожидать недоразумѣній и непріятныхъ случайностей. Напротивъ, когда рекогносцировщикъ совершалъ осмотры небрежно и *не убѣждался лично* во взаимной видимости сосѣднихъ точекъ, то можетъ оказаться, что на избранномъ мѣстѣ придется строить очень высокій знакъ или, что еще хуже, строить напрасно, если даже съ очень высокаго знака не откроется достаточнаго кругозора. Обыкновенно лишь послѣ посѣщенія многихъ намѣченныхъ съ предъидущихъ точекъ мѣстъ рекогносцировщикъ убѣждается, которое изъ нихъ всего выгоднѣе. Бывали случаи, что только послѣ постройки знака оказывалось, что мѣсто избрано неудачно; оно бросалось и избиралось другое, удобное для возведенія знака, но составлявшее съ предъидущими точками невыгодный треугольникъ.

53. Выборъ точекъ. При выборѣ послѣдовательныхъ вершинъ будущихъ треугольниковъ, помимо простой видимости предъидущихъ точекъ необходимо еще руководствоваться слѣдующими соображеніями:

1) Углы треугольниковъ должны быть по возможности ближе къ 60°, но такъ какъ прокладывать нормальные треугольники на дѣйствительной мѣстности совершенно немыслимо, то надо держаться лишь правила не допускать связывающихъ угловъ меньше 40°; что же касается угловъ промежуточныхъ, то они могутъ имѣть любую величину. Такимъ образомъ треугольникъ ABC (черт. 40) не можетъ быть терпимъ: его связывающій уголъ C меньше 40°. Треугольникъ же PQR (черт. 41) не портитъ тріангуляціи и невыгоденъ лишь въ томъ отношеніи, что имѣетъ малый подвигъ.



Черт. 40.



Черт. 41.

2) Визирныя линіи должны проходить *по возможности выше надъ почвою*. Объ этомъ было уже сказано въ § 51 и будетъ еще сказано въ § 150.

3) Надо предпочитать точки, на которыхъ можно производить наблюденія *съ земли или съ платформъ невысокихъ сигналовъ*. Весьма часто рекогносцировщикъ находитъ двѣ или даже нѣсколько точекъ для составленія треугольника по намѣченнымъ уже раньше двумъ. Въ такихъ случаяхъ выгоднѣе избрать такую, на которой нужно строить менѣе высокій знакъ. Если въ смыслѣ величины геометрическаго вѣса треугольникъ окажется и хуже, то все же съ земли или невысокой платформы наблюденія будутъ точнѣе, а увеличеніемъ тригонометрическаго вѣса можно сдѣлать и общій вѣсъ треугольника бо́льшимъ.

4) *Надо стараться избѣгать точекъ, расположенныхъ на пашнѣ и въ деревняхъ или вообще среди селенія.* Въ такихъ мѣстахъ всегда можно опасаться за цѣлость центровъ, закладываемыхъ подъ тригонометрическими знаками (см. § 68).

5) Если тріангуляція ведется не для градуснаго измѣренія, а для опредѣленія опорныхъ точекъ предстоящей съемки, то каждая тригонометрическая точка должна быть также удобнымъ мѣстомъ для съемщика, т. е. необходимо, чтобы съ нея видна была ближайшая окрестность. Въ этомъ смыслѣ открытыя горки всегда выгоднѣе горокъ, поросшихъ лѣсомъ или даже кустарникомъ.

Кромѣ выбора первоклассныхъ точекъ, тотъ же рекогносцировщикъ намѣчаетъ иногда будущія точки 2-го и 3-го классовъ. Тогда изъ числа точекъ пересѣченій прочерченныхъ на посѣщенныхъ точкахъ направленій, надо выбирать точки, выгодныя для будущихъ опорныхъ. Не мѣшаетъ по пути посѣщать эти точки, но терять время на обязательное ихъ разысканіе безполезно: послѣ постройки тригонометрическихъ знаковъ на первоклассныхъ точкахъ обыкновенно легко открыть множество новыхъ мѣстъ, пригодныхъ какъ опорныя точки для съемки, но которыя при первоначальной рекогносцировкѣ остались незамѣченными. Если же вся сѣть состоитъ изъ второ- и третье-классныхъ треугольниковъ (въ промежуткахъ между цѣпями первоклассныхъ), то посѣщеніе и личный осмотръ всѣхъ вершинъ треугольниковъ второго класса, разумѣется, обязательны. Вовсе не посѣщать можно лишь точки третьяго класса, особенно если это хорошо бросающіяся въ глаза колокольни церквей, башни, трубы заводовъ и вообще выдающіяся постройки.

Иногда рекогносцировка и постройка тригонометрическихъ знаковъ ведутся одновременно двумя лицами, причемъ одинъ выбираетъ мѣста, а другой тотчасъ приступаетъ къ возведенію на нихъ знаковъ. При такой системѣ работа облегчается и ускоряется: нѣтъ надобности во временныхъ вѣхахъ, означающихъ избранныя мѣста; эти вѣхи, помимо потраченнаго на постановку ихъ времени, съ дальнихъ точекъ видны конечно хуже, чѣмъ построенный уже тригонометрическій знакъ.

54. Названія и описаніе точекъ. Каждая тригонометрическая точка получаетъ названіе, которымъ она отличается отъ всѣхъ прочихъ. Названіе дается обыкновенно по горѣ или холму, на которыхъ расположена точка, по ближайшему городу, или селенію или же по имени владѣльца земельнаго участка. Разъ данное во время рекогносцировки названіе сохраняется затѣмъ за точкою во всѣхъ послѣдующихъ вычисленіяхъ и вносится наконецъ въ списки или каталоги точекъ.

При выборѣ названія надо руководствоваться слѣдующими соображеніями: 1) названіе должно состоять изъ одного лишь слова, потому что многократная переписка длиннаго названія будетъ безполезною тратою времени, 2) названіе должно быть общеизвѣстно мѣстнымъ обывателямъ, что облегчаетъ въ будущемъ разыскиваніе старой тригонометрической точки, 3) то же названіе не должно повторяться по крайней мѣрѣ на пространствѣ одной тріангуляціи; были случаи, что одинаковость названій или даже близкое ихъ сходство причиняли весьма прискорбныя недоразумѣнія; 4) надо по возможности избѣгать собственныхъ именъ лицъ; внесеніе своей фамиліи въ лѣтописи Геодезіи конечно очень лестно каждому землевладѣльцу, но въ будущемъ, съ переходомъ имѣнія въ другія руки, разыскиваніе точки можетъ быть затруднительно.

Когда точка окончательно избрана, то необходимо составить ея описаніе и еще лучше—сдѣлать глазомѣрную съемку окружающей мѣстности на 100 или 200 саженъ вокругъ нея. Въ описаніи объясняется, какъ пройти или проѣхать на точку съ ближайшей дороги, т. е. въ какомъ именно мѣстѣ и въ какую сторону надо свернуть и какъ далеко отъ поворота съ дороги до самой точки. Подробности этого описанія нужны не только для облегченія разысканія точки въ будущемъ, но и для строителя тригонометрическаго знака, потому что иногда строитъ знаки не тотъ, кто производилъ рекогносцировку.

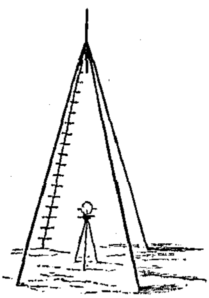
V.

Тригонометрическіе знаки.

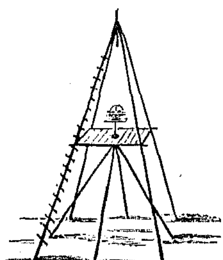
55. Разные роды знаковъ. Тригонометрическими знаками называются сооруженія, служащія для означенія избранныхъ на мѣстности вершинъ треугольниковъ такъ, чтобы точка была видна и чтобы съ нея можно было видѣть сосѣднія. Къ тригонометрическимъ знакамъ относятся также центры, закладываемые въ почву, для сохраненія точекъ навсегда.

Надземные тригонометрическіе знаки необходимы только во время наблюденій и потому представляютъ временныя, по большей части деревянныя сооруженія, возводимыя изъ матеріала, находимаго на мѣстѣ или въ ближайшихъ окрестностяхъ. Они должны имѣть правильный симметрическій видъ, чтобы, наблюдая ихъ съ различныхъ сторонъ, ось симметріи была отовсюду тою же самою вертикальною прямою; вмѣстѣ съ тѣмъ они должны позволять ставить угломѣрный инструментъ по возможности ближе къ своей отвѣсной оси симметріи. Въ мѣстахъ закрытыхъ, напримѣръ въ лѣсу, тригонометрическій знакъ долженъ имѣть платформу на такой высотѣ, чтобы съ нея открывался достаточный кругозоръ, и такой надежности, чтобы угломѣрный инструментъ стоялъ прочно, и наблюдатели могли на ней работать безопасно. Что касается центровъ, то, для обезпеченія долголѣтняго сохраненія, ихъ дѣлаютъ изъ камня или кирпича и закладываютъ на такой глубинѣ, чтобы неосторожные посѣтители не могли ихъ повредить или сдвинуть съ мѣста.

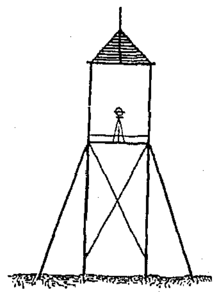
Если мѣстность открытая, и съ высоты штатива угломѣрнаго инструмента можно уже видѣть всѣ сосѣднія тригонометрическія точки, то достаточно построить *простую пирамиду* (черт. 42), состоящую изъ четырехъ жердей, соединенныхъ у вершины съ вертикальнымъ визирнымъ цилиндромъ. Такая пирамида симметрична со всѣхъ сторонъ, и ось инструмента легко поставить въ одной отвѣсной линіи съ осью визирнаго цилиндра. Если горизонтъ закрытъ съ земли, но, поднявшись на высоту 2—5 саж., можно уже видѣть всѣ сосѣдніе знаки, то въ верхней части пирамиды настилается полъ для наблюдателей, а для инструмента строится другая, внутренняя пирамида; такой знакъ называется *двойною пирамидою* (черт. 43). Когда же горизонтъ



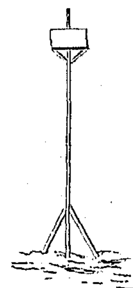
Черт. 42.



Черт. 43.



Черт. 44.



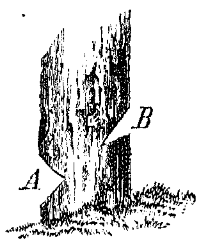
Черт. 45.

открывается только съ весьма значительной высоты, то возводятъ болѣе сложныя постройки, называемыя *сигналами* (черт. 44). Для означенія точекъ 3-го класса, съ которыхъ наблюденія не производятся, допускается ставить простыя *вѣхи*, въ родѣ изображенной на чертежѣ 45.

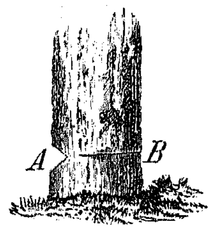
56. Строительные матеріалы. Тригонометрическіе знаки у насъ въ Россіи возводятъ почти исключительно изъ дерева. Всего лучше, если по близости имѣется годный для постройки сухой матеріалъ, именно бревна, жерди и доски; изъ нихъ можно строить знаки и легче, и тщательнѣе. Однако не всегда и даже очень рѣдко можно найти по близости годный для тригонометрическихъ знаковъ сухой матеріалъ; когда его нѣтъ, строитель знаковъ долженъ самъ заготовить потребный матеріалъ и доставить его на мѣсто.

Изъ разныхъ породъ деревьевъ самымъ подходящимъ матеріаломъ для постройки тригонометрическихъ знаковъ считаются сосны, имѣющія обыкновенно прямые, ровные и крѣпкіе стволы. Если по близости нѣтъ сосенъ, то берутъ ели, тополи и другія породы деревъ. Во всякомъ случаѣ надо выбирать деревья, стволъ которыхъ не очень толстъ въ комлѣ и не очень тонокъ у вершины.

Деревья въ лѣсу рубятъ или пилятъ. Для свалки топорами сперва дѣлаютъ вырубку *A* (черт. 46) приблизительно до половины толщины дерева и на поларшина отъ земли; отъ такой вырубки дерево получитъ уже нѣкоторый наклонъ къ сторонѣ *A*, и затѣмъ достаточно небольшой вырубки съ противоположной стороны *B*, чтобы дерево упало отъ собственной тяжести. При употребленіи пилы сперва дѣлаютъ небольшую вырубку *A* (черт. 47) и затѣмъ пилять съ противоположной стороны *B*. Вырубка *A* не даетъ пилѣ заклиниваться и облегчаетъ паденіе дерева въ сторону *A*; кромѣ того, если не сдѣлано предварительной вырубки *A*, то дерево, значительно подпиленное со стороны *B*, можетъ при паденіи расколоться и, слѣдовательно, испортиться. Необходимо впередъ разсчитать направленіе паденія деревьевъ; въ безпорядкѣ сваленныя другъ на друга стволы трудно очищать затѣмъ отъ сучьевъ и вывозить изъ лѣса. При паденіи одного дерева на другое они могутъ ломаться. Въ вѣтренную погоду надо рубить такъ, чтобы дать деревьямъ возможность валиться по вѣтру.



Черт. 46.



Черт. 47.

У срубленныхъ деревьевъ обрубаютъ вершинки и сучья, но кора не снимается, потому что она облегчаетъ обращеніе съ бревнами при перевозкѣ. Кора снимается только послѣ доставки бревенъ на мѣсто постройки; замѣчено, что, спустя нѣкоторое время послѣ рубки, кора отдѣляется легче, чѣмъ съ дерева, только что срубленнаго.

Доставка матеріала на мѣсто постройки представляетъ значительныя трудности, не всегда возрастающія по мѣрѣ увеличенія разстоянія. Гдѣ существуютъ хорошія дороги, тамъ легче доставить издалека готовый сухой лѣсъ, чѣмъ возить недалеко сырыя, только что срубленныя деревья. Въ сѣверной полосѣ Россіи, обильной лѣсами, всего удобнѣе заготовлять строительный матеріалъ и доставлять его на мѣсто зимою, на саняхъ. Перевозка на подводахъ лѣтомъ всегда затруднительнѣе и обходится дороже. Впрочемъ, предварительная заготовка лѣса имѣетъ значеніе только при возведеніи большихъ многоярусныхъ сигналовъ; для постройки же простыхъ пирамидъ, требующихъ всего четырехъ бревенъ и нѣсколькихъ жердей, матеріалъ обыкновенно достается изъ ближайшихъ селеній въ готовомъ видѣ или рубится въ окрестныхъ лѣсахъ, передъ самою постройкою.

Жерди, необходимыя для скрѣпленій, лѣстницъ и пр. всегда легко находятся у мѣстныхъ жителей; въ противномъ случаѣ тоже рубятся въ окрестныхъ лѣсахъ. Труднѣе находить у мѣстныхъ жителей готовыя доски, нужныя для настилки половъ и обшивки верхнихъ частей тригометрическихъ знаковъ. Такъ какъ выпиливать доски изъ сырыхъ бревенъ на мѣстѣ очень мѣшкотно, то можно совѣтовать возить съ собою готовыя доски, купленныя гдѣ нибудь въ городѣ. То же относится къ гвоздямъ и разнымъ желѣзныхъ скрѣпленіямъ.

Доставленный на мѣсто постройки строительный матеріалъ сортируется, очищается отъ коры и нумеруется цвѣтнымъ карандашомъ или зарубками топоромъ. Снятіе коры съ бревенъ необходимо потому, что дерево безъ коры не такъ скоро гніетъ и своею бѣлизною лучше видимо издали, такъ что постройка рѣзко выдѣляется среди окружающихъ растущихъ деревьевъ. Нижніе комлевые концы бревенъ, которые будутъ зарыты въ землю, слѣдуетъ обжигать, чтобы предохранить отъ гніенія подъ вліяніемъ почвенной сырости. Мелкія бревна и жерди, идущія на переводины для половъ, на скрѣпленія и т. п., одновременно съ очисткою отъ коры обтесываются на два канта; отъ этого они плотнѣе прилегаютъ въ мѣстахъ взаимнаго соприкосновенія, и ихъ легче прибивать гвоздями.

Подготовку отдѣльныхъ частей сооруженія, т. е. приготовленіе лѣстницъ, визирнаго цилиндра, переводинъ для половъ и т. д. нужно поручать отдѣльнымъ рабочимъ, сообразно ихъ способностямъ и опытности, такъ, чтобы всѣ части заготовлялись одновременно и поспѣли къ ихъ послѣдовательной сборкѣ.

57. Строительные инструменты. Для возведенія тригонометрическихъ знаковъ нужны разные инструменты, которые строитель долженъ возить съ собою, потому что въ окрестныхъ селеніяхъ ихъ обыкновенно трудно найти въ потребномъ количествѣ и надлежащаго качества. Число различныхъ инструментовъ и вспомогательныхъ для постройки орудій зависитъ отъ рода тригонометрическихъ знаковъ: чѣмъ послѣдніе будутъ выше и сложнѣе, тѣмъ и число инструментовъ должно быть больше.

Для возведенія знаковъ средней высоты (простыхъ и двойныхъ пирамидъ и небольшихъ сигналовъ) нужно имѣть: 10 топоровъ, 2 пилы, 4 молотка, 2 клещей, 2 долота, нѣсколько буравчиковъ разной величины, 1 коловоротъ съ перками, 1 скобель, 4 лопаты, 2 кирки, 2 лома, нѣсколько блоковъ и мѣрную тесьму. Далѣе, для подъема и укрѣпленія бревенъ при самой постройкѣ, необходимо имѣть значительный запасъ канатовъ и веревокъ: одинъ большой канатъ саженей въ 60 длиною и около 3-хъ дюймовъ въ окружности и 5 или 6 концовъ веревокъ по 10 — 20 саженей длиною и около $1^1/_2$ дюйма въ окружности. Канаты и веревки должны быть хорошаго качества, пеньковые, смоленые. Дурной, старый, особенно подгнившій канатъ легко можетъ лопнуть во время подъема бревна, отчего послѣднее упадетъ и сломается; при паденіи бревно можетъ ранить и даже убить рабочихъ. Передъ употребленіемъ подъемнаго каната въ дѣло необходимо каждый разъ тщательно осмотрѣть его по всей длинѣ: иногда и новый канатъ имѣетъ ненадежное мѣсто или случайную порубку топоромъ.

Для постройки большихъ сигналовъ число строительныхъ инструментовъ и канатовъ должно быть больше указаннаго выше, но давать какія нибудь цифры безполезно; все зависитъ отъ числа рабочихъ и опытности строителя, а большіе запасы стѣсняютъ переѣзды съ мѣста на мѣсто.

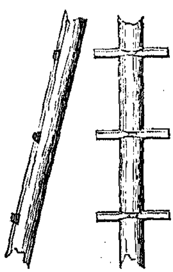
Гвозди, потребные на скрѣпленія, употребляются разной величины: для прибивки ногъ пирамиды къ визирному цилиндру и для укрѣпленія переводинъ половъ нужны большіе корабельные гвозди въ 10—12 дюймовъ длиною, для пришивки досокъ—обыкновенные проволочные гвозди отъ 3 до 6 дюймовъ длиною. Вообще можно положить, что для постройки простой пирамиды нужно 5—10 футовъ гвоздей, а для сигнала 1 пудъ и болѣе. При постройкѣ сигналовъ нерѣдко употребляютъ еще большіе заершенные гвозди, обручное и шинное желѣзо, болты съ гайками, скобки и другія скрѣпленія. Большею частью все это надо имѣть съ собою, потому что очень рѣдко разныя скрѣпленія могутъ быть изготовлены на мѣстѣ договоренными кузнецами. Недостатокъ какой нибудь мелочи нерѣдко задерживаетъ работу, а мѣстные мастера, видя спѣшную необходимость, обыкновенно берутъ за свою работу и матеріалъ несообразныя цѣны.

Для мелкихъ инструментовъ и особенно для гвоздей весьма полезно имѣть запираемые ящики съ перегородками; иначе гвозди разной величины смѣшиваются и теряются. Вообще для порядка въ расходованіи инструментовъ и матеріаловъ необходимо имѣть ихъ опись и поручить наблюденіе за ними надежному рабочему.

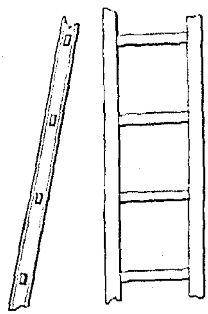
Наконецъ, строитель тригонометрическихъ знаковъ долженъ имѣть зубила и запасъ свинцу, для приготовленія центровъ, и краски и кисти, для окраски обшивочныхъ досокъ.

58. Отдѣльныя части тригонометрическихъ знаковъ. Такъ какъ тригонометрическіе знаки представляютъ сооруженія временныя, то нѣтъ надобности гнаться за красотою и тщательностью. Однако и въ нихъ есть отдѣльныя части, которыя должны быть приготовлены рачительно, не только ради безопасности рабочихъ при постройкѣ, но и для точности наблюденій. Это суть лѣстницы, полы и вершины тригонометрическихъ знаковъ.

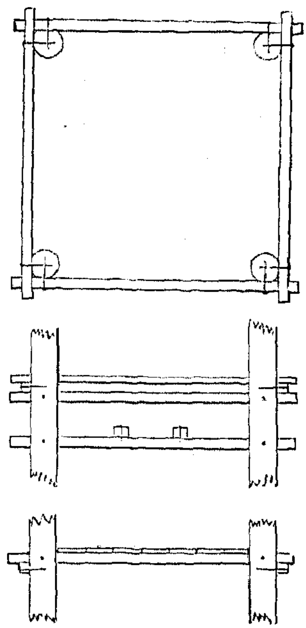
Лѣстницы устраиваются какъ для рабочихъ при постройкѣ, такъ и для подъема наблюдателей. Въ пирамидахъ дѣлаютъ обыкновенно самыя простыя лѣстницы въ видѣ планокъ, прибитыхъ къ одной изъ ногъ (черт. 48). Если имѣющіяся бревна не одинаковой толщины, то для лѣстницы берутъ самое толстое. Планки для ступѐнекъ вытесываются изъ жердей и ихъ дѣлаютъ трехгранными по серединѣ и круглыми по концамъ. Въ бревнѣ выпиливаются и выдалбливаются гнѣзда, и каждая ступенька прибивается затѣмъ двумя гвоздями. Въ сигналахъ, основныя бревна которыхъ стоятъ почти отвѣсно, употребляютъ приставныя лѣстницы, сдѣланныя изъ двухъ жердей со впущенными въ нихъ ступеньками (черт. 49). По окончаніи сборки такой лѣстницы концы ступенекъ расклиниваются, а длинныя лѣстницы кромѣ того



Черт. 48.



Черт. 49.



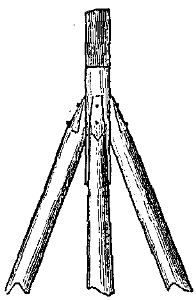
Черт. 50.

связываются двумя или тремя поперечными схватками на гвоздяхъ. Для облегченія движенія по лѣстницамъ разстоянія между ступеньками должны быть одинаковы, около 0.2 сажени.

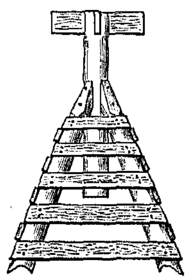
Полы для наблюдателей и промежуточные (въ большихъ сигналахъ) состоятъ изъ толстыхъ переводинъ, прибитыхъ большими гвоздями къ ногамъ или столбамъ знака, и настилочныхъ досокъ, пришитыхъ къ переводинамъ (черт. 50). Для прочной пригонки, въ переводинахъ, въ мѣстахъ ихъ прикрѣпленія къ ногамъ, дѣлаютъ небольшія вырубки, а гвозди для прибивки берутъ большіе, стараясь, чтобы они прошли насквозь черезъ бревна и были бы еще загнуты и забиты съ противоположной стороны. Настилочныя доски должны быть не менѣе

$1^1/_2$ — 2 дюймовъ толщины. Если такихъ досокъ не имѣется, то необходимо къ двумъ нижнимъ переводинамъ прибить не двѣ, а нѣсколько верхнихъ, поперечныхъ. Всѣ доски настилки необходимо прибить къ переводинамъ двумя гвоздями на каждомъ концѣ. Въ верхнемъ полу, гдѣ будутъ помѣщаться наблюдатели, дѣлаютъ отверстіе по срединѣ для болванки стола подъ инструментъ (черт. 43), а во всѣхъ полахъ большихъ сигналовъ — *люки*, у мѣстъ прикрѣпленія лѣстницъ. Только въ нижнемъ полу люка не дѣлается, потому что первая лѣстница всегда можетъ быть прибита снаружи сигнала. Каждый полъ ограждается *перилами* изъ жердей или досокъ, прибитыхъ приблизительно на грудной высотѣ стоящаго человѣка.

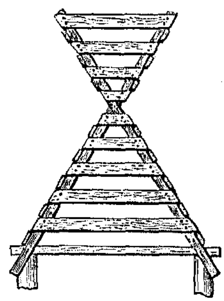
Тригонометрическій знакъ заканчивается на вершинѣ такъ называемымъ *визирнымъ цилиндромъ*, который долженъ пред-



Черт. 51.



Черт. 52.



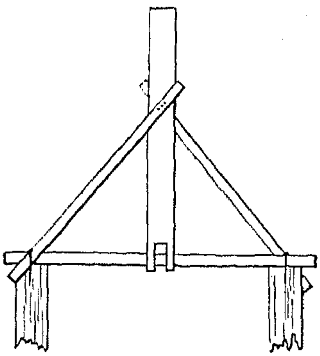
Черт. 53.

ставлять правильно вытесанное круглое бревно и стоять отвѣсно. Способъ скрѣпленія визирнаго цилиндра съ ногами пирамиды показанъ на черт. 51 и 52.

Верхняя часть тригонометрическихъ знаковъ обшивается досками, служащими для облегченія разыскиванія знака издали. Впрочемъ, на большихъ разстояніяхъ весьма часто визирный цилиндръ вовсе не видимъ, и тогда досчатая обшивка сама служитъ прицѣломъ для наблюденій. Понятно, что для точности наблюденій эта обшивка должна представлять симметрическій видъ. Чтобы обшивка своимъ сопротивленіемъ при сильномъ вѣтрѣ не причинила паденія сигнала, ее дѣлаютъ не сплошною, а доски прибиваютъ съ промежутками, какъ показано на черт. 52 и 53.

Кромѣ горизонтальныхъ угловъ наблюдаютъ также и вертикальные. Прицѣломъ при измѣреніи вертикальныхъ угловъ на близкихъ разстояніяхъ можетъ служить линія раздѣла чернаго и бѣлаго цвѣтовъ, которыми иногда окрашивается визирный цилиндръ (черт. 51). На большихъ разстояніяхъ эта линія обыкновенно не видна, и потому къ визирному цилиндру нерѣдко прибиваютъ двѣ взаимно перпендикулярныя дощечки, какъ показано на черт. 52. Наконецъ для видимости съ весьма далекихъ разстояній дѣлаютъ иногда двойную обшивку въ видѣ двухъ пирамидъ, сходящихся своими вершинами (черт. 53).

Обшивочныя доски окрашиваются черною или бѣлою краскою, смотря по тому, проектируется ли верхняя часть тригонометрическаго знака на небо или на землю, лѣсъ и вообще на темный фонъ. Когда обшивка проектируется съ одной стороны на небо, а съ другой на темный фонъ, обшивочныя доски окрашиваются съ одной стороны черною, а съ другой бѣлою краскою. Наконецъ, когда впередъ неизвѣстно, на что будетъ проектироваться вершина, можно красить доски обшивки попеременно бѣлою и черною красками. Краски для обшивочныхъ досокъ составляются изъ бѣлилъ или голландской сажи съ вареннымъ льнянымъ масломъ.



Черт. 54.

На вершинахъ большихъ сигналовъ визирный цилиндръ поддерживается четырьмя жердями, какъ показано на черт. 54. Послѣ установки эти жерди тоже обшиваются досками.

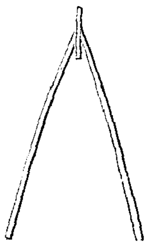
59. Простая пирамида. Простѣйшимъ тригонометрическимъ знакомъ служитъ пирамида, составленная четырьмя бревнами или жердями, соединенными наверху съ визирнымъ цилиндромъ (черт. 42). Хотя для устойчивости достаточно пирамиды о трехъ ногахъ, но такая пирамида не представляла бы симметрической фигуры со всѣхъ сторонъ, и на большихъ разстояніяхъ, когда виденъ не самый визирный цилиндръ, а только обшивка вершины, эта несимметрія могла бы произвести неточность наблюденій, потому что наклоны обшивки не со всѣхъ сторонъ были бы одинаковы.

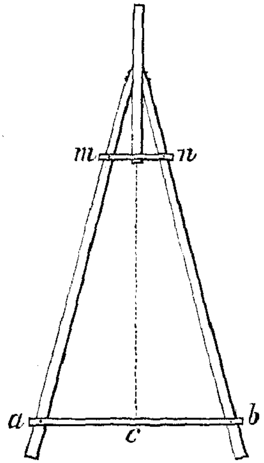
На мѣстѣ, гдѣ рѣшено поставить пирамиду, производится сперва *разбивка*, т. е. при помощи кольевъ и веревки отмѣчаются на землѣ вершины квадрата основанія и затѣмъ вырываются четыре ямы для ногъ. Чтобы получить прямые углы квадрата, натягиваютъ мѣрную тесьму, образовавъ изъ нея прямоугольный треугольникъ, стороны котораго относились бы между собою какъ 3 : 4 : 5. Величина стороны квадрата основанія зависитъ отъ высоты пирамиды и отъ глубины ямъ, т. е. отъ грунта. Когда грунтъ мягкій и, слѣдовательно, можно легко вырыть ямы глубиною въ 4—5 футовъ, сторона квадрата основанія берется равною $^1/_4$ — $^1/_5$ высоты, если же пирамида строится на скалѣ, вовсе безъ рытья ямъ (см. § 63), сторона квадрата увеличивается до $^1/_3$ высоты. Вообще чѣмъ тверже грунтъ и чѣмъ, слѣдовательно, ямы приходится дѣлать менѣе глубокими, тѣмъ, для устойчивости пирамиды, необходимо давать ногамъ большій растворъ.

При рытьѣ ямъ необходимо обратить вниманіе на то, чтобы дно ихъ лежало въ одной горизонтальной плоскости; такимъ образомъ на покатости горы ямы должны имѣть разную глубину. Что касается ширины, то ямы надо дѣлать по возможности у́же, и при твердомъ или вязкомъ грунтѣ стѣнки ихъ можно дѣлать почти отвѣсными.

Постройка пирамиды начинается со сборки визирнаго цилиндра съ двумя взаимно-противоположными ногами, изъ которыхъ на одной сдѣлана уже лѣстница. Однако еще на землѣ надо хорошенько пригнать вершинки всѣхъ четырехъ ногъ въ соотвѣтствующія гнѣзда визирнаго цилиндра, такъ какъ новая пригонка и подтеска наверху, когда двѣ ноги уже поставлены, крайне затруднительна. Точно также въ вершинкахъ ногъ надо заранѣе высверлить дыры для гвоздей и отмѣтить ноги и соотвѣтствующія гнѣзда цифрами цвѣтнымъ карандашомъ, чтобы потомъ не перепутать, какая нога къ какому гнѣзду была пригнана. Если бревна совершенно прямыя и ровныя, то конечно притеска вершинокъ можетъ быть сдѣлана съ любой стороны, но весьма часто бревна кривы, и потому надо заранѣе изслѣдовать ихъ (смотря вдоль), и пригонку къ гнѣздамъ сдѣлать такъ, чтобы всѣ бревна были обращены своими выпуклостями наружу (черт. 55). Въ такомъ случаѣ постройка, получающая видъ сахарной головы, пріобрѣтаетъ устойчивость и имѣетъ большее внутреннее пространство для устройства платформы (если это будетъ двойная пирамида).

Прежде чѣмъ соединить двѣ ноги съ визирнымъ цилиндромъ, надо положить ноги комлями къ соотвѣтствующимъ ямамъ и слѣдить, чтобы визирный цилиндръ получилъ при забивкѣ гвоздей вѣрное положеніе, т. е. чтобы продолженіе его оси дѣлило уголъ, составляемый ногами, пополамъ. Для послѣдней цѣли можно прибить временную планку *ab* (черт. 56) и, отмѣтивъ ея середину *c*, взглядывать отъ вершины и слѣдить, чтобы во время забивки гвоздей продолженіе цилиндра направлялось на *c*. Послѣ прибивки гвоздей верхъ пирамиды скрѣпляютъ еще поперечною планкою *mn*, для которой дѣлаютъ соотвѣтствующія небольшія выпилки въ ногахъ и въ визирномъ цилиндрѣ.

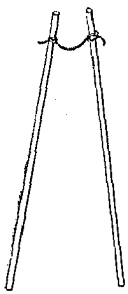

Черт. 55.



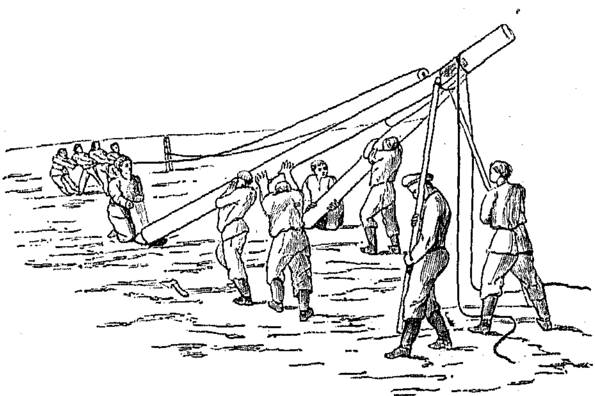
Черт. 56.

Подъемъ двухъ сколоченныхъ ногъ дѣлается при помощи *подпорныхъ досокъ*, *подъемныхъ козелъ* и *каната*. Для подпорныхъ досокъ берутся обрубки толстыхъ досокъ въ 3—4 фута длиною съ дугообразными вырѣзками, которыми они и подставляются подъ бревна. Подъемные козлы (черт. 57) связываются изъ двухъ жердей; смотря по длинѣ и тяжести бревенъ, надо заранѣе приготовить нѣсколько козелъ разной длины (отъ 2 до 4 саженей). Канатъ, служащій для дальнѣйшаго поднятія (сперва подъемъ производится только при помощи подпорныхъ досокъ и подъемныхъ козелъ), привязывается однимъ концомъ къ крѣпкому и прочно забитому колу или къ растущему на корню дереву, а другимъ пропускается въ блокъ, прикрѣпленный къ самому визирному цилиндру или къ одной изъ ногъ у визирнаго цилиндра.

На черт. 58 представленъ первый моментъ подъема двухъ скрѣпленныхъ ногъ. Послѣ поднятія просто руками, рабочіе подставляютъ ближе къ комлямъ подпорныя доски, а у вершинъ—козлы. Кромѣ каната, пропущеннаго въ блокъ, необхо-



Черт. 57.

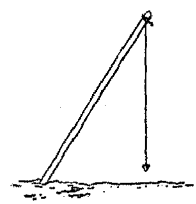


Черт. 58.

димо заранѣе привязать два *оттяжные каната* къ вершинѣ; этими канатами поднятыя ноги будутъ удерживаться въ отвѣсной плоскости, пока не прикрѣпятъ остальныя двѣ ноги. Канаты висятъ пока свободно, и всѣ усилія рабочихъ сосредоточены у ногъ пирамиды. Козлы подставляются сперва въ разведенномъ видѣ и затѣмъ постепенно сводятся вмѣстѣ, отчего вершина подымается. Чтобы комли ногъ не портили вырытыхъ ямъ, въ нихъ ставятъ *спусковыя доски*, за которыми должны слѣдить отдѣльные рабочіе.

Когда наклонъ ногъ достигъ уже приблизительно 40°, то часть рабочихъ можетъ съ пользою тянуть за подъемный канатъ; остальные постепенно передвигаютъ козлы отъ вершины къ комлямъ, вводя послѣдовательно другіе, болѣе высокіе козлы подъ вершины. Подъемъ ногъ, особенно когда онѣ длинны и тяжелы, напримѣръ, изъ сырого, только что срубленнаго лѣса, надо дѣлать осторожно и съ передышками, чтобы излишнею торопливостью не утомить рабочихъ. Нужно регулировать подъемъ общею командою, чтобы вся артель дружно и одновременно прилагала свои усилія. Строитель долженъ заранѣе сообразить число и крѣпость козелъ и распредѣлить рабочихъ на партіи, указавъ каждой партіи ея послѣдовательныя обязанности въ подъемѣ. Безъ такого предварительнаго распредѣленія рабочіе будутъ суетиться и мѣшать другъ другу, а въ случаѣ какой нибудь неудачи потеряютъ довѣріе къ начальнику, безъ чего очень трудно производить вообще всякую работу, а особенно грубую физическую. Ничѣмъ нельзя заслужить бо́льшаго довѣрія въ глазахъ простолюдиновъ, какъ спокойствіемъ и хладнокровіемъ, соединенными съ знаніемъ дѣла и предвидѣніемъ всѣхъ случайностей.

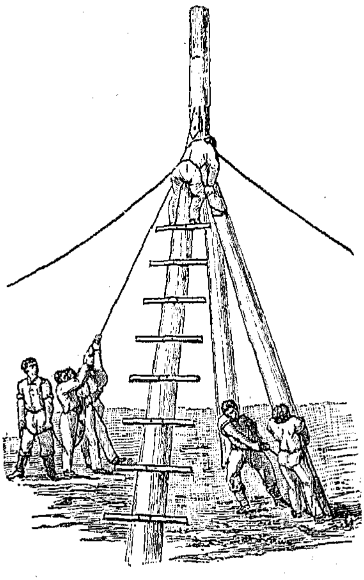
Когда наклонъ ногъ перевалилъ за 40—45°, козлы становятся уже безполезными. Всѣ рабочіе устремляются къ канатамъ и свободно довершаютъ установку ногъ въ отвѣсное положеніе; при этомъ нѣсколько человѣкъ должны взяться и за конецъ задняго оттяжного каната, чтобы предупредить перевѣсъ ногъ впередъ. Когда ноги станутъ въ отвѣсное положеніе, рабочіе привязываютъ временно концы оттяжныхъ канатовъ къ заранѣе приготовленнымъ кольямъ или къ деревьямъ на корню. Прежде чѣмъ привязать ихъ окончательно, строитель долженъ убѣдиться, что визирный цилиндръ принялъ отвѣсное положеніе. Для этого онъ отходитъ отъ мѣста постройки саженъ на 15—20, послѣдовательно по двумъ взаимно-перпендикулярнымъ направленіямъ, и смотритъ на визирный цилиндръ черезъ нить отвѣса, подвѣшеннаго къ колу (черт. 59). Если цилиндръ не вертикаленъ, то строитель приказываетъ подтянуть тотъ или другой конецъ оттяжного каната, подрыть или подсыпать одну изъ ямъ. Какъ только цилиндръ приметъ надлежащее положеніе, рабочіе засыпаютъ ямы двухъ поставленныхъ ногъ. Если грунтъ очень мягкій, то не мѣшаетъ помимо земли, полученной



Черт. 59.

изъ этихъ ямъ, бросать туда еще камни. Засыпка ямъ производится послѣдовательными слоями, утрамбовывая каждый слой толстыми и короткими кольями или особо сдѣланными трамбовками.

Для подъема остальныхъ двухъ ногъ пирамиды служитъ канатъ, пропущенный въ блокъ и теперь уже освободившійся. Одинъ его конецъ привязывается къ ногѣ приблизительно на сажень отъ вершины (чтобы оставить конецъ ноги свободнымъ для прибивки къ визирному цилиндру), а за другой рабочіе тянутъ внизъ (черт. 60). Чтобы канатъ не сдавалъ, къ ногѣ прибиваютъ гвоздь, у мѣста привязки. Передъ подъемомъ ногъ одинъ изъ наиболѣе расторопныхъ и безстрашныхъ плотниковъ взбирается по лѣстницѣ наверхъ къ визирному цилиндру, имѣя съ собою молотокъ и гвозди. Когда вершинка ноги будетъ достаточно поднята, этотъ рабочій хватаетъ ее руками и вправляетъ въ соотвѣтствующее гнѣздо въ визирномъ цилиндрѣ, тогда какъ рабочіе внизу опускаютъ комель ноги въ яму. Въ случаѣ необходимости повернуть уже опущенное въ яму бревно около оси, надо вращать его топоромъ или особою веревочною петлею съ коломъ. Какъ только нога стала на свое мѣсто, ее прибиваютъ вверху гвоздями, яму засыпаютъ и подъемный канатъ отвязываютъ. Послѣ этого, такимъ же порядкомъ, поднимаютъ и устанавливаютъ четвертую ногу пирамиды. Опытъ показалъ, что, не смотря на предварительное измѣреніе бревенъ и глубинъ ямъ, весьма часто ямы оказываются или недостаточно или слишкомъ глубокими. Поэтому всегда надо имѣть подъ рукою ломы, колья и лопаты, дабы тотчасъ подрыть или засыпать яму. Когда обѣ ноги



Черт. 60.

прибиты, и вся пирамида прочно стоитъ на своихъ четырехъ ногахъ, оттяжные канаты отвязываются.

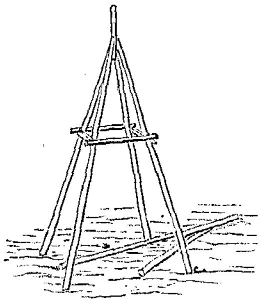
Поставленная пирамида скрѣпляется поясками и андреевскими крестами, а верхняя ея часть обшивается досками и окрашивается. Для скрѣпленій идутъ простыя жерди, частью заранѣе приготовленныя, частью отъ ненужныхъ болѣе подъемныхъ козелъ. Прибивая пояски и андреевскіе кресты, рабочіе поднимаются наверхъ по лѣстницѣ и на люлькѣ, при помощи подъемнаго каната и блока, или же пользуются прибитыми уже жердями.

Для постройки пирамиды въ 5—6 саж. высоты достаточно 10 рабочихъ и 5 часовъ времени. Небольшія пирамиды можно строить и скорѣе, особенно если вмѣсто сырыхъ берутъ сухія бревна, или просто толстыя жерди около 5 дюймовъ въ діаметрѣ у комлевого срѣза. Для ускоренія работы весьма часто вовсе не дѣлаютъ лѣстницы, а для рабочаго вверху прибиваютъ одну поперечную планку. Впрочемъ скорость постройки главнымъ образомъ зависитъ отъ опытности строителя и рабочихъ. Первая пирамида строится обыкновенно чуть не цѣлый день, а послѣдующія по нѣсколько въ одинъ день.

60. Двойная пирамида. Постройка двойной пирамиды (черт. 43 и 62) въ общихъ чертахъ ничѣмъ не отличается отъ постройки простой. Разница лишь въ томъ, что надо заранѣе приготовить части для двухъ отдѣльныхъ пирамидъ, причемъ высота внутренней зависитъ отъ высоты, съ которой открывается свободный кругозоръ. Когда построена наружная большая пирамида, то на требуемой высотѣ прибивается горизонтальный поясокъ изъ толстыхъ жердей, которыя будутъ поддерживать полъ (черт. 61). Набросавъ сперва временной полъ изъ приготовленныхъ для него досокъ, рабочіе поднимаютъ внутреннюю пирамиду, сколачиваемую послѣдовательно, какъ и наружная, и устанавливаютъ ее такъ, чтобы оси ея болванки и визирнаго цилиндра были приблизительно въ одной отвѣсной прямой.

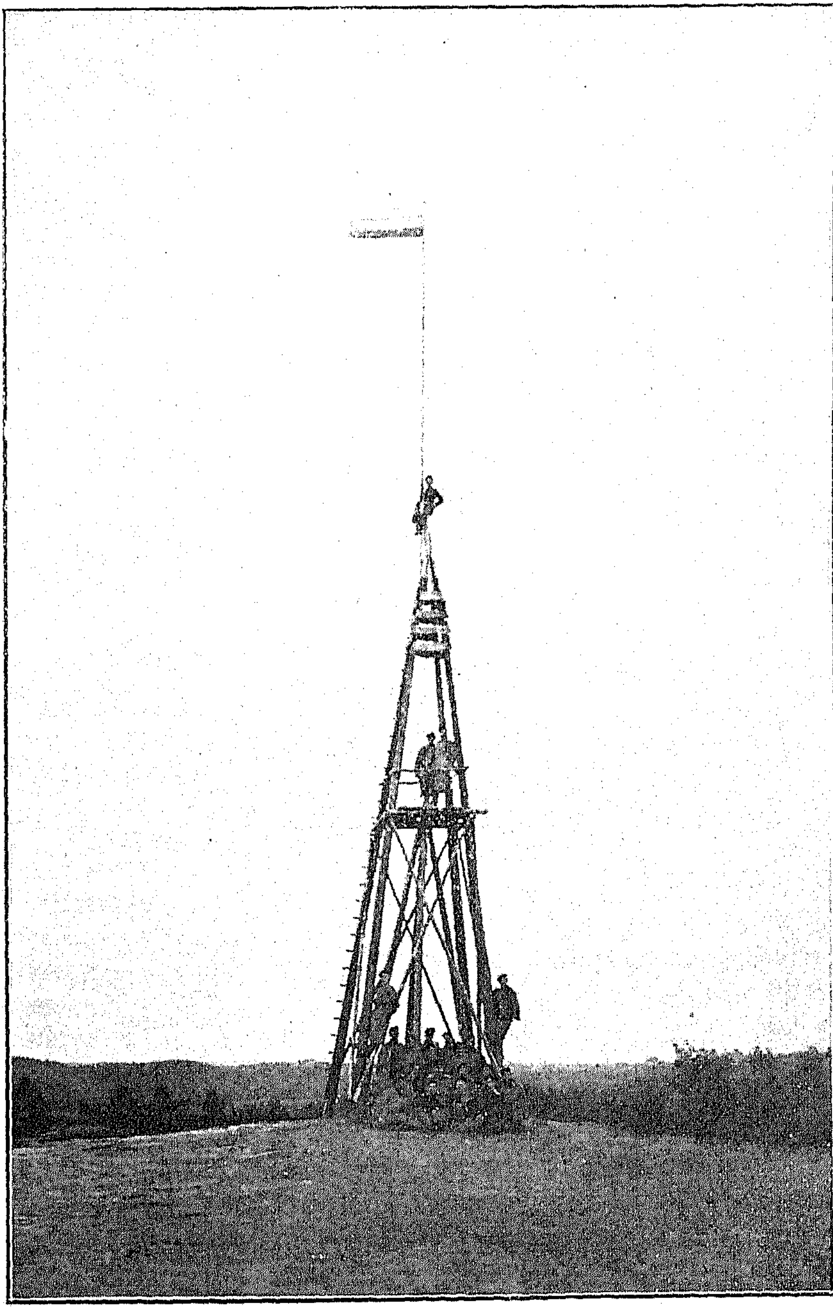
Благодаря возможности безопасно работать на временной настилкѣ, подъемъ и постановка внутренней пирамиды совершаются очень удобно и скоро. Ямы для ногъ внутренней пирамиды вырываются обыкновенно въ промежуткахъ между ямами для ногъ наружной. Внутренняя пирамида, которая будетъ служить подставкой (штативомъ) для угломѣрнаго инструмента, должна быть очень прочно и надежно скрѣплена крестами изъ жердей, чтобы она *не колебалась* и *не дрожала* отъ вѣтра. На верхній срѣзъ болванки внутренней пирамиды прибиваются одна или двѣ толстыя доски, такъ что образуется какъ бы столикъ для инструмента.

Когда внутренняя пирамида окончательно поставлена, тогда приступаютъ къ чистой настилкѣ пола платформы. Для этого доски тщательно прилаживаются одна къ другой, пришиваются гвоздями къ переводинамъ и неровности ихъ концовъ спиливаются. При устройствѣ пола надо обращать особое вниманіе на то, чтобы настилочныя доски отнюдь *не касались* болванки внутренней пирамиды; въ противномъ случаѣ всякое сотрясеніе пола отъ ходьбы по нему наблюдателя будетъ передаваться болванкѣ и самому инструменту. Въ двухъ среднихъ доскахъ пола дѣлаютъ большія полукруглыя вырѣзки съ такимъ разсчетомъ, чтобы между краями досокъ и болванкою внутренней пирамиды остались промежутки дюйма въ два (на случай перемѣщеній отъ усыханія ногъ обѣихъ пирамидъ). Если доски такъ узки, что простыхъ вырѣзокъ въ нихъ недостаточно, то необходимо составлять середину пола изъ короткихъ обрѣзковъ досокъ, поддерживаемыхъ добавочными поперечными жердями.



Черт. 61.

Имѣя въ виду, что внутри верхней части наружной пирамиды должно быть достаточно мѣста для кругового обхода наблюдателя, обыкновенно, уже при самомъ сколачиваніи ногъ, помимо пользованія случайною кривизною, ихъ нарочно распираютъ особыми поперечными планками, отчего вся пирамида пріобрѣтаетъ потомъ видъ сахарной головы. Когда наружная пирамида поставлена, то нѣкоторыя изъ упомянутыхъ планокъ могутъ помѣшать установкѣ внутренней пирамиды. Тогда, прежде

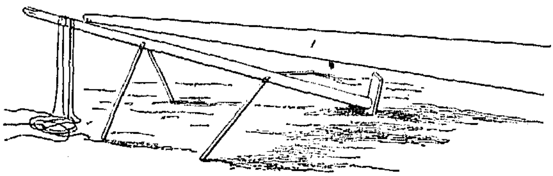


Черт. 62.

чѣмъ обрубать эти планки, надо прибить другія, въ видѣ наружнаго пояска.

Постройка двойной пирамиды требуетъ крупныхъ, прочныхъ бревенъ и большей тщательности въ пригонкѣ отдѣльныхъ частей, поэтому, при 10 рабочихъ, на ея постройку требуется отъ 8 до 10 часовъ.

61. Простой сигналъ. Платформа пирамиды не можетъ быть устроена выше двухъ третей длины бревенъ, потому что внутреннее пространство подъ самымъ визирнымъ цилиндромъ очень тѣсно. Если инструментъ необходимо поднять на полную высоту имѣющихся бревенъ, то строятъ простой сигналъ (черт. 44), состоящій изъ четырехъ столбовъ, поставленныхъ почти отвѣсно, скрѣпленныхъ по высотѣ нѣсколькими поясками съ настланными на нихъ полами и поддерживаемыхъ подпорами. Сторона квад-

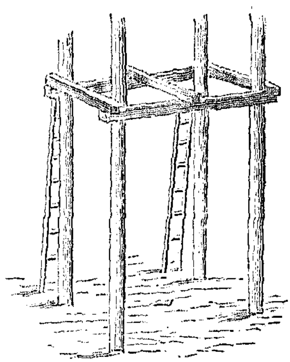


Черт. 63.

рата основанія сигнала берется обыкновенно отъ $^1/_5$ до $^1/_6$ высоты, отъ 10 до 12 футовъ. Ямы для столбовъ вырываются глубиною отъ 4 до 5 футовъ.

Постройка начинается съ установки въ отвѣсное положеніе четырехъ основныхъ столбовъ, причемъ подъемъ каждаго столба отличается отъ подъема двухъ ногъ простой пирамиды только тѣмъ, что столбъ можетъ при подъемѣ качаться во всѣ стороны, и потому къ вершинѣ его необходимо привязать четыре оттяжныхъ каната, которыми, послѣ подъема, столбъ и устанавливается въ отвѣсномъ положеніи. Привязка блока съ подъемнымъ канатомъ, употребленіе подпорныхъ и спусковыхъ досокъ и подъемныхъ козелъ описаны въ § 59 и изображены на чертежѣ 63. Оттяжные канаты каждаго столба должны быть привязаны къ отдѣльнымъ кольямъ, чтобы случайно ослабѣвшій или вырвавшійся колъ не могъ повлечь паденія двухъ или болѣе столбовъ. Во время подъема необходимо разсчитывать движеніе столбовъ вверхъ, дабы оттяжные канаты прежде поставленныхъ столбовъ не мѣшали подъему послѣдующихъ. Послѣ установки положеніе каждаго столба вывѣряется отвѣсомъ (черт. 59), а ямы засыпаются и плотно утрамбовываются.

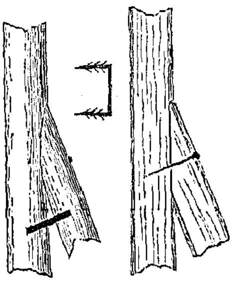
Переводины для перваго пола прибиваются рабочими, поднимающимися по приставленнымъ лѣстницамъ (черт. 64), которыя заготовляются заранѣе для сообщенія между полами; самыя переводины подаются рабочими снизу при помощи канатовъ, пропущенныхъ въ блоки. Для тщательности пригонки переводинъ, рабочіе наверху сперва только намѣчаютъ мѣста вырубокъ, а самыя вырубки и отверстія для гвоздей дѣлаются внизу, послѣ чего переводины опять подымаются и укрѣпляются на требуемыхъ мѣстахъ. Необходимо слѣдить, чтобы переводины имѣли горизонтальное положеніе. Для этого обыкновенно достаточно взглядывать вдоль переводины: продолженіе ея должно упираться въ край отдаленнаго горизонта. Среди лѣса, или вообще когда отдаленный горизонтъ закрытъ, для повѣрки горизонтальности переводинъ пользуются небольшимъ ватерпасомъ. Послѣ прибивки двухъ противоположныхъ переводинъ, черезъ нихъ перебрасываютъ нѣсколько досокъ и затѣмъ прибиваютъ двѣ или три другія переводины; къ этимъ переводинамъ пришиваются доски пола. Послѣ устройства пола и огражденія его перилами, лѣстницы втаскиваются на эту первую платформу и такимъ же порядкомъ устраиваются второй и слѣдующіе полы.



Черт. 64.

Если бы лѣстницы не были готовы ко времени устройства половъ, то рабочіе могутъ подыматься на люлькахъ, при помощи канатовъ, пропущенныхъ въ блоки, привязанные къ вершинамъ столбовъ. Этими же канатами или просто веревками пользуются для подаванія рабочимъ досокъ, переводинъ и нужныхъ имъ инструментовъ. Доски и другіе предметы при подъемѣ надо привязывать на петлѣ, такъ, чтобы они не срывались и чтобы ихъ легко было отвязывать потомъ наверху, послѣ подъема.

Послѣ устройства каждой платформы съ поломъ столбы сигнала стягиваются къ серединѣ при помощи ослабленія наружныхъ и подтягиванія внутреннихъ оттяжныхъ канатовъ. Вслѣдствіе этого сигналъ пріобрѣтаетъ болѣе устойчивости и изящества. Понятно, что при стягиваніи столбовъ всѣ рабочіе должны сойти внизъ, а строитель—слѣдить по отвѣсамъ за тѣмъ, чтобы столбы стягивались равномѣрно къ серединѣ, и постройка имѣла правильную, симметрическую фигуру.



Черт. 65.

Вслѣдъ за устройствомъ перваго или второго пола ставятъ боковыя подпоры, числомъ 4 или 8. Верхнія части подпоръ предварительно вытесываются въ видѣ желоба, чтобы онѣ плотно прилегали къ столбамъ. Подпоры прибиваются толстыми корабельными гвоздями или желѣзными скобками съ заершенными загнутыми концами (черт. 65). Нижніе же комлевые концы подпоръ ставятъ въ ямы, глубиною въ 2—3 фута. Подпоры подымаются и ставятся на мѣсто при помощи каната, совершенно подобно тому, какъ поднимаются и ставятся двѣ послѣднія ноги простой пирамиды.

Когда настланъ послѣдній, верхній полъ для наблюдателей, тогда устраиваютъ внутреннюю пирамиду или особое приспособленіе для инструмента. Въ зависимости отъ высоты столбовъ сигнала и имѣющагося въ распоряженіи строителя лѣса внутренняя пирамида можетъ стоять совершенно независимо на землѣ, какъ объяснено при описаніи постановки двойной пирамиды (§ 60), или же ноги внутренней пирамиды упираются въ пятки, вырубленныя въ столбахъ; при этомъ стараются, чтобы ноги внутренней пирамиды составляли продолженіе подпоръ, отчего инструментъ будетъ стоять прочнѣе. Если основные столбы такъ надежны, что нѣтъ причины опасаться ихъ шатанія, то можно не строить внутренней пирамиды со стоникомъ для инструмента, а ставить инструментъ на ту самую треногу, на которой онъ устанавливается при наблюденіяхъ съ земли, но въ этомъ случаѣ для ножекъ штатива прибиваютъ особыя толстыя планки на футъ ниже верхняго пола, въ досках котораго дѣлаютъ для ножекъ соотвѣтствующія отверстія.

Устройство крыши сигнала въ общихъ чертахъ показано на черт. 54. Здѣсь остается добавить, что всѣ отдѣльныя ея части, какъ-то визирный цилиндръ, планки, стропила и обшивочныя доски необходимо заготовить и приладить еще на землѣ, чтобы при сборкѣ ея наверху сигнала не было никакихъ недоразумѣній. Системы крышъ бываютъ весьма разнообразны: проще всего прибить сперва къ верхушкамъ основныхъ столбовъ двѣ діагональныя планки и на мѣсто ихъ пересѣченія поставить визирный цилиндръ, внизу котораго выдолблены особые пазы. При окончательной установкѣ визирнаго цилиндра надо слѣдить, чтобы онъ принялъ отвѣсное положеніе.

Въ заключеніе устанавливаются окончательно лѣстницы между полами и весь сигналъ скрѣпляется діагональными жердями въ видѣ андреевскихъ крестовъ. Для сбереженія времени эти скрѣпленія прибиваются свободными рабочими въ то самое время, когда другіе рабочіе устраиваютъ крышу.

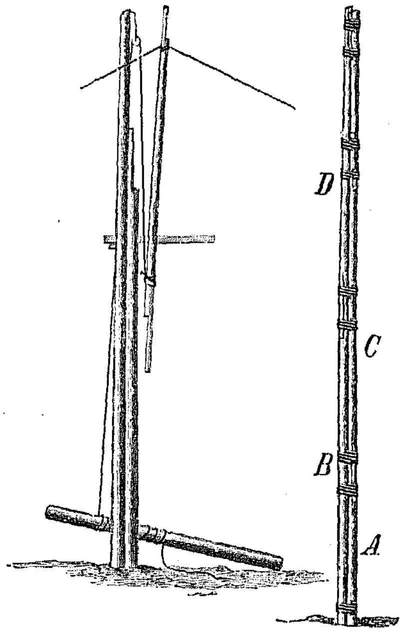
Постройка простого сигнала даже съ опытными рабочими продолжается два дня. Быстрота достигается главнымъ образомъ умѣлымъ распредѣленіемъ рабочихъ и разъ избранной неизмѣнной системой постройки.

62. Сложный сигналъ. Если высота имѣющихся бревенъ не достаточна для открытія кругозора, то приходится составлять столбы сигнала изъ нѣсколькихъ сращенныхъ между собою бревенъ, и сигналъ получаетъ названіе сложнаго. Система постройки сложныхъ сигналовъ бываетъ весьма разнообразна. Если имѣется сухой лѣсъ, то можно еще на землѣ составить столбы изъ двухъ, соединенныхъ между собою бревенъ, и постройка самого сигнала ничѣмъ не отличается отъ вышеописанной. Бревна соединяются при помощи замковъ или вырубокъ въ полъ-дерева. Прочность скрѣпленія достигается вбитыми гвоздями, болтами съ гайками или обмотками обручнымъ желѣзомъ.

Если въ распоряженіи строителя не имѣется сухого лѣса, то поднимать съ земли нарощенныя бревна очень затруднительно и лучше поставить и скрѣпить сперва простой сигналъ (безъ крыши), а затѣмъ поочередно къ каждому столбу прикрѣпить ихъ верхнія части, называемыя *надтачками*. Надтачки обтесываются на землѣ такъ, чтобы онѣ пришлись плотно къ соотвѣтствующимъ мѣстамъ вершинъ основныхъ столбовъ. Къ вершинѣ надтачки привязываютъ четыре оттяжныя веревки, а къ комлю тотъ канатъ, которымъ надтачка будетъ подниматься наверхъ, при помощи блока. Привязывая оттяжныя веревки, необходимо впередъ сообразить, какъ онѣ расположатся послѣ подъема: можетъ случиться, что оттяжныя веревки основныхъ столбовъ (эти веревки не снимаются до окончанія постройки) или подпоры помѣшаютъ свободному движенію надтачки вверхъ. Иногда къ столбамъ прибиваютъ временныя жерди, служащія какъ бы направляющими при подъемѣ надтачки. Надтачки подымаются вдоль соотвѣтствующихъ имъ столбовъ съ внутренней стороны сигнала, и потому крайнія доски половъ не должны быть еще пришиты. На каждомъ полу подъемъ прерывается, надтачка ставится на доски пола, а рабочіе отдыхаютъ и исправляютъ положеніе вершины надтачки при помощи оттяжныхъ веревокъ. Когда верхняя часть надтачки выйдетъ за вершину столба, полезно надтачку и столбъ скрѣпить хомутами изъ концовъ веревокъ, причемъ у каждаго хомута долженъ находиться особый рабочій, помогающій надтачкѣ скользить по столбу. Цѣль хомутовъ—удерживать надтачку въ отвѣсномъ положеніи и не давать ей опрокинуться, что случается, не смотря на регулированіе вершины оттяжными веревками. Чтобы легче было подымать тяжелую надтачку, нижній конецъ подъемнаго каната можно обвить около особаго бревна (черт. 66), къ которому и прилагается уже сила рабочихъ. Подъемъ идетъ шагъ за шагомъ; какъ только вспомогательное бревно опустится до земли, рабочіе вверху закрѣпляютъ хомуты, а нижніе рабочіе приводятъ бревно опять въ наклонное положеніе и передергиваютъ подъемный канатъ.

Когда надтачка дойдетъ до своего мѣста, ее окончательно скрѣпляютъ со столбомъ большими гвоздями, отверстія для которыхъ должны быть высверлены заранѣе, еще на землѣ. Скрѣпленіе можно дѣлать также обручнымъ желѣзомъ. Послѣ подъема и укрѣпленія всѣхъ четырехъ надтачекъ дѣлаютъ верхніе полы, а затѣмъ, если нужно, подобнымъ же образомъ поднимаютъ и укрѣпляютъ вторыя надтачки, но онѣ должны быть непремѣнно меньше и легче первыхъ. Наконецъ устраиваютъ крышу, общія скрѣпленія сигнала и снимаютъ канаты и оттяжныя веревки.

Если впередъ уже извѣстно, что одной надтачки будетъ недостаточно, то лучше вовсе не прибѣгать къ нимъ, а каждый столбъ дѣлать двойнымъ съ самаго основанія, какъ показано на черт. 67, причемъ замки соединеній отдѣльныхъ частей, приготовленныхъ тщательно еще на землѣ, должны конечно чередоваться. Сперва подымаютъ и ставятъ два нижнихъ столба A и B, соединенныхъ вмѣстѣ хомутами изъ обручнаго или шиннаго желѣза. Затѣмъ послѣдовательно ставятъ столбы C, D и т. д., подымая ихъ подобно надтачкамъ. Существенная разница здѣсь въ томъ, что послѣдующія бревна держатся не на



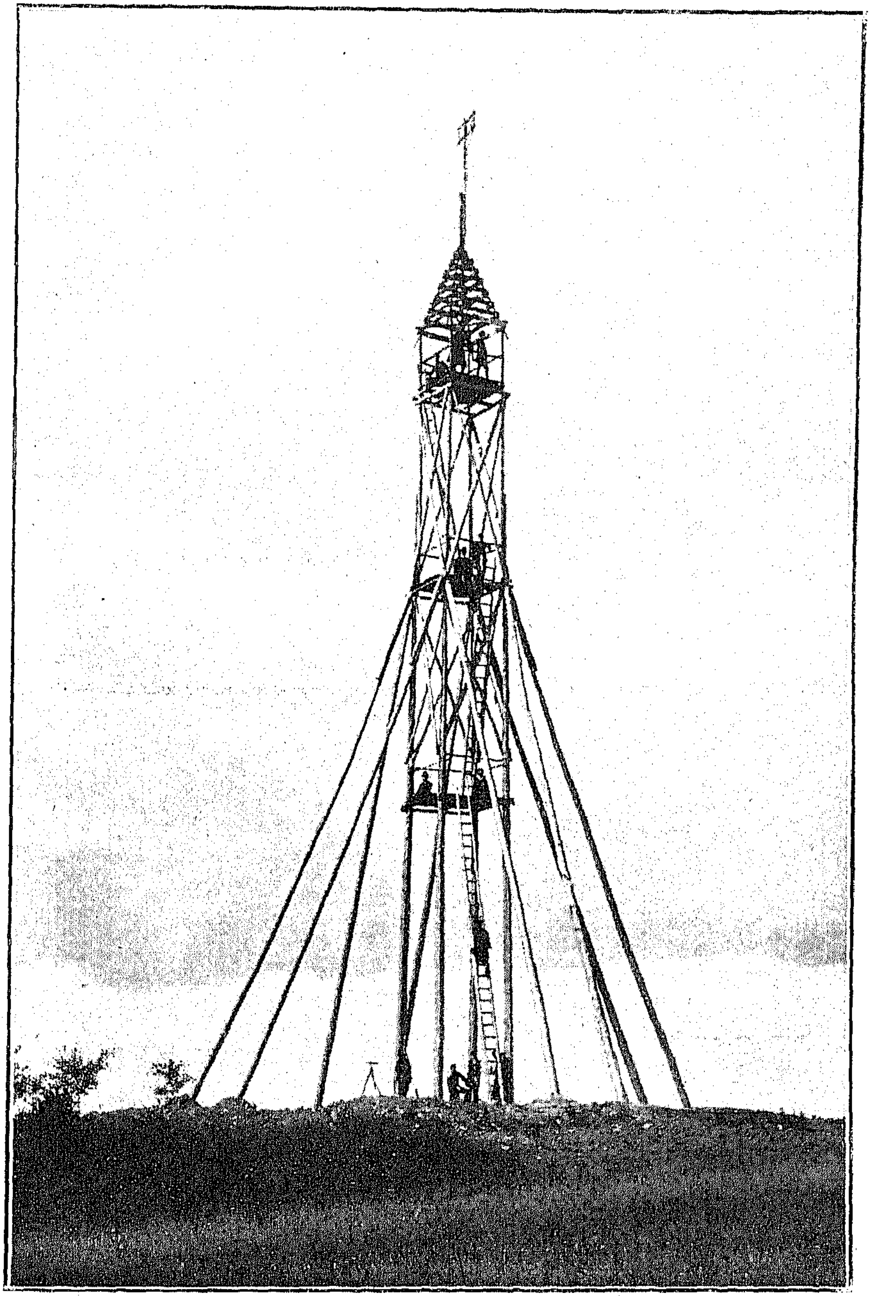
Черт. 66. Черт. 67.

однихъ гвоздяхъ, а имѣютъ прочную опору въ соотвѣтствующемъ нижнемъ бревнѣ. Полы устраиваются подъ каждымъ замкомъ, которые должны располагаться на одной высотѣ для всѣхъ столбовъ; стоя на этихъ полахъ, рабочіе могутъ удобно и безопасно производить скрѣпленія.

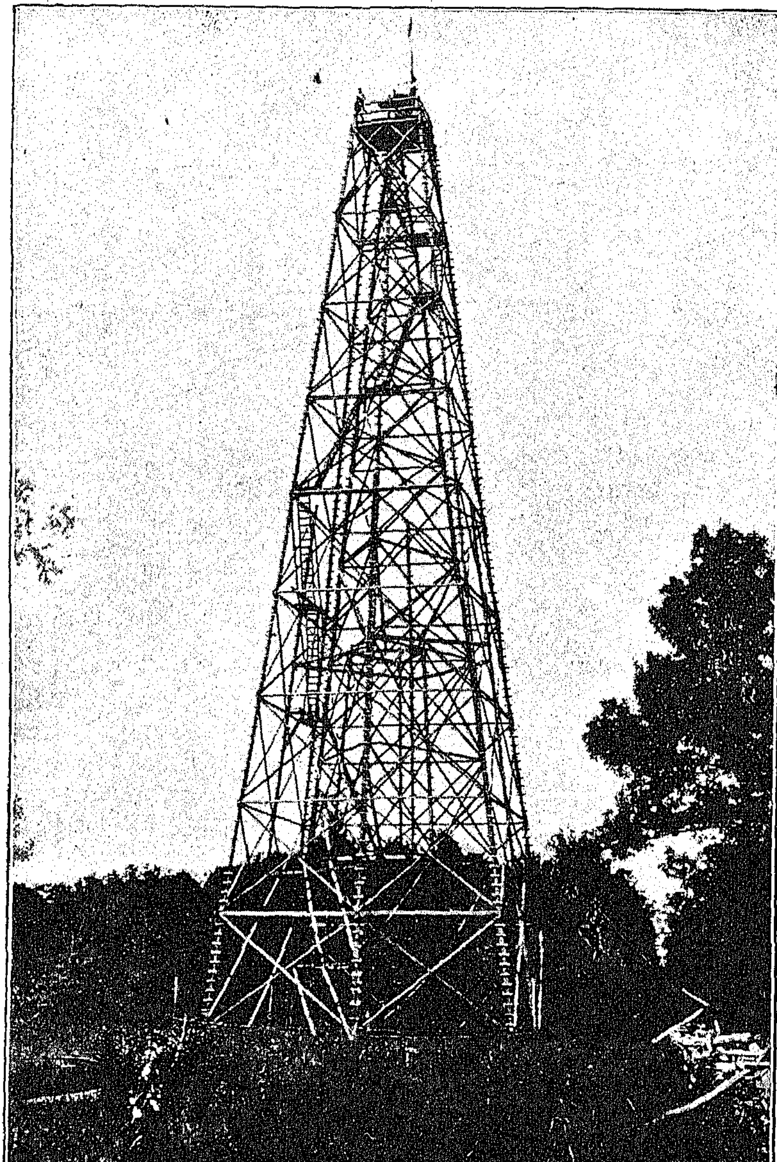
Двойные многоярусные столбы всего лучше составлять изъ сухихъ бревенъ, изъ толстыхъ брусьевъ и даже просто изъ толстыхъ досокъ; въ послѣднемъ случаѣ можно составлять столбы изъ трехъ и четырехъ срощенныхъ досокъ, подобно тому, какъ составляются такъ называемые коренные лѣса, временно возводимые при постройкѣ большихъ каменныхъ зданій. Съ сухими брусьями или толстыми досками обращаться несравненно удобнѣе, чѣмъ съ тяжелыми сырыми бревнами, и если подъ рукою имѣется соотвѣтствующій матеріалъ, то нельзя не совѣтовать пользоваться имъ и дѣлать составные столбы даже для невысокихъ тригонометрическихъ знаковъ.

Если одиночныхъ подпоръ недостаточно, то дѣлаютъ двойную систему подпоръ. Въ такихъ случаяхъ переводины нижнихъ половъ выдвигаются наружу съ такимъ разсчетомъ, чтобы онѣ могли служить мѣстами скрѣпленія внѣшнихъ подпоръ; кромѣ того самыя подпоры соединяются между собою особыми жердями для приданія всему сооруженію большей жесткости. Внѣшнія подпоры можно замѣнять оттяжками изъ толстыхъ телеграфныхъ проволокъ, привязанныхъ къ прочнымъ кольямъ, забитымъ въ землю.

Понятно, что сложные многоярусные сигналы можно возводить только изъ готоваго сухого лѣса и съ хорошими опытными плотниками, которые зачастую сами могутъ дать полезные совѣты неопытному строителю. Однако, какъ бы прочно ни дѣлались скрѣпленія, все же большіе сигналы если и не шатаются, то дрожатъ отъ вѣтра, и потому, вообще говоря, надо стараться по возможности избѣгать постройки очень высокихъ сигналовъ. Трудности постройки необходимо имѣть въ виду во время производства рекогносцировокъ (см. § 52). На чертежѣ 68 изображенъ сигналъ Петербургской тріангуляціи «Озертицы», высотою въ 12 саженей, а на чертежѣ 69 сигналъ тріангуляціи въ Сѣверной Америкѣ «Гринъ» (Green Station), высотою въ 22 саж. Во время постройки такихъ большихъ и сложныхъ сигналовъ надо соблюдать крайнюю осторожность; подъемъ основныхъ столбовъ и падтачекъ отнюдь не слѣдуетъ дѣлать во время вѣтренной и ненастной погоды. Лучше переждать нѣсколько дней, чѣмъ рисковать здоровьемъ и жизнью рабочихъ. Паденіе рабочаго, окончившееся его смертью, производитъ удручающее впечатлѣніе на товарищей и подрываетъ довѣріе къ строителю.

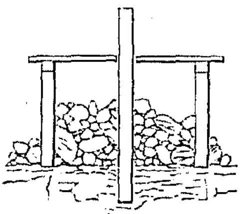


Черт. 68.

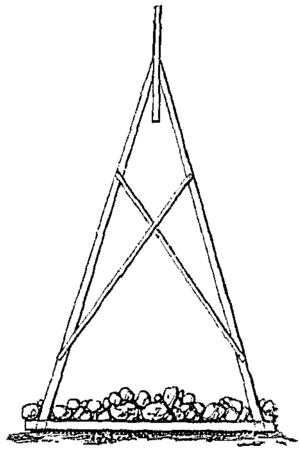


Черт 69.

63. Другіе виды тригонометрическихъ знаковъ. Смотря по мѣстнымъ условіямъ и по имѣющемуся въ распоряженіи строителя матеріалу, виды тригонометрическихъ знаковъ бываютъ чрезвычайно разнообразны. Въ степяхъ и горахъ, гдѣ нѣтъ лѣса и доставка его очень затруднительна, складываютъ просто кучи камней или дерна, въ середины которыхъ ставится короткое вертикальное бревно, служащее какъ прицѣломъ для наблюденія, такъ и подставкою для инструмента. Для наблюдателей иногда дѣлаютъ вокругъ центральнаго бревна небольшую платформу (черт. 70). Въ мѣстахъ скалистыхъ, но богатыхъ лѣсомъ, какъ, напримѣръ, у насъ въ Финляндіи, по невозможности рыть



Черт. 70.



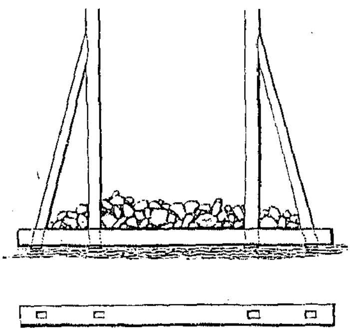
Черт. 71.

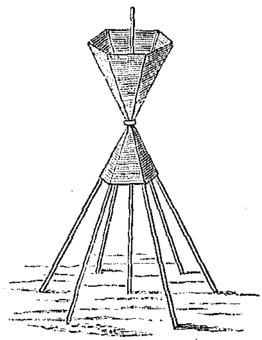
ямы, комлевые концы ногъ пирамидъ соединяютъ жердями, прибиваемыми большими гвоздями. На эти жерди наваливаютъ затѣмъ камни или бревна (черт. 71). При постройкѣ же сигнала, комлевые концы столбовъ и подпоръ впускаются шипами въ большія, горизонтально положенныя бревна, называемыя лежнями. На рамы, образованныя этими лежнями, кладутъ для устойчивости постройки доски или жерди, а на нихъ камни (черт. 72).

Для лучшей видимости устраиваютъ иногда легкія пирамиды изъ нѣсколькихъ жердей, связанныхъ вмѣстѣ на нѣкоторомъ разстояніи отъ вершины. Въ Голландской Индіи многіе знаки состояли изъ связанныхъ такимъ образомъ бамбуковыхъ жердей, какъ показано на черт. 73.

Въ степныхъ мѣстахъ, гдѣ жители имѣютъ обыкновеніе пускать палы, т. е. выжигать весною прошлогоднюю траву, кругомъ тригонометрическаго знака необходимо вырыть ровикъ и насыпать валикъ.

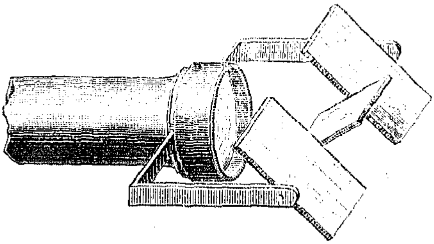
Необходимо замѣтить, что хотя тригонометрическіе знаки и представляютъ временныя сооруженія, однако строитель долженъ принять мѣры, чтобы знаки простояли до минованія въ нихъ надобности. Поэтому о каждомъ построенномъ знакѣ сообщается мѣстнымъ властямъ съ просьбою охранять его отъ намѣренныхъ поврежденій. Въ Сѣверной Америкѣ, гдѣ населеніе привыкло относиться съ уваженіемъ къ тригонометрическимъ работамъ, геодезисты признаютъ достаточнымъ прибивать къ знакамъ небольшіе куски холста съ напечатаннымъ на нихъ значеніемъ знака и просьбою не трогать его. Вообще можно посовѣтовать допускать во время постройки мѣстныхъ жителей, являющихся обыкновенно изъ простого любопытства. При этомъ не мѣшаетъ растолковать имъ значеніе тригонометрическаго знака и иногда воспользоваться ихъ присутствіемъ въ качествѣ рабочихъ, или получить неожиданныя цѣнныя указанія.


Черт. 72.

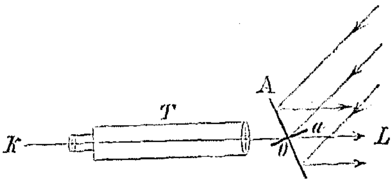

Черт. 73.

64. Геліотропы. На разстояніяхъ, превосходящихъ 20—30 верстъ, даже большіе сигналы не всегда хорошо видны; особенно трудно наблюдать знаки, проектирующіеся на темный фонъ, напримѣръ, наблюдать знакъ, построенный въ долинѣ, съ вершинъ окружающихъ горъ. Въ такихъ случаяхъ иногда пользуются правильно отраженными лучами Солнца. Приборы, служащіе для отраженія солнечныхъ лучей съ одной тригонометрической точки на другую и имѣющіе приспособленіе для регулированія направленія этихъ лучей, называются *геліотропами*; они предложены и употреблены впервые Гауссомъ (въ 1820 году), который однажды былъ пораженъ яркостью отраженія солнечныхъ лучей отъ окна отдаленной кирки. Въ настоящее время существуетъ нѣсколько системъ геліотроповъ; здѣсь описаны простѣйшіе, примѣняемые у насъ въ Россіи.

Геліотропъ Гаусса состоитъ изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскихъ зеркалъ A и a (черт. 74 и 75), вставленныхъ въ общую оправу, надѣваемую на объективный ко-



Черт. 74.

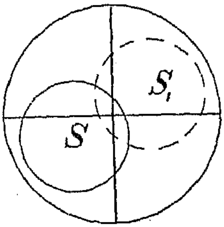


Черт. 75.

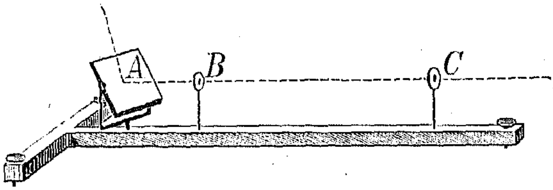
нецъ обыкновенной зрительной трубы T, располагаемой на простомъ треножномъ штативѣ. Лучи Солнца послѣ паденія на зеркала отражаются, и большая часть ихъ, т. е. лучи, упавшіе на обѣ половинки большого зеркала, принимаютъ направленіе OL, а меньшая часть, т. е. лучи, упавшіе на малое зеркало,—направленіе OK—прямо противоположное. Дѣйствительно, вслѣдствіе перпендикулярности зеркалъ углы паденія на нихъ лучей дополняютъ другъ друга до $90°$, а потому двойные углы дополняютъ другъ друга до $180°$. Такимъ образомъ, если дать трубѣ извѣстное направленіе на точку, откуда наблюдаютъ, то необходимо лишь поворачивать зеркала и ихъ оправу до тѣхъ поръ, пока въ трубѣ не покажется изображеніе Солнца, полученное лучами, отраженными отъ малаго зеркала. Въ это время лучи, отраженные отъ большого зеркала, очевидно пойдутъ по направленію къ наблюдателю.

Вслѣдствіе видимаго движенія Солнца направленіе отраженныхъ лучей непрерывно измѣняется, и потому геліотропистъ долженъ время отъ времени взглядывать въ трубу и вращеніемъ зеркалъ и ихъ оправы устанавливать изображеніе Солнца опять на середину; еще лучше переставлять изображеніе даже въ противоположную сторону, чтобы дать, такъ сказать, нѣкоторый запасъ впередъ: если, напримѣръ, при взглядѣ въ трубу, геліотропистъ замѣтилъ, что изображеніе Солнца, занимавшее сперва середину поля зрѣнія, находится въ S (черт. 76), то его надо переставить въ S_1.

Такъ какъ видимый діаметръ Солнца равенъ приблизительно полуградусу, то отраженные зеркаломъ геліотропа лучи расходятся конусомъ, крайнія производящія котораго составляютъ



Черт. 76.



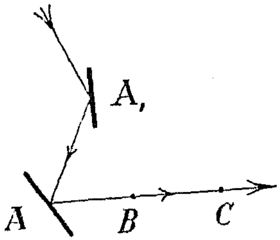
Черт. 77.

уголъ тоже около $^1/_2{}^\circ$. Благодаря этому нѣтъ надобности слѣдить за приборомъ непрерывно; достаточно исправлять положеніе зеркалъ каждыя 2 — 3 минуты. Это-то обстоятельство даетъ возможность пользоваться приборомъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда направленіе на наблюдателя не извѣстно съ достаточною точностью, и труба наведена на него лишь приблизительно.

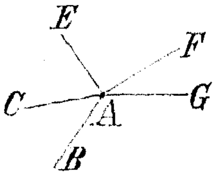
Геліотропъ Струве (черт. 77) не имѣетъ зрительной трубы и состоитъ изъ подвижного зеркала A и двухъ діоптровъ B и C, расположенныхъ на деревянной подставкѣ около 18 дюймовъ длины, имѣющей видъ буквы T. Подставка опирается на три ножки съ подъемными винтами, такъ что ей можно давать требуемый наклонъ къ горизонту. При употребленіи геліотропа зеркало A сперва вынимается и подставкѣ придается надлежащее положеніе визированіемъ черезъ діоптры B и C на ту тригонометрическую точку, гдѣ производятся наблюденія.

Затѣмъ вставляется зеркало, и вращеніемъ около взаимно-перпендикулярныхъ осей его оправы ему придается такое положеніе, чтобы отраженные лучи Солнца дали на діоптрѣ C тѣнь отъ B. Положеніе этой тѣни служитъ потомъ и для регулированія прибора.

Когда Солнце находится сзади геліотропа, то количество отраженныхъ отъ зеркала лучей очень мало, и потому въ такихъ случаяхъ ставится еще другое зеркало A_1, отражающее лучи на первое, какъ показано на черт. 78. Понятно, что въ этомъ случаѣ зеркало A должно быть неподвижно, и сообразно



Черт. 78.



Черт. 79.

суточному передвиженію Солнца нужно регулировать только вспомогательное зеркало A_1.

Необходимость особыхъ помощниковъ (геліотропистовъ) на наблюдаемыхъ точкахъ и возможность производить наблюденія только въ ясные солнечные дни объясняютъ почему геліотропы употребляются сравнительно рѣдко; однако не слѣдуетъ пренебрегать ими. Бываютъ случаи, когда окружающіе знаки B, C (черт. 79) хорошо видны и лишь одинъ, напримѣръ E, не видимъ, благодаря хоть тому обстоятельству, что изъ точки A онъ проектируется на лѣсъ или вообще на темный фонъ; тогда достаточно послать въ E одного геліотрописта, чтобы произвести безпрепятственно полные ряды наблюденій на точкѣ A.

Присмотръ за геліотропами настолько простъ, что его можно поручить даже кому нибудь изъ рабочихъ или найти въ окрестныхъ деревняхъ подходящаго юношу. Для непрерывнаго отраженія солнечнаго свѣта по одному направленію существуютъ особые приборы—*геліостаты*, но они имѣютъ недостатки, присущіе всѣмъ сложнымъ приборамъ, и въ геодезической практикѣ не нашли примѣненія.

Бессель для означенія нѣкоторыхъ точекъ своей тріангуляціи въ восточной Пруссіи пользовался высеребренными мѣдными шарами. Они не требуютъ вовсе присмотра, и если день ясный, то отраженные солнечные лучи видны на довольно значительное разстояніе во всѣ стороны. Эти сигналы представляютъ такъ называемыя *фазы*, т. е. положеніе изображенія Солнца мѣняется въ нихъ съ утра до вечера. Самое измѣненіе можетъ быть легко вычислено, если извѣстны высота и азимутъ Солнца, радіусъ отражающаго шара, разстояніе его до наблюдателя и азимутъ наблюденнаго направленія. Однако вычисленія фазъ довольно неудобны и могутъ служить источникомъ мелкихъ, трудно уловимыхъ погрѣшностей, поэтому такого рода шары почти нигдѣ болѣе не примѣнялись.

65. Ночные сигналы. Астрономамъ давно извѣстно, что ночью земная атмосфера находится въ болѣе спокойномъ состояніи, чѣмъ днемъ. Кромѣ того въ жаркое лѣтнее время случаются нерѣдко такъ называемые *сухіе туманы*, не позволяющіе видѣть днемъ на большое разстояніе, тогда какъ ночью воздухъ дѣлается опять прозрачнымъ. Эти причины должны бы были побудить и геодезистовъ производить наблюденія не днемъ, а ночью. Однако ночныя наблюденія рѣдко примѣнялись на тріангуляціяхъ, вѣроятно потому, что они сопряжены со значительными издержками: на каждой изъ окружающихъ точекъ должны быть расположены лампы и люди, присматривающіе за ними. Издержки незначительны лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда число окружающихъ точекъ невелико, если, напримѣръ, нужно измѣрить только одинъ уголъ.

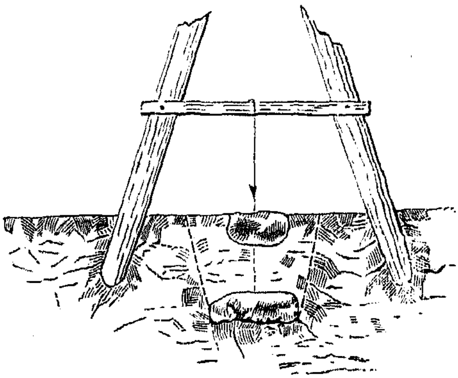
Ночными сигналами при геодезическихъ работахъ до сихъ поръ пользовались только французы и англичане (въ Индіи). Французы примѣнили ночныя наблюденія еще въ концѣ XVIII вѣка на работахъ градуснаго измѣренія, имѣвшаго цѣлью опредѣленіе новой единицы длины — метра (§ 13). На наблюдаемыхъ точкахъ располагались масляныя лампы съ параболическими зеркалами. При новѣйшемъ же соединеніи береговъ

Испаніи и Алжира употребленъ былъ электрическій свѣтъ, видимый, какъ показалъ опытъ, съ разстояній болѣе 250 верстъ. Англійскіе геодезисты въ Остъ-Индіи примѣняли бенгальскіе огни.

Хотя примѣровъ *пользованія* ночными сигналами было немного, но все же выяснилось съ полною очевидностью, что ночныя наблюденія имѣютъ преимущество передъ дневными. Ошибки треугольниковъ, измѣренныхъ тѣми же инструментами ночью, оказываются вообще меньшими, чѣмъ измѣренныхъ днемъ; кромѣ того, ночью можно съ одинаковою точностью и удобствомъ наблюдать непрерывно въ теченіи многихъ часовъ, тогда какъ днемъ время такъ называемыхъ спокойныхъ изображеній продолжается лишь немногіе часы. Но зато наблюдатель ночью всегда находится въ зависимости отъ своихъ помощниковъ при лампахъ, и неисправность одного изъ нихъ можетъ разстроить цѣлый рядъ наблюденій. Къ тому же, какъ упомянуто уже выше, содержаніе лампъ и особенно прислуги при нихъ сопряжено, конечно, съ излишними издержками: если днемъ расположеніе *одного* геліотропа на точкѣ, почему нибудь невидимой, достаточно для производства полныхъ рядовъ наблюденій, то ночью лампы должны быть поставлены *на всѣхъ* окружающихъ точкахъ.

66. Заложеніе центровъ. Тріангуляціи представляютъ столь цѣнную и важную для разныхъ государственныхъ потребностей работу, что тригонометрическія точки желательно сохранить на продолжительное время и даже навсегда. Весьма часто новыя тріангуляціи прокладываются въ видѣ продолженія прежнихъ, и тогда двѣ смежныя точки старой тріангуляціи могутъ служить основною стороною новой. Помимо этого, измѣренія между прочно задѣланными точками могутъ въ будущемъ дать полезный матеріалъ для сужденія о неизмѣнности земной коры. Сооруженіе, имѣющее цѣлью сохранить мѣсто тригонометрической точки навсегда, называется *центромъ*.

Прочные каменные центры закладываются для означенія вообще всѣхъ точекъ 1-го и 2-го классовъ. Способъ закладки центровъ зависитъ главнымъ образомъ отъ имѣющагося вблизи матеріала. На русскихъ тріангуляціяхъ центры дѣлаютъ или изъ гранитныхъ валуновъ, находимыхъ почти повсемѣстно въ сѣверной полосѣ Россіи, или изъ кирпича. Имѣя въ виду сохраненіе центровъ на продолжительное время, ихъ дѣлаютъ обыкновенно двойными: одинъ *нижній* или *секретный* закладывается на глубинѣ 5—6 футовъ, а другой *верхній* или *наружный* — на самомъ уровнѣ почвы. Оба камня для центра приготовляются одинаковымъ образомъ, съ тою разницею, что для нижняго выбираютъ обыкновенно бо́льшій камень, приблизительно въ 5—10 пудовъ.



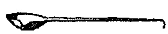
Черт. 80.

На чертежѣ 80 изображено въ разрѣзѣ положеніе двойного центра подъ пирамидою или сигналомъ.

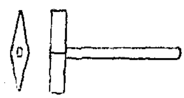
Для приготовленія центра на одной изъ наиболѣе ровныхъ граней камня выбивается при помощи зубила (черт. 81) небольшое цилиндрическое углубленіе, заливаемое свинцомъ. Приложивъ зубило перпендикулярно къ поверхности камня, бьютъ по немъ молоткомъ, причемъ зубило послѣдовательно поворачиваютъ около его оси, чтобы отверстіе было ровное и круглое. Когда получится дыра около 1 дюйма глубиною, въ нее наливаютъ свинецъ, расплавленный на кострѣ въ особой желѣзной ложкѣ (черт. 82); не слѣдуетъ переливать свинецъ черезъ край, потому что тогда его легко вынуть. На остывшей верхней поверхности свинцовой заливки дѣлаютъ двѣ взаимно-перпендикулярныя черты ножемъ; пересѣченіе ихъ и будетъ мѣстомъ центра. Иногда помимо отверстія для свинца на камнѣ выбиваютъ киркою (черт. 83) годъ постройки, начальныя буквы наименованія тріангуляціи и т. п., а также четыре взаимно-перпендикулярные желобка, какъ показано на черт. 84. Оси этихъ желобковъ могутъ служить къ возстановленію точнаго мѣста центра въ случаѣ поврежденія или похищенія свинцовой заливки.

При зарываніи камней въ землю главное вниманіе должно быть обращено на то, чтобы оба центра или мѣста пересѣченій нарѣзокъ на свинцовыхъ заливкахъ пришлись въ одной отвѣсной линіи. Когда яма вырыта, опускаютъ въ нее нижній камень и располагаютъ его по отвѣсу такъ, чтобы центръ пришелся на продолженіи оси визирнаго цилиндра тригонометрическаго знака. Затѣмъ земля плотно утрамбовывается вокругъ камня, а къ особой временной планкѣ (черт. 80), прибитой къ діагонально расположеннымъ ногамъ пирамиды или столбамъ сигнала, прикладываютъ отвѣсъ и означаютъ на планкѣ

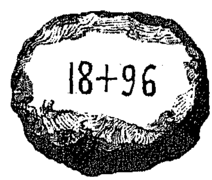
Черт. 81.



Черт. 82.



Черт. 83.

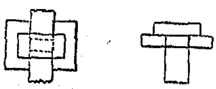


Черт. 84.

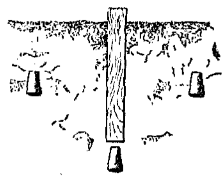
то мѣсто, при которомъ грузикъ отвѣса бьетъ прямо въ центръ. Послѣ этого нижній камень покрывается кускомъ доски, соломою или хворостомъ и яма засыпается землею на столько, чтобы помѣстить еще верхній камень. Этотъ камень располагаютъ такъ, чтобы его верхняя плоскость пришлась въ уровнѣ почвы, а центръ—какъ разъ подъ грузикомъ отвѣса, вновь приложеннаго къ мѣткѣ на планкѣ. Спуская отвѣсъ къ нижнему и верхнему камнямъ, необходимо не забыть измѣрять его длину: тогда по разности длинъ легко опредѣлить превышеніе одного центра надъ другимъ. Цѣль прикрытія нижняго центра доскою и соломою та, чтобы, въ случаѣ необходимости найти его спустя много лѣтъ, неосторожные землекопы не могли тронуть камня съ мѣста: копая землю, они, по измѣненію грунта, догадаются о близкомъ присутствіи центра, и, оставивъ лопаты, будутъ рыть землю дальше просто руками.

Устройство кирпичнаго центра показано на чертежѣ 85; средній кирпичъ ставится отвѣсно и на верхней его грани ножемъ или острымъ гвоздемъ нарѣзаютъ двѣ діагональныя черты, пересѣченіе которыхъ и представитъ центръ. Наружный центръ, вмѣсто кирпича, состоитъ здѣсь обыкновенно изъ кола, забитаго вровень съ землею; подъ грузикомъ отвѣса въ этотъ колъ вбивается небольшой гвоздь. Колья вмѣсто наружнаго центра часто употребляются и при зарытіи каменнаго центра внизу, такъ какъ на долголѣтнее существованіе наружнаго центра все равно нельзя разсчитывать, и надобность въ немъ минуется послѣ производства наблюденій на данной точкѣ и по окончаніи съемки (если тригонометрическая точка опредѣлена, какъ опорная для будущихъ съемокъ).

Устройство центровъ бываетъ чрезвычайно разнообразно. Въ Болгарской тріангуляціи, произведенной русскими топо-



Черт. 85.



Черт. 86.

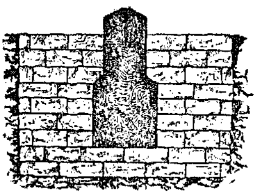
графами въ 1877—80 годахъ, подъ каждою пирамидою зарывалась въ отвѣсномъ положеніи бутылка, въ которую предварительно вкладывалась записка съ названіемъ знака, именемъ строителя и временемъ наблюденій. Въ Финляндіи на голыхъ скалахъ выбивались просто дыры или двѣ взаимно-перпендикулярныя борозды, а въ Швеціи и Норвегіи въ дыры клался стальной острый гвоздь, на который наколачивался затѣмъ желѣзный цилиндръ; насаженный такимъ образомъ цилиндръ, распертый стальнымъ гвоздемъ, не можетъ затѣмъ ни сдвинуться, ни быть похищеннымъ. Въ американскихъ тріангуляціяхъ для центровъ употребляются впередъ изготовленные гранитные параллелепипеды 4 футовъ длины и по 6 дюймовъ въ сторонѣ квадратнаго сѣченія (черт. 86). Параллелепипеды врываются въ землю отвѣсно, причемъ верхняя ихъ часть съ выбитыми заглавными буквами названія тріангуляціи остается надъ поверхностью, дюймовъ на 6. Подъ нимъ и по четыремъ его сторопамъ на трехфутовомъ разстояніи и на глубинѣ 2—3 футовъ зарываются еще пять глазуренныхъ горшковъ, на которыхъ сдѣланы: на центральномъ—точка, а на боковыхъ—стрѣлки. Пересѣченіе діагоналей верхней грани гранитнаго параллелепипеда устанавливается на одной отвѣсной линіи съ точкою на нижнемъ горшкѣ, а стрѣлки боковыхъ указываютъ на эту же отвѣсную линію, такъ что стрѣлки боковыхъ горшковъ могутъ служить къ опредѣленію мѣста центра даже въ случаѣ его поврежденія.

Не смотря на прочность установки центровъ, необходимо все же принимать мѣры къ ихъ сохраненію. Для этого, помимо сообщенія мѣстнымъ властямъ, можно посовѣтовать не дѣлать изъ этой работы тайны, благодаря которой мѣстные жители, побуждаемые корыстью, не разъ вынимали или сдвигали камни съ мѣста. Напротивъ того, лучше имѣть свидѣтелей работы изъ мѣстныхъ жителей и, показавъ имъ, что въ землю не кладется ничего цѣннаго, объяснить важность сохраненія центровъ на будущее время. Объясненіе должно быть обстоятельное, потому что автору извѣстенъ случай, какъ тріангуляторъ, пріѣхавъ на слѣдующій годъ продолжать работу, не нашелъ заложеннаго центра, порученнаго охранѣ мѣстнаго владѣльца земли. Оказалось, что владѣлецъ, боясь отвѣтственности за пропажу камня, вырылъ его и бережно хранилъ въ своей комнатѣ.

67. Базисные центры. Если прочность центровъ имѣетъ важное значеніе для всѣхъ тригонометрическихъ, особенно первоклассныхъ точекъ, то она еще нужнѣе для точекъ, представляющихъ концы базисовъ и служащихъ основаніемъ для всей тріангуляціи; сохранить ихъ на продолжительное время особенно важно потому, что на нихъ обыкновенно производятся астрономическія наблюденія, и на опредѣленіе ихъ положенія тратится много времени, труда и издержекъ.

Базисные центры представляютъ правильно обтесанные монолиты, установленные въ прочную каменную кладку на цементѣ, какъ показано на черт. 87. Только за неимѣніемъ цемента можно допустить кладку на извести. Въ верхней грани монолита высверливается вертикальная дыра, въ которую на цементѣ впускается желѣзный стержень; на головкѣ этого стержня означается точка или двѣ взаимно-пересѣкающіяся прямыя. Вмѣсто монолитовъ иногда употребляются старыя чугунныя пушки, поставленныя казенною частью вверхъ въ отвѣсномъ положеніи, также внутри прочнаго каменнаго фундамента. Иногда самый центръ по окончаніи измѣреній прикрывается дополнительною каменною кладкою, не подвергающеюся разрушительному дѣйствію времени и непогоды.

Какъ ни прочна закладка базисныхъ центровъ, но чтобы имѣть возможность возобновить ихъ въ случаѣ поврежденія, вблизи, на разстояніи 1 — $1^1/_2$ сажени закладываются еще одинъ или нѣсколько *секретныхъ* центровъ на большихъ, глубоко зарытыхъ камняхъ со свинцовыми заливками. Относительное положеніе главнаго и побочныхъ центровъ должно быть опредѣлено тщательными измѣреніями, заносимыми въ журналъ съ пояснительными рисунками. На главномъ монолитѣ и на секретныхъ центрахъ выбиваются: годъ закладки, начальныя буквы названія тріангуляціи и т. п. На нѣкоторыхъ заграничныхъ тріангуляціяхъ базисные центры представляютъ чрезвычайно прочныя каменныя сооруженія, настоящіе памятники геодезическихъ работъ. У насъ подобные памятники были воздвигнуты, напримѣръ, на концахъ большой дуги меридіана, близъ Измаила и у Фугленеса.


Черт. 87.

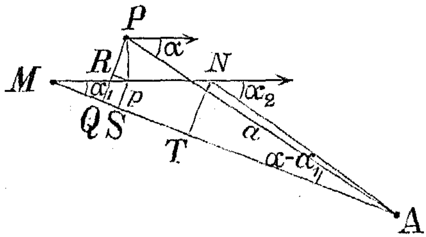
Подъ базисными центрами весьма часто разумѣютъ еще промежуточные центры, закладываемые вдоль базисовъ для облегченія измѣреній и удобства прекращенія дневной работы. Обыкновенно эти промежуточные центры представляютъ просто камни со свинцовыми заливками. Они имѣютъ значеніе только во время измѣреній, и объ особенно прочномъ укрѣпленіи ихъ не заботятся.

68. Разыскиваніе старыхъ центровъ. При возобновленіи или продолженіи старыхъ тріангуляцій, наружные знаки которыхъ погибли, является надобность найти прежніе центры; если сохранились описанія и съемки окрестностей, то это не представляетъ особыхъ затрудненій. Однако и самое подробное описаніе не всегда достаточно для того, чтобы можно было начать рыть землю съ полною увѣренностью докопаться до центра. Въ такихъ случаяхъ не лишнее обратиться къ старожиламъ, быть можетъ свидѣтелямъ прежнихъ работъ, помнящимъ самую закладку центра и могущимъ указать точное его мѣсто. Чтобы тверже запечатлѣть въ памяти окрестнаго населенія мѣста центровъ, въ старину существовалъ даже жестокій обычай сзывать во время закладки центровъ мальчиковъ сосѣднихъ деревень и подвергать ихъ тѣлесному наказанію; извѣстно, что сильныя ощущенія, испытанныя въ дѣтствѣ, твердо сохраняются затѣмъ въ памяти до глубокой старости.

Если описанія и указанія мѣстныхъ жителей оказываются недостаточными для нахожденія стараго центра, то необходимо вычислить его положеніе. Для такого вычисленія нужно имѣть углы между направленіями на три достаточно далекія точки. Эти направленія могутъ быть или направленіями на три сосѣднія прежнія тригонометрическія точки (мѣсто центра опредѣлится рѣшеніемъ задачи Потенота), или направленіями на три мѣстные предмета, разстояніе до которыхъ можетъ быть и неизвѣстно; имѣя это въ виду, надо еще во время наблюденій на данной точкѣ опредѣлить направленія на три или болѣе предмета, за долголѣтнее существованіе которыхъ можно поручиться.

Для опредѣленія положенія центра при помощи угловъ между тремя окружающими точками, разстоянія до которыхъ неизвѣстны, служитъ весьма простой способъ, предложенный вѣнскимъ профессоромъ *Марекомъ* и состоящій въ слѣдующемъ. Измѣряютъ углы между указанными предметами на двухъ произвольно избранныхъ точкахъ, лежащихъ вблизи стараго центра; тогда, зная разстояніе между ними, можно вычислить координаты стараго центра и, слѣдовательно, съ увѣренностью въ успѣхъ приступать къ раскопкамъ.

Пусть M и N (черт. 88) представляютъ избранныя для наблюденій точки, ρ — разстояніе между ними и P — искомое мѣсто центра. Далѣе, пусть A изображаетъ одну изъ окружающихъ точекъ, разстояніе до которой равно a, а углы, составляемые направленіями на нее изъ P и M — суть α и α_1 (считая отъ направленія съ M на N и ему параллельнаго). Опустивъ изъ P перпендикуляръ PQ на MA, изъ прямоугольнаго треугольника PQA получимъ:



Черт. 88.

$$PQ = a \, . \, sin \, (\alpha - \alpha_1) \quad (a)$$

Съ другой стороны, называя прямоугольныя координаты Mp и Pp точки P относительно M и направленія MN черезъ x и y и проведя $pS \perp MA$ и $pR \perp PQ$, имѣемъ

$$PQ = pS + PR = x \, . \, sin \, \alpha_1 + y \, cos \, \alpha_1 \qquad (b)$$

Сравнивая (a) съ (b) и составляя подобныя же уравненія для другихъ двухъ точекъ B и C, отстоящихъ отъ P на разстояніяхъ b и c, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} a \, . \, sin \, (\alpha - \alpha_1) &= x \, . \, sin \, \alpha_1 + y \, . \, cos \, \alpha_1 \\ b \, . \, sin \, (\beta - \beta_1) &= x \, . \, sin \, \beta_1 + y \, . \, cos \, \beta_1 \\ c \, . \, sin \, (\gamma - \gamma_1) &= x \, . \, sin \, \gamma_1 + y \, . \, cos \, \gamma_1 \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Проведя изъ N перпендикуляръ NT на MA и допуская, что $NA = a$, изъ треугольниковъ NTA и NTM и такихъ же для направленій MB и MC получимъ

$$\left.\begin{aligned} a \, . \, sin \, (\alpha_2 - \alpha_1) &= \rho \, . \, sin \, \alpha_1 \\ b \, . \, sin \, (\beta_2 - \beta_1) &= \rho \, . \, sin \, \beta_1 \\ c \, . \, sin \, (\gamma_2 - \gamma_1) &= \rho \, . \, sin \, \gamma_1 \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

Раздѣляя почленно уравненія (c) на (d) и по малости угловъ $(\alpha - \alpha_1)$, $(\alpha_2 - \alpha_1)$ ... принимая ихъ синусы пропорціональными самимъ угламъ, будемъ имѣть:

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\rho} (x + cotg\,\alpha_1 \,.\, y)$$

$$\beta - \beta_1 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\rho} (x + cotg\,\beta_1 \,.\, y)$$

$$\gamma - \gamma_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\rho} (x + cotg\,\gamma_1 \,.\, y)$$

Направленія α, β и γ конечно неизвѣстны, но зато извѣстны ихъ разности, т. е. углы $\beta - \alpha$ и $\gamma - \beta$, поэтому, вычитая почленно уравненія послѣдней системы, получимъ наконецъ:

$$\left.\begin{aligned} [(\beta - \alpha) - (\beta_1 - \alpha_1)]\,\rho &= [(\beta_2 - \alpha_2) - (\beta_1 - \alpha_1)]\,x + \\ &+ [(\beta_2 - \beta_1)\, cotg\,\beta_1 - (\alpha_2 - \alpha_1)\, cotg\,\alpha_1]\,y \\ [(\gamma - \beta) - (\gamma_1 - \beta_1)]\,\rho &= [(\gamma_2 - \beta_2) - (\gamma_1 - \beta_1)]\,x + \\ &+ [(\gamma_2 - \gamma_1)\, cotg\,\gamma_1 - (\beta_2 - \beta_1)\, cotg\,\beta_1]\,y \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Изъ этихъ уравненій съ двумя неизвѣстными легко получить обѣ координаты x и y точки P.

При выборѣ окружающихъ точекъ A, B и C надо руководствоваться извѣстными правилами ограниченія Потенотовой задачи. Самое лучшее, когда два предмета, почти равно-отдаленные, лежатъ примѣрно вправо и влѣво отъ тригонометрической точки, а третій, болѣе близкій — спереди или сзади. Кромѣ того избранные предметы не должны быть очень далеки отъ центра, не далѣе верстъ 5—6; въ противномъ случаѣ вспомогательныя наблюденія надо производить съ очень большою точностью. При небольшомъ удаленіи достаточно измѣрять углы маленькимъ теодолитомъ съ точностью отсчета въ 1′. Необходимо еще замѣтить, что если бы послѣ вычисленія (которое всегда возможно сдѣлать тутъ же на мѣстѣ) оказалось, что координаты x и y очень велики, т. е., другими словами, что обѣ точки M и N избраны далеко отъ искомой точки P, то можно повторить наблюденія, избравъ точки, близко расположенныя къ вычисленной по первому приближенію.

Числовой примѣръ. Во время производства тріангуляціи опредѣлены углы между тремя окружающими точками A, B и C и получено

$$\beta - \alpha = 114^\circ\ 1'$$
$$\gamma - \beta = 119^\circ 30'$$

При разыскиваніи же этой точки избраны двѣ вспомогательныя M и N и получено:

$$\text{на } M \begin{cases} N = 0^\circ\ 0' \\ \alpha_1 = 229^\circ\ 0' \\ \beta_1 = 343^\circ 12' \\ \gamma_1 = 102^\circ 32' \end{cases} \qquad \text{на } N \begin{cases} M = 180^\circ\ 0' \\ \alpha_2 = 225^\circ 31' \\ \beta_2 = 342^\circ 55' \\ \gamma_2 = 103^\circ\ 4' \end{cases}$$

Разстояніе $MN = \rho = 108.33$ фута.

Отсюда получается:

$$\begin{aligned} \beta_1 - \alpha_1 &= 114^\circ 12' & \alpha_2 - \alpha_1 &= -209' \\ \gamma_1 - \beta_1 &= 119^\circ 20' & \beta_2 - \beta_1 &= -17' \\ \beta_2 - \alpha_2 &= 117^\circ 24' & \gamma_2 - \gamma_1 &= +32' \\ \gamma_2 - \beta_2 &= 120^\circ\ 9' \end{aligned}$$

и для уравненій (46) будетъ:

$$192x + 238.0\ y = -1191.6$$
$$49x - 63.4\ y = +1083.3$$

Откуда

$$x = +7.65 \text{ и } y = -11.18 \text{ фута}$$

Въ данномъ случаѣ истинныя координаты центра были

$$x = +7.57 \text{ и } y = -11.08$$

Понятно, что, опредѣливъ координаты съ точностью до 0.1 фута, можно, съ полною увѣренностью въ успѣхѣ работы, приступить къ рытью ямы и разыскиванію центра.

VI.

Измѣреніе базисовъ.

69. Нормальныя мѣры. Не смотря на всеобщее желаніе объединить мѣры длины, вѣса и т. д., въ настоящее время, въ разныхъ странахъ, пользуются весьма различными мѣрами вообще, и мѣрами длины въ частности. Подъ словами *тоазъ*, *метръ*, *сажень* и т. п. разумѣютъ нѣкоторое разстояніе въ пространствѣ по одному направленію, совершенно независимо отъ вещества, наполняющаго это пространство. Но для того, чтобы мѣрить и чтобы сохранить на продолжительное время извѣстную длину, необходимо имѣть что нибудь вещественное, и потому подъ единицею длины даннаго наименованія разумѣютъ, смотря по длинѣ, жезлъ или линейку, сдѣланную изъ какого нибудь твердаго и по возможности неизмѣннаго вещества, напримѣръ изъ металла или стекла. Такіе жезлы и линейки называются *нормальными мѣрами*.

Нормальная мѣра мѣняетъ свою длину отъ температуры и отъ положенія, въ которомъ она находится, вслѣдствіе чего подъ именемъ тоаза, метра, сажени и т. п. разумѣютъ длину извѣстнаго жезла или линейки при нѣкоторой опредѣленной температурѣ и при опредѣленномъ способѣ расположенія. Такъ, жезлъ изъ кованнаго желѣза, представляющій двойной тоазъ и хранящійся въ Пулковской Обсерваторіи, лежитъ горизонтально на двухъ подпоркахъ въ разстояніяхъ $^1/_4$ длины отъ его концовъ. Онъ имѣетъ опредѣленную длину при температурѣ 13° по Реомюру. Если сравненія съ другими мѣрами производятся при иной температурѣ, то необходимо принять въ разсчетъ измѣненіе длины нормальной мѣры, коэффиціентъ линейнаго расширенія которой для этой цѣли былъ опредѣленъ. Вслѣдствіе порчи и измѣненія длины отъ перевозокъ и употребленія, нормальныя мѣры обыкновенно бережно хранятся въ одномъ мѣстѣ и служатъ только для сравненій съ ними тѣхъ жезловъ, которыми пользуются для дѣйствительныхъ измѣреній.

Въ настоящее время существуютъ нормальныя мѣры двухъ родовъ: *концевыя*, состоящія изъ жезловъ призматическаго или цилиндрическаго вида, оканчивающихся небольшими цилиндриками съ выпуклыми внѣшними основаніями, такъ что длина мѣры есть разстояніе между срединами этихъ выпуклыхъ оконечностей, и *нарѣзныя*, въ видѣ плоскихъ или иного вида линеекъ, длина которыхъ означена двумя нарѣзками, чертами или просто точками, нанесенными въ нѣкоторомъ разстояніи отъ концовъ. Въ XVIII и въ началѣ XIX вѣковъ дѣлались преимущественно концевыя нормальныя мѣры, въ послѣднее же время всѣ новыя мѣры дѣлаются исключительно съ нарѣзками. Концевыя мѣры подвергаются соприкосновенію и даже ударамъ постороннихъ тѣлъ при сравненіяхъ и потому могутъ мѣнять свою длину; нарѣзныя же мѣры остаются всегда въ полномъ смыслѣ слова неприкосновенными.

Подробности устройства нормальныхъ мѣръ весьма различны. Первая по времени нормальная мѣра—это извѣстный *перуанскій тоазъ*, сдѣланный въ 1735 г. (см. § 10) и служившій для сравненія жезловъ во время градуснаго измѣренія въ Перу: онъ представляетъ плоскую желѣзную линейку, на концахъ которой сдѣланы срѣзы, перпендикулярные къ ея оси и доходящіе до середины ширины линейки. Эти срѣзы были сдѣланы такъ, что линейка плотно входила между выступами желѣзной съ закраинами полосы, укрѣпленной еще въ 1670 г. на лѣстницѣ башни Большого Шателе въ Парижѣ, на островѣ Cité, и называвшейся длиною французскаго тоаза. Желѣзная полоса на лѣстницѣ, конечно, не могла считаться хорошо сохраняемою мѣрою, и потому перуанскій тоазъ долгое время считался единственно вѣрнымъ тоазомъ, причемъ истинную длину онъ имѣлъ при 13° по Реомюру, т. е. при средней температурѣ измѣреній базисовъ въ Перу.

Съ перуанскаго тоаза неоднократно дѣлались копіи: въ концѣ XVIII вѣка *Борда* сдѣлалъ копію для градуснаго измѣренія французской дуги, а въ 1821 и 23 годахъ *Фортенъ* приготовилъ копіи для русскаго градуснаго измѣренія, по заказу Струве, и для прусскаго измѣренія, по заказу Бесселя. Эти послѣднія двѣ копіи представляютъ желѣзные брусья или жезлы съ поперечнымъ квадратнымъ сѣченіемъ въ $1^1/_2$ дюйма въ сторонѣ и оканчивающіеся полированными съ выпуклыми внѣшними поверхностями цилиндриками.

Новѣйшія нарѣзныя нормальныя мѣры имѣютъ въ поперечномъ разрѣзѣ видъ опрокинутаго *T* или буквы *X*, потому что такія фигуры даже и при маломъ общемъ вѣсѣ обладаютъ большою жесткостью и хорошо сопротивляются гнутію.

Такъ какъ каждая мѣра имѣетъ нормальную длину только при опредѣленной температурѣ, а сравненія приходится дѣлать при различныхъ температурахъ, то необходимо знать коэффиціентъ линейнаго расширенія вещества, изъ котораго она сдѣлана. Для сравненій высокой точности нужно знать, конечно, коэффиціентъ расширенія данной мѣры, потому что онъ зависитъ не только отъ рода металла, но и отъ способа изготовленія мѣры; для приблизительныхъ же вычисленій достаточно вообще знать коэффиціенты расширенія различныхъ металловъ, приведенные въ нижеслѣдующей таблицѣ:

Названія веществъ.	Коэффиціенты линейнаго расширенія	
	на 1° Реомюра	на 1° Цельсія
Желѣзо кованное	0.0000 15	0.0000 12
Сталь закаленная	0.0000 16	0.0000 13
Мѣдь красная	0.0000 21	0.0000 17
Мѣдь желтая	0.0000 23	0.0000 18
Серебро	0.0000 25	0.0000 20
Платина	0.0000 11	0.0000 09
Цинкъ	0.0000 42	0.0000 33
Стекло	0.0000 11	0.0000 09

Изъ нормальныхъ мѣръ, сдѣланныхъ изъ кованнаго желѣза и хранящихся въ настоящее время въ Пулковской Обсерваторіи, особенно замѣчательны:

1) *Двойной тоазъ N* (концевая мѣра), сдѣланный въ Юрьевѣ въ 1827 году по заказу Струве и сравненный съ тоазомъ Фортена. Эта мѣра бралась на полевыя геодезическія работы при измѣреніяхъ базисовъ въ Симонисѣ, Элиме и Улеаборгѣ. Затѣмъ съ 1845 года она оставалась въ Пулковѣ и лишь въ 1893 году возилась въ Парижъ для сравненія съ новыми прототипами (см. § 71). По опредѣленію Струве длина $N = 1728.01249$ пар. линіи; по новому опредѣленію Соколова $N = 3.898162$ метра.

2) *Двойной тоазъ P*, копія N (концевая мѣра); употреблялся при измѣреніяхъ базисовъ въ Альтенѣ, Торнео, Ташбунарѣ, Новочеркасскѣ и Астрахани. Его возили для сравненія въ Соутгамптонъ въ 1865 и въ Берлинъ въ 1877 годахъ. $P = 1727.99440$ пар. линіи.

3 и 4) *Двойные тоазы R* и *R'*, тоже копіи N (концевыя мѣры). Употреблялись при измѣреніи базисовъ: R—въ Романкауцахъ и Бериславлѣ, R'—въ Рогачевѣ, Ельцѣ, Вольскѣ, Бузулукѣ и Орскѣ. $R = 1728.01991$, а $R' = 1727.99355$ пар. линіи.

5) *Сажень Теннера T* (нарѣзная мѣра); сдѣлана изъ двухъ спаянныхъ вмѣстѣ желѣзныхъ полосъ, представляющихъ въ сѣченіи букву T. Ею пользовался генералъ Теннеръ при измѣреніи базисовъ въ Понедѣляхъ, Осовницѣ, Старо-Константиновѣ, Варшавѣ и Ченстоховѣ. $T = 945.75779$ пар. линіи.

Всѣ показанныя здѣсь числа относятся къ температурѣ $13^\circ R = 16^\circ.25$ C (см. Дуга Меридіана, Т. I, стр. LXXIV).

70. Сравненіе мѣръ. Чтобы знать длину тѣхъ мѣръ, которыя служатъ для дѣйствительныхъ измѣреній, ихъ необходимо сравнивать время отъ времени съ нормальными. Кромѣ того и сами нормальныя мѣры, въ которыхъ выражаются единицы длинъ въ разныхъ странахъ, должны быть сравниваемы между собою, иначе нельзя привести къ единству результаты различныхъ геодезическихъ и другихъ работъ. Это особенно важно, когда кто либо предпринимаетъ опредѣленіе размѣровъ земного сфероида изъ результатовъ многихъ градусныхъ измѣреній, произведенныхъ въ разное время и въ разныхъ странахъ. Притомъ же опытъ показываетъ, что, не смотря на тщательное сбереженіе, до сихъ поръ существующія нормальныя мѣры мѣняютъ свою длину.

Для точныхъ сравненій нормальныя мѣры по временамъ свозятся въ одно мѣсто. Образцомъ такихъ общихъ сравненій могутъ служить работы, произведенныя англійскимъ геодезистомъ *Кларкомъ* въ 1865 году. Поводомъ къ нимъ послужило большое градусное измѣреніе по параллели 52° сѣверной широты (§ 17). Для этихъ сравненій въ Соутгамптонѣ, при Управленіи Англійской съемки, было построено особое зданіе *). Внутренняя комната, на половину углубленная въ землю, съ толстыми каменными стѣнами и толстымъ бетоннымъ потолкомъ, заключена въ наружную каменную же постройку, возведенную съ сѣверной стороны высокаго зданія. Хотя стѣны и имѣютъ дверь и окна, но во время сравненій мѣръ окна закрывались особыми толстыми щитами, а единственная, но тройная дверь открывалась не иначе, какъ послѣдовательно одна за другою, и потому внутренняя комната была совершенно защищена отъ прямого дѣйствія солнечныхъ лучей, и температура ея оставалась въ теченіи нѣсколькихъ сутокъ, необходимыхъ для сравненій, почти постоянною. Освѣщеніе производилось при помощи фонарей съ обыкновенными свѣчами. Столъ для сравниваемыхъ мѣръ, рама съ микроскопами и полъ для наблюдателей устроены были на отдѣльныхъ каменныхъ столбахъ, независимыхъ отъ фундамента стѣнъ, такъ что не было никакого повода опасаться, чтобы во время сравненій передвиженія наблюдателей или даже колебанія стѣнъ постройки могли произвести перемѣну въ установкѣ приборовъ.

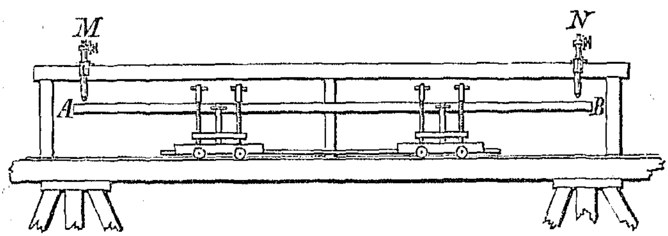
Сравниваемые жезлы имѣли различную длину и различное поперечное сѣченіе, и потому, чтобы быть увѣреннымъ, что всѣ они приняли одинаковую температуру, ихъ вносили въ помѣщеніе за сутки до сравненій. Для изслѣдованія коэффиціентовъ

---

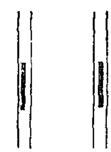
*) Подобное же помѣщеніе устроено и въ С.-Петербургѣ. См. Временникъ Главной палаты мѣръ и вѣсовъ. Часть I, 1894 г.

расширенія жезлы поочередно вынимались изъ своихъ футляровъ и вкладывались въ особые длинные и узкіе закрытые ящики, черезъ которые пропускалась нагрѣтая вода по трубамъ изъ котла, расположеннаго въ сосѣднемъ зданіи.

Для сравненія линейныхъ мѣръ служатъ *компараторы*, существенную часть которыхъ составляютъ прочно укрѣпленные на извѣстномъ разстояніи другъ отъ друга микроскопы съ микрометрами. Общій видъ компаратора изображенъ на черт. 89. M и N—два микроскопа съ микрометрами, прочно придѣланные въ вертикальномъ положеніи къ массивной рамѣ. Внѣшніе фокусы этихъ микроскоповъ представляютъ, такъ сказать, опти-



Черт. 89.

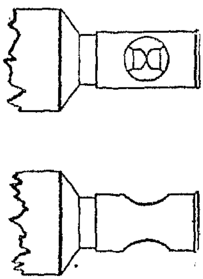


Черт. 90.

ческій циркуль. Если подъ микроскопы подвести нарѣзную мѣру AB такъ, чтобы изображенія конечныхъ нарѣзокъ получились въ плоскостяхъ микрометровъ, то, глядя въ микроскопы, легко навести нити микрометровъ на эти нарѣзки, какъ показано на черт. 90 (прав.), причемъ наблюдатель оцѣниваетъ равенство промежутковъ между краями изображенія черты и ближайшими краями нитей микрометра.

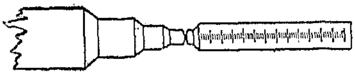
Понятно, что одновременное наведеніе обоихъ микроскоповъ возможно только при двухъ наблюдателяхъ. Когда показанія барабановъ микрометровъ записаны, тогда мѣра AB отодвигается и подъ микроскопы кладется другая, сравниваемая съ ней мѣра. При помощи подъемныхъ и боковыхъ винтовъ подставокъ, нарѣзки этой другой мѣры располагаются опять въ фокальныхъ плоскостяхъ микроскоповъ, причемъ изображеніе нарѣзки одного конца, напримѣръ A, подводится точно въ середину нитей микрометра M; въ это время изображеніе нарѣзки другого конца окажется или правѣе, или лѣвѣе нитей микрометра N. Если передвинуть нити этого микрометра и навести ихъ на изображеніе, то получится новый отсчетъ. Разность отсчетовъ при наведеніяхъ на первую и вторую мѣру очевидно выразитъ разность длинъ сравниваемыхъ мѣръ въ частяхъ дѣленій барабана микрометра. Эти дѣленія должны быть изслѣдованы раньше при помощи наведеній микрометра на черточки какого нибудь масштаба.

Описаннымъ способомъ легко сравнивать нарѣзныя мѣры, длины которыхъ почти одинаковы. Для различныхъ длинъ, напримѣръ, для сравненія метра съ саженью и т. п., одна изъ мѣръ должна имѣть вспомогательныя черточки, и разстоянія между ними сравниваются по частямъ, для чего микроскопы M и N можно передвигать и закрѣплять въ любомъ положеніи.



Черт. 91.

Нѣсколько болѣе затрудненій представляютъ сравненія нарѣзныхъ мѣръ съ концевыми. Въ Пулковѣ для этой цѣли употребляютъ небольшія мѣдныя гильзы (черт. 91), надѣваемыя на оконечности концевыхъ мѣръ и имѣющія на днѣ выпуклые полированные цилиндрики, совершенно равные оконечнымъ цилиндрикамъ концевыхъ мѣръ. Въ гильзахъ сдѣланы сквозныя окна, такъ что, смотря сверху, наблюдатель видитъ въ микроскопѣ точку соприкосновенія выпуклыхъ поверхностей конца мѣры и внутренняго цилиндрика гильзы. На эту то точку и наводятся нити микрометра совершенно такъ, какъ онѣ наводятся на черту нарѣзной мѣры. Понятно, что и здѣсь всего удобнѣе и точнѣе сравнивать мѣры почти одинаковой длины. Въ Соутгамптонѣ къ оконечностямъ концевыхъ мѣръ прикладывались двѣ пластинки, имѣвшія на одной сторонѣ полированные и выпуклые цилиндрики и шкалы съ частыми дѣленіями на верхней поверхности, какъ показано на черт. 92. При помощи такого приспособленія удобно сравнивать короткія концевыя мѣры съ длинными нарѣзными, напримѣръ концевые тоазы съ нарѣзными жезлами въ 2 метра. Послѣ сравненій обѣ пластинки соединялись своими оконечностями, и особыми сравненіями опредѣлялось разстояніе между отсчитанными черточками, которое и нужно было затѣмъ вычитать изъ длины нарѣзной мѣры, чтобы получить длину концевой.



Черт. 92.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ приведены результаты сравненій главныхъ мѣръ въ Соутгамптонѣ, заимствованные изъ классическаго отчета объ этихъ сравненіяхъ (A. R. Clarke. Comparisons of the Standards of Length. London, 1866), причемъ подъ числами, выражающими уравненія мѣръ, приведены ихъ логариѳмы [ ] для облегченія переводовъ.

Названія мѣръ.	Длина въ частяхъ норм. ярда	Въ дюймахъ 1 дюймъ $= \frac{1}{36}$ ярда	Въ пар. лин. 1 п. л. $= \frac{1}{864}$ т.	Въ миллиметр. 1 м.м. $= \frac{1}{1000}$ м.
Ярдъ . .	1.000 000 00	= 36.000 000 [1.556 3025 008]	= 405.346224 [2.607 8261 317]	= 914.39180 [2.961 1323 210]
Тоазъ . .	2.131 511 16	= 76.734 402 [1.884 9901 116]	= 864.00000 [2.936 5137 425]	= 1949.03632 [3.289 8199 318]
Метръ . .	1.093 623 11	= 39.370 432 [1.595 1701 798]	= 443.29600 [2.646 6938 107]	= 1000.00000 [3.000 0000 000]
Клафторъ	2.074 034 83	= 74.665 254 [1.873 1185 460]	= 840.702186 [2.924 6421 769]	= 1896.48043 [3.277 9483 662]
Саженъ .	2.333 333 33	= 84.000 000 [1.924 2792 861]	= 945.807 85 [2.975 8029 170]	= 2133.58086 [3.329 1091 063]

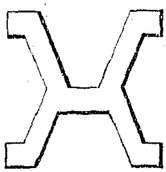
Число саженъ = [9.670 8908 937] . число метровъ =
= [9.960 7108 255] . число тоазовъ

Число метровъ = [9.484 0110 662] . число футовъ =
= [0.289 8199 318] . число тоазовъ.

71. Новые метры-прототипы. Сравненія мѣръ разной длины всегда затруднительны и не могутъ быть сдѣланы съ очень большою точностью; гораздо цѣлесообразнѣе имѣть однородныя нормальныя мѣры, напримѣръ метры, сдѣланные въ одно время, однимъ фабрикантомъ, и которые послѣ сравненій были бы разосланы во всѣ страны въ важнѣйшіе центры научной дѣятельности. Въ случаѣ порчи такой метръ всегда возможно послать въ избранное по общему соглашенію центральное учрежденіе для новыхъ сравненій съ оставленнымъ тамъ главнымъ метромъ. Эта мысль была высказана въ засѣданіи Физико-математическаго Отдѣленія С.-Петербургской Академіи Наукъ 8 апрѣля 1869 года нашимъ извѣстнымъ физикомъ *Якоби* (1801—1874). Академія отнеслась къ предложенію своего сочлена очень сочувственно и поручила ему изложить подробности въ Собраніи Британскаго Общества преуспѣянія наукъ въ Экзетерѣ. Ученыя учрежденія другихъ странъ вполнѣ одобрили предложеніе Якоби и порѣшили созвать въ августѣ 1870 года въ Парижѣ особую комиссію для всесторонняго его обсужденія. Однако военныя событія не дали осуществиться собранію ученыхъ, и только въ 1872 г. состоялся въ Парижѣ съѣздъ представителей разныхъ государствъ, на которомъ было рѣшено изготовить международные метры и килограммы, по возможности равные прежнимъ метрическимъ прототипамъ, хранящимся во французскомъ Архивѣ.

Въ 1875 году заключена формальная конвенція между 16 государствами (Россія, Австро-Венгрія, Аргентина, Бельгія, Венецуэла, Германія, Данія, Испанія, Италія, Перу, Португалія, Соединенные Штаты, Турція, Франція, Швейцарія и Швеція), къ которымъ впослѣдствіи присоединились еще четыре (Сербія въ 1879, Румынія въ 1882, Англія въ 1884 и Японія въ 1885 годахъ). Изготовленіе и повѣрка прототиповъ поручена Франціи, гдѣ было приспособлено особое зданіе (Pavillon de Breteuil) въ Севрѣ и составленъ особый комитетъ, названный *Международнымъ Комитетомъ вѣсовъ и мѣръ* (Bureau international des poids et mesures). Директоромъ Комитета назначенъ сперва *Брогкъ*, а затѣмъ, послѣ его смерти, *Бенуа*. Этотъ комитетъ разработалъ вопросъ о внутреннемъ составѣ, т. е. о веществѣ мѣръ и ихъ наружномъ видѣ. По предложенію *С. К. Девилля* ихъ рѣшили сдѣлать изъ сплава платины и иридія и придать видъ: метрамъ—линейки, представляющей въ сѣченіи фигуру буквы *X* (черт. 93), а килограммамъ—цилиндра, высота котораго равна діаметру. Опуская подробности устройства килограммовъ, ограничимся лишь разсмотрѣніемъ новыхъ линейныхъ мѣръ—метровъ.

Приготовленіе сплава было сопряжено съ большими затрудненіями, потому что иридій весьма трудно очистить отъ родственныхъ ему металловъ—родія и желѣза. Послѣ нѣсколькихъ неудачныхъ попытокъ требуемый сплавъ былъ приготовленъ наконецъ въ 1883—87 гг. въ Лондонѣ, въ мастерскихъ *Джонсона, Маттеи* и К°. Всѣ мѣры были сдѣланы изъ одновременно расплавленнаго и совершенно однороднаго состава, заключающаго 90% платины и 10% иридія, съ удѣльнымъ вѣсомъ 21,5. Выработанный комитетомъ видъ метровъ, предложенный французскимъ физикомъ *Треска*, обладаетъ тѣмъ преимуществомъ, что даетъ открытую нейтральную поверхность *), и жезлъ при небольшомъ вѣсѣ имѣетъ наибольшую жесткость (сопротивленіе гнутію), а вслѣдствіе тонкости отдѣльныхъ своихъ частей — быстро и равномѣрно принимаетъ окружающую температуру. Полная длина жезла равна 1,020 метра. Вѣсъ его въ воздухѣ равенъ 3,3 килограмма (около 8 фунтовъ), а объемъ 153 941 куб. миллиметр. (около 9,4 куб. дюйма). Нарѣзы сдѣланы на нейтральной, тщательно отшлифованной плоскости и состоятъ изъ трехъ поперечныхъ черточекъ, отстоящихъ на 0,5 миллиметра одна отъ другой, и двухъ продольныхъ, на разстояніи 0,2 милл. Воображаемая прямая по серединѣ этихъ продольныхъ черточекъ означаетъ ось жезла. Боковыя поперечныя черточки нанесены



Черт. 93.

*) Нейтральною поверхностью бруса, въ механическомъ ученіи о сопротивленіи матеріаловъ, называютъ тотъ слой, который при сгибаніи бруса не удлиняется и не сжимается, что неизбѣжно происходитъ со всѣми другими слоями. Нейтральная поверхность проходитъ черезъ центръ тяжести бруса.

для того, чтобы, кромѣ метра, новые жезлы заключали въ себѣ также и миллиметры (разстояніе между крайними черточками на обоихъ концахъ жезла), для повѣрки микрометровъ и разныхъ физическихъ изслѣдованій. Толщина черточекъ очень незначительна и колеблется въ разныхъ жезлахъ отъ 6 до 8 микроновъ (1 микронъ = 0,001 миллиметра).

Для храненія этихъ метровъ изготовлены особые футляры въ видѣ цилиндровъ около 6 сантиметровъ въ діаметрѣ, изъ буковаго дерева, выложенные бархатомъ, которые въ свою очередь вкладываются въ мѣдную трубку съ навинтованною и запираемою замкомъ крышкою.

Сравненія всѣхъ метровъ-прототиповъ съ точностью до 0,2 микрона сдѣланы въ помѣщеніи бюро на особомъ компараторѣ *Бруннера.* Оказалось, что длины ихъ вообще очень близки къ длинѣ концевого платиноваго метра Борда или такъ называемаго *архивнаго метра* (Mètre des Archives), а жезлъ, помѣченный № 6, даже абсолютно ему равенъ. Поэтому № 6 былъ выдѣленъ и названъ *международнымъ прототипомъ*, назначеннымъ для постояннаго храненія въ бюро и для будущихъ сравненій; прочіе же метры, числомъ 30 (№№ 1—5, 7—31), по жребію распредѣлены между государствами, заключившими конвенцію.

Изъ чрезвычайно тщательныхъ и многократныхъ сравненій, произведенныхъ какъ для опредѣленія длины, такъ и для опредѣленія коэффиціента расширенія, получены нижеслѣдующія уравненія метровъ-прототиповъ, причемъ буквою t означена температура по термометру Цельсія, а μ — микроны.

$$\text{№ 6 или } M = 1\,m + 8^{\mu}.651\,t + 0^{\mu}.001\,t^2$$

			m		μ		μ			μ	
№	1	=	1	—	1.1	+	8.657	t	+	0.001	t^2
№	2	=	1	—	1.5	+	8.665	t	+	0.001	t^2
№	3	=	1	+	0.5	+	8.642	t	+	0.001	t^2
№	4	=	1	—	0.8	+	8.632	t	+	0.001	t^2
№	5	=	1	+	2.3	+	8.647	t	+	0.001	t^2
№	7	=	1	+	0.3	+	8.649	t	+	0.001	t^2

		m	μ	μ	μ
№ 8	=	1	− 0.4	+ 8.649 t	+ 0.001 t^2
№ 9	=	1	− 1.2	+ 8.643 t	+ 0.001 t^2
№ 10	=	1	− 0.8	+ 8.659 t	+ 0.001 t^2
№ 11	=	1	− 0.5	+ 8.650 t	+ 0.001 t^2
№ 12	=	1	− 0.3	+ 8.638 t	+ 0.001 t^2
№ 13	=	1	+ 0.3	+ 8.647 t	+ 0.001 t^2
№ 14	=	1	− 1.3	+ 8.646 t	+ 0.001 t^2
№ 15	=	1	+ 0.9	+ 8.655 t	+ 0.001 t^2
№ 16	=	1	− 0.6	+ 8.653 t	+ 0.001 t^2
№ 17	=	1	+ 0.9	+ 8.659 t	+ 0.001 t^2
№ 18	=	1	− 1.0	+ 8.642 t	+ 0.001 t^2
№ 19	=	1	+ 1.1	+ 8.655 t	+ 0.001 t^2
№ 20	=	1	+ 0.8	+ 8.673 t	+ 0.001 t^2
№ 21	=	1	+ 2.5	+ 8.665 t	+ 0.001 t^2
№ 22	=	1	− 1.3	+ 8.667 t	+ 0.001 t^2
№ 23	=	1	− 1.0	+ 8.661 t	+ 0.001 t^2
№ 24	=	1	+ 1.8	+ 8.670 t	+ 0.001 t^2
№ 25	=	1	+ 0.7	+ 8.648 t	+ 0.001 t^2
№ 26	=	1	+ 0.9	+ 8.647 t	+ 0.001 t^2
№ 27	=	1	− 1.6	+ 8.657 t	+ 0.001 t^2
№ 28	=	1	+ 0.5	+ 8.650 t	+ 0.001 t^2
№ 29	=	1	− 2.8	+ 8.674 t	+ 0.001 t^2
№ 30	=	1	+ 2.8	+ 8.638 t	+ 0.001 t^2
№ 31	=	1	+ 0.6	+ 8.658 t	+ 0.001 t^2

На долю Россіи выпали №№ 11 и 28, которые и были привезены осенью 1889 года въ С.-Петербургъ академиками *Баклундомъ* и *Вильдомъ* и хранятся теперь одинъ: (№ 11) въ Академіи Наукъ, а другой (№ 28) въ Главной Палатѣ Мѣръ и Вѣсовъ. Кромѣ того Финляндія пріобрѣла себѣ метръ № 5.

При сравненіи различныхъ мѣръ необходимо помнить, что нормальная температура прежнихъ мѣръ равна 13° R, а новыхъ 0°.

72. Базисные приборы. До конца XVIII вѣка базисы измѣрялись деревянными брусками (жезлами), послѣдовательно укладываемыми просто по землѣ или на особыхъ подставкахъ вдоль базиса. Нерѣдко пользовались и ровною поверхностью льда, измѣряя базисы зимою, на озерахъ и рѣкахъ. Возможностью передвиженія брусковъ отъ толчковъ при взаимномъ соприкосновеніи и измѣненіемъ длины ихъ отъ дѣйствія перемѣнъ температуры и влажности пренебрегали. Однако деревянные бруски, приготовляемые обыкновенно на мѣстѣ, всегда сравнивались съ нормальными мѣрами до и послѣ измѣренія базисовъ. Главный недостатокъ прежнихъ измѣреній заключался въ неизвѣстности длины жезловъ во время самыхъ измѣреній: хотя расширеніе дерева при возрастаніи температуры весьма незначительно, но оно вообще разнообразно и мало изслѣдовано; къ тому же дерево коробится. Вотъ почему съ конца XVIII в. базисы измѣряются почти исключительно металлическими жезлами, изготовляемыми съ такою же тщательностью, какъ нормальныя мѣры; конечно, и металлическіе жезлы измѣняютъ свою длину съ перемѣною температуры, но если коэффиціенты расширенія ихъ извѣстны, а также извѣстна температура каждаго жезла во время измѣренія, то весьма легко принять въ разсчетъ вліяніе температуры при вычисленіи длины базиса.

Жезлы, снабженные приспособленіями для приведенія ихъ въ надлежащее положеніе, измѣренія ихъ наклонности, температуры и проч. и служащіе для наиболѣе точныхъ измѣреній линій на мѣстности, называются *базисными приборами*. Каждый такой приборъ долженъ удовлетворять слѣдующимъ условіямъ:

1) Длина жезловъ должна легко и удобно повѣряться въ полѣ, во время самыхъ измѣреній, для чего при базисномъ приборѣ должны быть нормальная мѣра и компараторъ.

2) Температура жезловъ должна опредѣляться съ большою точностью или вліяніе расширенія должно устраняться особыми приспособленіями (компенсаціонные приборы); притомъ коэффиціенты расширенія жезловъ должны быть заранѣе изслѣдованы.

3) Концевые жезлы не должны касаться другъ друга непосредственно, а при укладкѣ по базису между ними необходимо оставлять небольшіе промежутки, измѣряемые съ большою точностью вспомогательными приспособленіями.

4) Каждый жезлъ долженъ быть устроенъ такъ, чтобы его можно было легко и удобно устанавливать въ вертикальной плоскости базиса и измѣрять наклонность его къ горизонту.

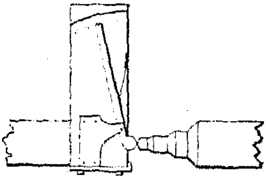
Устройство существующихъ базисныхъ приборовъ весьма разнообразно: вотъ отличительныя особенности наиболѣе замѣчательныхъ приборовъ.

По роду жезловъ базисные приборы могутъ быть раздѣлены, подобно нормальнымъ мѣрамъ, на *приборы съ концевыми* и *приборы съ нарѣзными жезлами* (контактные и оптическіе).

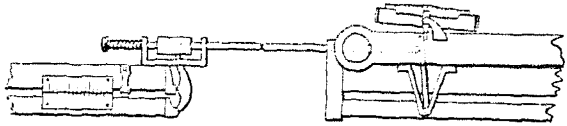
1) Приборы съ концевыми жезлами состоятъ обыкновенно изъ *четырехъ* жезловъ, устанавливаемыхъ вдоль базиса въ последовательномъ порядкѣ одинъ за другимъ. Необходимость именно четырехъ жезловъ основана на слѣдующемъ соображеніи: во время снималія задняго и при установкѣ передняго жезла могутъ произойти толчки смежныхъ жезловъ. Благодаря извѣстнымъ приспособленіямъ, эти толчки не могутъ передаваться слѣдующему жезлу, такъ что при переноскѣ послѣдняго жезла впередъ, когда три остальные лежатъ на своихъ подставкахъ, средній изъ нихъ совершенно обезпеченъ отъ толчковъ и, слѣдовательно, дѣйствительно остается на мѣстѣ неподвижно. Главное различіе приборовъ съ концевыми жезлами заключается въ способахъ соприкосновенія жезловъ и въ измѣреніи промежутковъ между ними, если они не доводятся до взаимнаго соприкосновенія. Въ приборѣ *Струве* одинъ конецъ каждаго жезла имѣетъ чувствительный рычагъ (черт. 94), въ приборѣ *Бача* — контактный уровень (черт. 95), въ приборѣ *Скотта*—пружинную высовку (черт. 96). Въ приборахъ, въ которыхъ жезлы не доводятся до взаимнаго соприкосновенія, промежутки между ними измѣряются: въ приборахъ *Борда*, *Шуберта* и *Теннера*—простыми высовками (черт. 97), въ приборѣ же *Бесселя*—мѣрнымъ клиномъ (черт. 98).

2) Приборы съ нарѣзными жезлами состоятъ обыкновенно изъ *одного* жезла. Вдоль базисной линіи устанавливаютъ массивныя треноги съ вертикальными микроскопами, снабженными микрометрами; такихъ треногъ имѣется три. Жезлъ кладется такъ, чтобы нарѣзки на концахъ оказались во внѣшнихъ фокусахъ микроскоповъ двухъ первыхъ треногъ, и нарѣзки эти

отсчитываются какъ бы на компараторѣ; затѣмъ жезлъ переносится дальше, подъ микроскопы второй и третьей треногъ, и, пока производятся отсчеты по микрометрамъ, первая тренога переносится дальше. Треноги снабжены приспособленіями для вертикальнаго и боковаго движеній микроскоповъ, а сами микроскопы устроены такъ, что нити микрометровъ можно наво-



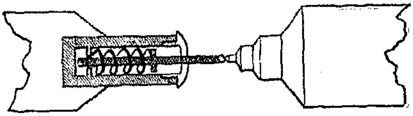
Черт. 94.



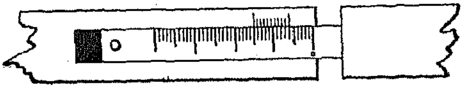
Черт. 95.

дить не только на нарѣзки жезла, помѣщающіяся подъ самымъ объективомъ микроскопа, но и на знаки въ центрахъ, устроенныхъ въ землѣ; это такъ называемые «телескопическіе микроскопы».

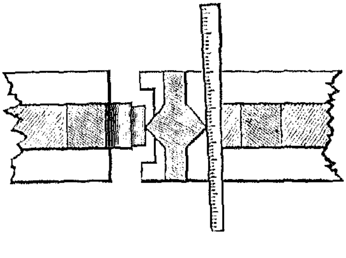
По способу опредѣленія истинной длины жезловъ во время измѣреній базисные приборы могутъ быть раздѣлены на при-



Черт. 96.



Черт. 97.



Черт. 98.

боры съ *простыми*, *биметаллическими* и *компенсаціонными* жезлами.

1) Длина простыхъ жезловъ опредѣляется по отсчетамъ ртутныхъ термометровъ, шарики которыхъ вложены въ углубленія, сдѣланныя въ самихъ жезлахъ (таковы жезлы приборовъ *Теннера*, *Струве*, *Порро* и *Иваньеса*). Если назвать длину жезла, при нѣкоторой опредѣленной температурѣ t_0, черезъ l_0,

а коэффиціентъ его расширенія черезъ k, то длина жезла l, при температурѣ измѣренія t, будетъ:

$$l = l_0 + k\,(t - t_0)\,.\,l_0 \tag{47}$$

2) Биметаллическіе жезлы состоятъ изъ двухъ полосъ, сдѣланныхъ изъ разныхъ металловъ съ заранѣе изслѣдованными и потому извѣстными коэффиціентами расширенія. Обѣ полосы составного жезла скрѣплены на одномъ концѣ и могутъ свободно расширяться на своихъ подставкахъ, такъ что другіе концы при измѣненіи температуры перемѣщаются. Если извѣстна величина этого перемѣщенія, то длина жезла опредѣлится и безъ знанія его температуры. Пусть обѣ полосы имѣютъ равную длину l_0 при температурѣ t_0; тогда, если коэффиціенты ихъ расширенія означить черезъ k_1 и k_2, длины полосъ при температурѣ t будутъ соотвѣтственно:

$$l_1 = l_0 + k_1\,(t - t_0)\,l_0$$

$$l_2 = l_0 + k_2\,(t - t_0)\,l_0$$

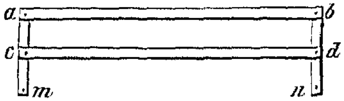
Послѣ опредѣленія изъ этихъ двухъ уравненій неизвѣстной $(t - t_0)$ и подстановки ея обратно въ эти же уравненія, получается:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= l_0 + \frac{k_1}{k_1 - k_2}\,(l_1 - l_2) \\ l_2 &= l_0 + \frac{k_2}{k_1 - k_2}\,(l_1 - l_2) \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

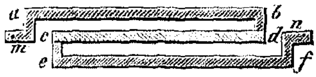
Величины l_1 и l_2 будутъ опредѣлены тѣмъ точнѣе, чѣмъ разность $k_1 - k_2$ будетъ больше; вотъ почему оба металла, изъ которыхъ сдѣланы полосы составныхъ жезловъ, должны имѣть по возможности различные коэффиціенты расширенія. Такъ, жезлы прибора *Борда* сдѣланы изъ платины и мѣди, прибора *Бесселя* — изъ желѣза и цинка, *Порро* — изъ стали и мѣди, *Репсольда* — изъ стали и цинка, *Бруннера* — изъ платины и мѣди. Что касается величины разности длинъ полосъ $(l_1 - l_2)$, то она опредѣляется высовками съ верньерами (приборъ *Борда*), мѣрнымъ клиномъ (приборъ *Бесселя*), отсчетами микрометровъ микроскоповъ (новѣйшіе приборы *Репсольда*, *Порро*, *Бруннера*) или просто сравненіями (проволочный приборъ *Іедерина*).

Необходимо замѣтить, что уравненія (48) справедливы лишь въ предположеніи, что въ моментъ измѣренія обѣ полосы имѣютъ дѣйствительно одинаковую температуру, поэтому жезлы должны находиться при измѣреніяхъ базиса въ одинаковыхъ условіяхъ, быть вполнѣ защищенными отъ непосредственнаго дѣйствія лучей Солнца, и самые металлы полосъ составного жезла должны обладать по возможности одинаковыми удѣльнымъ вѣсомъ, теплопроводностью, удѣльною теплотою и способностью лучеиспусканія тепла.

3) Устройство компенсаціонныхъ базисныхъ приборовъ основано на томъ же началѣ, на которомъ устраиваются уравнительные маятники часовъ: жезлы ихъ состоятъ изъ двухъ металловъ и имѣютъ на концахъ двѣ точки, разстояніе между ко-



Черт. 99.



Черт. 100.

торыми остается неизмѣннымъ при всякой температурѣ. Представителями этого рода приборовъ могутъ служить приборы *Кольби* и *Скотта*. На черт. 99 показано устройство жезла Кольби: двѣ полосы *ab* и *cd*, изъ мѣди и желѣза, скрѣплены по серединѣ неподвижно, а на концахъ связаны на шарнирахъ язычками *am* и *bn*. Отношенія длинъ *cm* : *am* и *dn* : *bn* равны отношенію коэффиціентовъ расширенія желѣза и мѣди, и потому разстояніе конечныхъ точекъ *m* и *n* остается неизмѣннымъ, какова бы ни была температура жезловъ. Въ приборѣ Скотта (черт. 100) каждый жезлъ состоитъ изъ трехъ полосъ *ab*, *cd* и *ef*, спаянныхъ въ *bd* и *ce*. Внѣшнія полосы *ab* и *ef* стальныя, а внутренняя *cd*—цинковая. Длины ихъ разсчитаны такъ, что разстояніе конечныхъ точекъ *m* и *n* остается одинаковымъ при всякой температурѣ.

Въ заключеніе этого краткаго перечисленія необходимо замѣтить, что если были попытки устраивать очень сложные базисные приборы, то теперь, наоборотъ, замѣчается стремленіе ихъ упростить. Сложнѣйшій изъ существующихъ — это приборъ *Бача* (черт. 95), совмѣщающій въ себѣ основанія жезловъ Борда съ непосредственнымъ отсчетомъ разности длины двухъ полосъ изъ желѣза и мѣди, компенсаціи ихъ и контактныхъ уровней. Простѣйшимъ должно признать новѣйшій приборъ *Вудварда*, состоящій только изъ одного простого жезла, лежащаго во время измѣреній въ особомъ желобѣ, всегда наполненномъ тающимъ снѣгомъ. Понятно, что тутъ не надо ни измѣрять температуру жезла (она всегда равна 0°), ни опредѣлять его коэффиціентъ расширенія. Испытанія этого прибора, сдѣланныя въ 1892 г. при измѣреніи части Холтонскаго базиса въ Индіанѣ, показали, что онъ даетъ точность, недостижимую никакими изъ существующихъ приборовъ. Описаніе разныхъ базисныхъ приборовъ можно найти въ слѣдующихъ сочиненіяхъ:

Бача — U. S. Coast and Geodetic Survey Report, 1873, 1882.
Бесселя — Gradmessung in Ostpreussen.
Борда — Base du système métrique décimal.
Вудварда — U. S. Coast and Geodetic Survey Report, 1892.
Иваньеса — Sereix y Arcos. Aparato de Ibánez. Madrid, 1889.
Іедерина — Записки В. Т. О. Главнаго Штаба, часть LI, 1894.
Кольби — Account of the triangulation... London, 1858.
Порро — Mémorial du Dépôt général de la guerre. IX, Paris, 1871.
Ренсольда — Oudemans, Triangulation von Java. I Abth. 1875.
Скотта — U. S. Coast and Geodetic Survey Report, 1882.
Струве — Дуга Меридіана, т. I, стр. 40—76.
Теннера — Записки В. Т. Депо, часть VIII, 1843.
Шуберта — Записки В. Т. Депо, часть II, 1838.

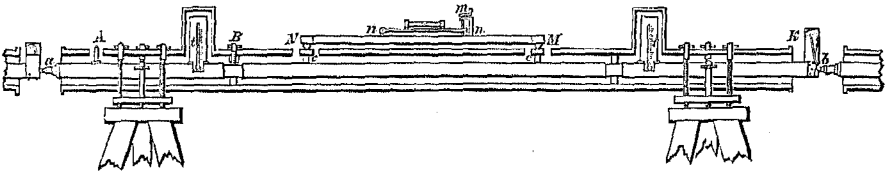
Ниже изложены устройство и употребленіе приборовъ, служащихъ нынѣ для измѣренія базисовъ въ Россіи.

73. Приборъ Струве. Базисный приборъ Струве состоитъ изъ четырехъ мѣрныхъ и одного нормальнаго жезла. Всѣ они сдѣланы изъ кованнаго желѣза и представляютъ брусья по два тоаза длиною съ квадратнымъ поперечнымъ сѣченіемъ около $1^1/_2$ дюйма въ сторонѣ. Концы нормальнаго жезла представляютъ тщательно полированные и слегка выпуклые цилиндрики; длиною жезла называется разстояніе между центрами его оконечностей. Мѣрные же жезлы имѣютъ различныя оконечности: одинъ, такъ называемый *твердый* конецъ представляетъ такой же полированный и слегка выпуклый цилиндрикъ, какъ и концы мѣрнаго жезла, другой, *мягкій* представляетъ *малое плечо ломанаго рычажка* (черт. 94), вращающагося на горизонтальной оси, вложенной въ стѣнки мѣдной коробки, привинченной къ самому тѣлу жезла. Весь рычажокъ или «фюльгебель» скрытъ въ коробкѣ, изъ которой подъ дѣйствіемъ пружинки выступаетъ лишь его полушаровая оконечность. Длинный конецъ рычажка, снабженный указательною черточкою (индексомъ), можетъ двигаться по дугѣ, на которой нанесено 30 равныхъ дѣленій. Передвиженію индекса на одно дѣленіе этой дуги соотвѣтствуетъ перемѣщеніе конца жезла приблизительно на 0,01 линіи. Для отсчитыванія показаній индекса въ верхней части коробки сдѣлано окно со стекломъ, а для введенія жезла въ линію во время измѣреній на передней части коробки имѣется вертикальная бѣлая полоса. Задержка съ наружною пуговкою служитъ для сбереженія оси фюльгебеля при храненіи жезла. Длиною мѣрнаго жезла называется разстояніе между его концами, когда индексъ указываетъ на дѣленіе 15.

Для предохраненія отъ рѣзкихъ перемѣнъ температуры, а также для удобства обращенія, жезлы обложены ватой, обвиты холщевыми лентами и заключены въ прочные деревянные, окрашенные бѣлою масляною краскою и снабженные четырьмя желѣзными ручками ящики, изъ которыхъ немного выдаются лишь обнаженные концы жезловъ a и b (черт. 101). Во время храненія и перевозки концы жезловъ закрываются особыми колпаками. Внутри ящиковъ каждый жезлъ подпирается двумя мѣдными подставками въ видѣ разборныхъ перегородокъ, имѣющихъ одна круглое, а другая квадратное отверстія. Подставки расположены на разстояніяхъ $^1/_4$ и $^3/_4$ длины жезла, и въ этихъ мѣстахъ, около 3-хъ дюймовъ длиною, жезлъ не обмотанъ ватою и представляетъ въ сѣченіи кругъ и квадратъ. Такимъ образомъ жезлъ внутри ящика можетъ передвигаться по своей оси въ предѣлахъ около дюйма въ ту или другую сторону. Эти передвиженія производятся особымъ ключемъ съ продольнымъ прорѣзомъ, надѣваемымъ на выступающіе стержни жезла (A)

и ящика. Всякое движеніе жезла внутри ящика прекращается послѣ закрѣпленія винта B, проходящаго черезъ крышку ящика и верхнюю половину подставки; при этомъ, благодаря упомянутой фигурѣ сѣченій обнаженныхъ частей жезла у подставокъ, не можетъ быть ни продольнаго вращенія, ни скручиванія жезла.

Въ тѣлѣ жезла сдѣланы два углубленія, въ которыя вставлены шарики ртутныхъ термометровъ t и t; шарики засыпаны желѣзными опилками, а углубленія закрыты пластинками; трубки же термометровъ выступаютъ вверхъ и заключены въ коробки со стеклами и деревянными дверцами. Наконецъ, къ жезлу припаяны еще два столика c, тоже выходящіе черезъ

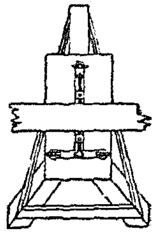


Черт. 101.

крышку ящика наружу; они служатъ для помѣщенія уровня MN, которымъ опредѣляется наклонность жезла къ горизонту. Въ крышкѣ ящика противъ термометровъ и только что упомянутыхъ столиковъ сдѣланы прорѣзы, не препятствующіе продольному передвиженію жезла въ ящикѣ при помощи ключа.

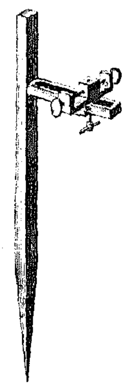
Трубка уровня укрѣплена на линеечкѣ nn, которая однимъ концомъ вращается на горизонтальной оси, а другимъ можетъ въ достаточныхъ предѣлахъ подниматься и опускаться при помощи безконечнаго винта съ ручкою m. Положеніе линеечки nn въ моментъ приведенія пузырька уровня на середину отсчитывается на дугѣ, раздѣленной на 250 частей, по верньеру. Нижняя большая линейка уровня MN имѣетъ три ножки, которыми весь приборъ и ставится на столики жезла на мѣста, указанныя небольшими кружечками. Кромѣ этого продольнаго или *большого уровня* имѣется еще другой, поперечный или *маленькій*. Онъ служитъ для точной установки жезла въ вертикальной плоскости.

Во время измѣренія базиса жезлы въ своихъ ящикахъ кладутся на мѣдныя треножныя подставки съ подъемными и азимутальными винтами, а самыя подставки располагаются на особыхъ деревянныхъ треножныхъ табуретахъ (черт. 102 и 103). Благодаря этому, жезлы весьма легко и удобно приводятся въ вертикальную плоскость базиса, устанавливаются на требуемой высотѣ и, разъ установленные, остаются неподвижными. При каждомъ приборѣ имѣется 10 подставокъ и столько же табуретовъ, такъ что когда заднiй жезлъ перенесенъ впередъ, то для него уже заготовлены подставки и нѣтъ надобности дожидаться ихъ перенесенія. Необходимо еще замѣтить, что для устраненія всякаго шатанія ящика съ жезломъ на подставкахъ, послѣднія имѣютъ горбы: у одной одинъ, а у другой два и, слѣдовательно, ящикъ подпирается всегда только въ трехъ точкахъ. Въ мѣстахъ укладки на подставки ящики жезловъ окованы снизу и съ боковъ желѣзомъ.



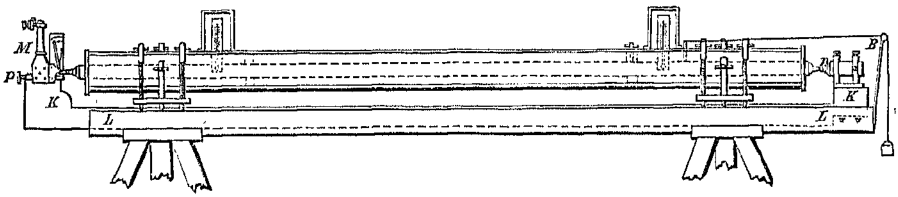
Черт. 102.

При окончаніи дневной работы и вообще для остановки измѣренія въ случаѣ, напримѣръ, наступленія ненастной погоды, употребляется желѣзный колъ (черт. 103), около 3-хъ футовъ длиною, забиваемый вертикально въ землю на глубину около 2-хъ футовъ. Къ верхней его части придѣлана подъ прямымъ угломъ желѣзная полоса съ прорѣзомъ; къ полосѣ привинчивается отдѣльная мѣдная часть, марка, съ подвижнымъ кубикомъ, имѣющимъ вверху кружокъ и точку, означающую предѣлъ измѣренія. Марка можетъ передвигаться по прорѣзу полосы и въ любомъ положеніи закрѣпляться снизу зажимнымъ винтомъ, а для передвиженій кубика въ направленіи базиса служатъ боковые, микрометрическіе винты. Колъ забивается такъ, чтобы полоса стояла перпендикулярно къ базису, а стержни микрометрическихъ винтовъ—по базису.



Черт. 103.

74. Компараторъ Струве. Чтобы имѣть возможность опредѣлять истинную длину жезловъ и удостовѣряться въ ихъ неизмѣнности, вмѣстѣ съ мѣрными жезлами возится нормальный жезлъ и компараторъ. Компараторъ съ поставленнымъ на немъ жезломъ изображенъ сбоку на черт. 104. Главная часть компаратора—толстый дубовый брусъ KK, имѣющій на одномъ концѣ массивную желѣзную оправу съ привинченнымъ къ ней желѣзнымъ брускомъ, оканчивающимся маленькимъ цилиндрикомъ p со слегка выпуклою поверхностью, какъ концы мѣрныхъ жезловъ. Къ другому концу того же бруса привинченъ вертикальный микроскопъ M съ микрометромъ. Въ фокальной плоскости микроскопа расположена подвижная горизонтальная



Черт. 104.

пластинка, передвигаемая безконечнымъ винтомъ съ ручкою P и снабженная коробкою съ фюльгебелемъ, подобною коробкѣ у мягкихъ концовъ мѣрныхъ жезловъ. По бокамъ бруса KK, не касаясь его, лежатъ два другіе подобные же бруса LL, назначеніе которыхъ — служить опорою для подставокъ подъ жезлъ.

Сравненіе жезловъ заключается въ послѣдовательной установкѣ ихъ на компараторъ, причемъ мягкій конецъ мѣрнаго жезла подводится къ цилиндрику p, а къ его твердому концу подводится, въ свою очередь, фюльгебель пластинки, послѣ чего производится отсчетъ микрометра. Прежде чѣмъ класть жезлъ на компараторъ, необходимо, конечно, отодвинуть пластинку винтомъ P, чтобы неосторожнымъ толчкомъ не повредить установку компаратора. Сравненіе дѣлается двумя лицами. Когда жезлъ ляжетъ на подставки, то оба наблюдателя вращаютъ подъемные и азимутальные ихъ винты и тѣмъ приводятъ мягкій конецъ жезла противъ цилиндрика, а твердый — противъ фюльгебеля пластинки. Затѣмъ наблюдатель у мягкаго конца дѣйствіемъ ключа на стержень A (черт. 101) подводитъ свой конецъ до полнаго прикосновенія и даже нажатія на цилиндрикъ такъ, чтобы индексъ фюльгебеля сталъ на дѣленіе 15; наблюдатель у твердаго конца доводитъ пластинку до жезла и останавливаетъ ее, когда индексъ ея фюльгебеля тоже станетъ на дѣленіе 15. Тогда, глядя въ микроскопъ M, онъ наводитъ нити микрометра на какую нибудь черту пластинки и записываетъ въ журналъ какъ названіе этой черты, такъ и отсчетъ по барабану микроскопа. Вмѣстѣ съ этимъ записываются показанія обоихъ термометровъ жезла. Каждый наблюдатель производитъ независимые отсчеты микрометра и термометровъ, и оба тотчасъ ихъ свѣряютъ; если отсчеты не согласны, то они повторяются. Прежде чѣмъ снимать жезлъ съ подставокъ, необходимо опять отодвинуть пластинку, а потомъ и жезлъ отъ цилиндрика p.

Когда на компараторъ кладется нормальный жезлъ, не имѣющій мягкаго конца, то, послѣ доведенія его ключемъ приблизительно на 0.01 дюйма отъ цилиндрика p, на стержень A надѣваютъ петельку особой бичевки, перекинутой черезъ блокъ B и къ которой привязана гиря около 3-хъ фунтовъ. Затѣмъ открѣпляютъ зажимной винтъ B (черт. 101), и жезлъ, отъ тяжести гири, самъ доходитъ до цилиндрика. Такимъ приспособленіемъ устраняется возможность грубаго удара конца жезла о цилиндрикъ p, и при каждомъ сравненіи происходятъ лишь слабые и однообразные толчки, характеризуемые глухимъ, едва слышнымъ звукомъ.

Сравненія всѣхъ четырехъ мѣрныхъ жезловъ, означенныхъ буквами A, B, C, D, съ нормальнымъ N производятся въ слѣдующемъ порядкѣ: сперва кладется на компараторъ жезлъ N, затѣмъ жезлы A, B, C, D и вторично N. Послѣ этого жезлъ N отодвигается отъ цилиндрика p, снова придвигается гирею и отсчитывается, послѣ чего кладутъ жезлы въ порядкѣ D, C, B, A и N. Такой двойной рядъ сравненій, называемый *полнымъ сравненіемъ жезловъ*, дѣлаетъ выводы независимыми отъ незначительныхъ перемѣнъ температуры и предохраняетъ ихъ отъ погрѣшностей въ отсчетахъ. Сравненія дѣлаются, конечно, въ закрытомъ помѣщеніи, внутренняя температура котораго должна быть близка къ средней температурѣ измѣренія базиса. Передъ сравненіями всѣ жезлы должны лежать рядомъ не менѣе 2 — 3 часовъ, чтобы они успѣли принять одинаковую температуру. Обыкновенно дѣлаютъ два полныхъ сравненія жезловъ до начала и столько же послѣ окончанія измѣренія базиса.

Нижеслѣдующая таблица представляетъ журналъ полнаго сравненія жезловъ; отсчеты микрометра показаны въ частяхъ дѣленій барабана микроскопа при компараторѣ.

Время.	Терм.	Микр.	Среднее.	Жезлы.	Время.	Терм.	Микр.	Среднее.
		∂					∂	
$23^h\ 9^m$	14°.8 R	83.7	∂ 84.70	*N*	$0^h\ 18^m$	15°.0 R	86.7	∂ 86.35
	14°.9 R	85.7				15°.0 R	86.0	
23	17°.4 C	50.2	51.00	*A*	13	17°.5 C	50.6	51.25
	17°.4 C	51.8				17°.4 C	51.9	
29	17°.2 C	54.0	53.85	*B*	8	17°.3 C	53.8	53.55
	17°.3 C	53.7				17°.4 C	53.3	
34	17°.6 C	39.3	38.90	*C*	0 3	17°.7 C	39.5	38.40
	18°.5 C	38.5				18°.5 C	37.3	
39	17°.3 C	36.8	37.10	*D*	23 58	17°.4 C	36.2	36.45
	17°.3 C	37.4				17°.3 C	36.7	
23 46	15°.0 R	85.4	85.10	*N*	23 54	14°.9 R	85.7	85.70
	14°.9 R	84.8				14°.9 R	85.7	

Такъ какъ при измѣреніи базиса всѣ четыре жезла кладутся послѣдовательно одинъ за другимъ, то для простоты вычисленій опредѣляютъ разность между суммою всѣхъ четырехъ мѣрныхъ жезловъ и учетверенною длиною нормальнаго. Въ данномъ случаѣ для разностей въ длинахъ отдѣльныхъ жезловъ получается:

	∂	∂	
$N - A =$	33.90	34.77	
$N - B =$	31.05	32.47	при ср. $t = 17^\circ.53$ C
$N - C =$	46.00	47.62	поправка — $0^\circ.18$ C
$N - D =$	47.80	49.57	$t = 17^\circ.35$ C
$4N - S =$	158.75	164.43	$= 13^\circ.9$ R

где $S = A + B + C + D$

Въ среднемъ $S = 4N - 161^{\partial}.59$.

Изъ послѣдующихъ сравненій получены величины

$$-163.46, \quad -159.54 \text{ и } -158.57,$$

и потому окончательно (см. стр. 192):

$$S = 4N - 160^{\partial}.79 = 4N - 0.2289 \text{ пар. линіи (при } t = 13^\circ.9 \text{ R}),$$

$$\text{или } S = 6911.8920 \text{ пар. линіи при } t = 13^\circ.9 \text{ R}$$

Опредѣленіе цѣны дѣленій барабана микроскопа производится при помощи наведеній нитей микрометра на двѣ или три смежныя черточки какого нибудь вывѣреннаго масштаба. Въ Пулковѣ употреблялась для этого линеечка Брауера, раздѣленная на 50-тыя доли дюйма; отсчеты по микрометру (въ среднемъ изъ 4-хъ наведеній), при установкѣ нитей на три смежныя черточки, были 20.8, 179.5 и 337.2; слѣдовательно въ среднемъ

$$\frac{1}{50} \text{ дюйма} = 158^{\partial}.2$$

откуда

$$1 \text{ дѣл. барабана микр.} = \frac{1}{7910} \text{ дюйма} = \frac{1}{702.5} \text{ пар. линіи}$$

На компараторѣ Струве весьма легко опредѣлить также цѣну дѣленій фюльгебелей. Для этого жезлы ставятся на компараторѣ намѣренно такъ, чтобы индексы фюльгебелей показывали не 15, а 13 и 17 (крайніе предѣлы, допускаемые при измѣреніи базисовъ). Для цѣны дѣленій фюльгебелей всѣхъ четырехъ жезловъ изъ многократныхъ сравненій получено

$$v = 9.28,\ 10.34,\ 10.26 \text{ и } 10.62 \text{ дѣленій барабана}$$

или въ среднемъ:

$$v = 10.12 \text{ дѣл. бар.} = \frac{1}{781.6} \text{ дюйма} = \frac{1}{69.42} \text{ пар. лин.}$$

75. Изслѣдованіе уровня и термометровъ. Наклонность жезловъ во время измѣреній получается при помощи отсчетовъ на дугѣ большого уровня MN (черт. 101). Вслѣдствіе малости вліянія наклонности жезловъ на результатъ измѣренія, самый уровень не отсчитывается, и пузырекъ его просто приводится на середину трубки. Поэтому, если бы дѣленія дуги представляли части окружности, напримѣръ минуты, то отсчеты выражали бы непосредственно углы наклоненій; необходимо было бы только время отъ времени опредѣлять мѣсто нуля уровня, т. е. отсчетъ по дугѣ, соотвѣтствующій горизонтальному положенію столиковъ на жезлахъ. Но дѣленія дуги большого уровня могутъ быть неизвѣстны. Во всякомъ случаѣ цѣну дѣленій дуги надо опредѣлить: это легко сдѣлать, привязавъ уровень къ вертикальному кругу угломѣрнаго инструмента, и устанавливая индексъ послѣдовательно на какія либо круглыя числа дѣленій, напримѣръ на 10, 20, 30..., отсчитывать микроскопы или верньеры этого круга. Для уровня Пулковскаго базиснаго прибора 1 дѣленіе равно $119''.9 = 2' - 0''.1$.

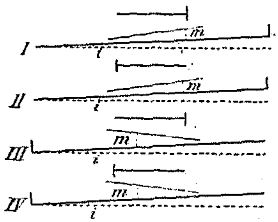
Помимо цѣны дѣленій дуги уровня необходимо еще опредѣлить *наклонность столиковъ* подъ уровень въ отдѣльныхъ жезлахъ, потому что трудно допустить, чтобы плоскости столиковъ были совершенно параллельны осямъ жезловъ. Для вывода наклонности столиковъ каждый жезлъ ставится на компараторъ въ двухъ различныхъ положеніяхъ, мягкимъ концомъ въ ту и въ другую сторону, причемъ въ каждомъ положеніи уровень перекладывается и верньеръ дуги отсчитывается. Такъ какъ можно принять, что компараторъ въ теченіи наблюденій остается неподвижнымъ, то указанныя положенія жезла и уровня могутъ быть представлены чертежомъ 105, на которомъ ось жезла во всѣхъ четырехъ положеніяхъ имѣетъ одинаковую наклонность къ горизонту. Означимъ наклонность столиковъ къ оси жезла черезъ m, мѣсто нуля на уровнѣ черезъ M, а наклонность оси жезла къ горизонту черезъ i; если означить еще отсчеты дуги во всѣхъ четырехъ положеніяхъ послѣдовательно черезъ a, b, c и d, то сказанныя величины, какъ легко видѣть изъ чертежа, связаны слѣдующими уравненіями:

$$I \;.\;.\;.\;.\;.\; M - a = m + i$$

$$II \;.\;.\;.\;.\;.\; b - M = m + i$$

$$III \;.\;.\;.\;.\;.\; c - M = -m + i$$

$$IV \;.\;.\;.\;.\;.\; M - d = -m + i$$



Черт. 105.

откуда

$$M = \frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}; \quad m = \frac{(b+d)-(a+c)}{4}; \quad i = \frac{c-a}{2} = \frac{b-d}{2}$$

Напримѣръ, для жезла A получено:

$a = 170.95$	откуда	$M = 168.56$
$b = 166.17$		$m = -0.01$
$c = 166.19$		$i = -2.38$
$d = 170.92$		$M - m = 168.5$

Величины $M - m$ для другихъ жезловъ оказались:

для B.... 168.4

» C.... 168.2

» D.... 168.5

Поправка каждаго термометра можетъ быть легко получена, если шкала простирается отъ 0° до 100° С. Термометры при жезлахъ имѣютъ обыкновенно очень небольшую по объему шкалу, потому что измѣренія базиса и сравненія жезловъ производятся въ лѣтнее время, когда колебанія температуры вообще незначительны. Поэтому, вмѣсто опредѣленія постоянныхъ точекъ (погруженіемъ въ тающій снѣгъ и въ пары воды) жезловые термометры изслѣдуются простымъ сравненіемъ ихъ съ какимъ нибудь нормальнымъ термометромъ, поправки котораго при разныхъ температурахъ извѣстны. Для такихъ сравненій служитъ большой жестяной сосудъ съ двойными стѣнками, съ краномъ внизу и съ вращающеюся стойкою въ серединѣ; къ этой стойкѣ можно одновременно привязать до 20-ти термометровъ въ отвѣсномъ положеніи. Наполнивъ сосудъ сперва холодною водою (при температурѣ около 10°), а затѣмъ нагрѣтою градусовъ до 30, производятъ послѣдовательные отсчеты всѣхъ термометровъ, въ числѣ которыхъ долженъ находиться и нормальный. Передъ отсчетами надо, конечно, всякій разъ хорошенько мѣшать воду, что и производится вращеніемъ стойки со всѣми привѣшенными къ ней термометрами. Для исключенія вліянія перемѣнъ температуры вслѣдствіе постепеннаго охлажденія воды отсчеты производятся дважды, сперва въ одномъ, а затѣмъ въ обратномъ порядкѣ. Разности показаній всѣхъ изслѣдуемыхъ термометровъ и нормальнаго, исправленнаго за его погрѣшность, даютъ непосредственно ихъ поправки. Зная эти поправки при двухъ или, еще лучше, при многихъ различныхъ температурахъ, легко нанести ихъ на графленую бумагу и получить *кривыя поправокъ*, по которымъ и берутся затѣмъ поправки каждаго термометра при любой отсчитанной на немъ температурѣ.

Если изслѣдуемые термометры не одной системы, напримѣръ, если нѣкоторые термометры имѣютъ шкалу Реомюра, а другіе—Цельзіуса, то, конечно, необходимо ихъ показанія приводить къ одной опредѣленной шкалѣ.

Такъ какъ при вычисленіи измѣренія базиса изъ всѣхъ показаній термометровъ берется ариѳметическая средина, то изъ полученныхъ поправокъ для всѣхъ 8 термометровъ четырехъ жезловъ опредѣляется просто среднее изъ всѣхъ поправокъ.

76. Измѣреніе базиса. Дѣйствія, производимыя при измѣреніи базиса, можно подраздѣлить на три части: 1) *начальныя*, состоящія въ расчисткѣ базисной линіи, разстановкѣ всѣхъ вспомогательныхъ приборовъ и установкѣ первыхъ четырехъ жезловъ, 2) *собственно измѣреніе*, когда работа непрерывно подвигается впередъ въ однообразномъ порядкѣ, въ которомъ каждый участвующій имѣетъ опредѣленныя обязанности, и 3) *конечныя дѣйствія*, когда измѣреніе доведено до конца базиса, когда желаютъ прекратить работу на ночь, или въ случаѣ наступленія ненастной погоды.

1) Передъ измѣреніемъ базисная линія должна быть осмотрѣна и очищена отъ кустовъ и всякихъ препятствій; овраги и канавы должны быть засыпаны или черезъ нихъ устроены мостики. Затѣмъ на всемъ протяженіи базисной линіи необходимо снять дернъ, полосою около 1 аршина ширины, дабы табуреты подъ жезлы стояли вполнѣ прочно и ходьба наблюдателей не могла причинять сотрясеній жезламъ. Полезно также измѣрить базисъ предварительно цѣпью, чтобы знать примѣрно число дней работы и намѣтить впередъ мѣста перерыва на ночь; послѣднія должны приходиться на ровныхъ участкахъ линіи, отнюдь не на перекинутыхъ черезъ овраги мостахъ или вблизи дороги, гдѣ можно опасаться сотрясеній.

Введеніе жезловъ въ базисную линію производится по указаніямъ наблюдателя у теодолита (см. § 92) *), располагаемаго на линіи въ послѣдовательныхъ точкахъ, приблизительно черезъ каждыя 100 саженей. Чтобы этотъ теодолитъ можно было каждый разъ ставить точно на линіи, къ базиснымъ сигналамъ или пирамидамъ прибиваютъ поперечныя планки, а къ нимъ марки въ видѣ бѣлой доски съ вертикальною черною полосою. Эти марки прибиваются тоже по указаніямъ наблюдателя у теодолита, устанавливаемаго послѣдовательно на обоихъ центрахъ; онѣ должны быть прибиты въ вертикальной плоскости, заключающей оба базисные центра. Если случится, что оси визирныхъ цилиндровъ расположены точно въ отвѣсныхъ линіяхъ съ базисными центрами, то, конечно, отдѣльныхъ марокъ можно и не прибивать и при установкѣ теодолита пользоваться самими визирными цилиндрами.

---

*) Вмѣсто теодолита употребляется иногда небольшой пассажный инструментъ, т. е. зрительная труба, вращаемая около перпендикулярной къ ней горизонтальной оси.

Итакъ, въ разстояніи 100 саженей отъ начальной точки базиса устанавливаютъ теодолитъ точно по линіи; другой теодолитъ ставится на перпендикулярѣ къ началу базисной линіи, въ разстояніи 3—4 саж. отъ центра. Перпендикуляръ возставляется при помощи мѣрной тесьмы, изъ которой составляется прямоугольный треугольникъ со сторонами, относящимися какъ 3 : 4 : 5. Второй теодолитъ служитъ для установки начала перваго жезла и, послѣ установки, для измѣренія малаго горизонтальнаго угла между базиснымъ центромъ и началомъ перваго жезла.

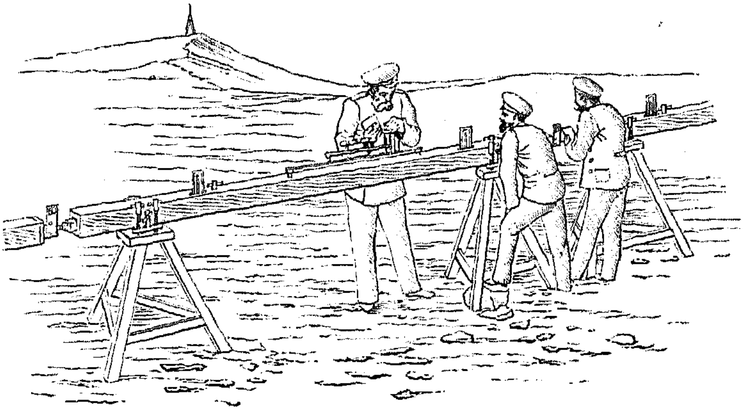
Одновременно съ установкою теодолитовъ ставятъ всѣ табуреты и подставки подъ жезлы. Чтобы подставки оказались точно противъ тѣхъ частей ящиковъ жезловъ, гдѣ имѣются желѣзныя оковки, табуреты ставятся по правилу, на которомъ сдѣланы соотвѣтствующія мѣтки. Наконецъ устанавливаютъ и самые жезлы, начиная съ перваго, въ порядкѣ A, B, C и D, мягкими концами впередъ, въ сторону, куда ведется измѣреніе. Когда кладется первый жезлъ A, то твердый его конецъ устанавливается сколь возможно надъ самымъ базиснымъ центромъ, для чего пользуются отвѣсикомъ и указаніями наблюдателя у боковаго теодолита; мягкій же конецъ вводится въ линію по указаніямъ наблюдателя у передняго теодолита. Порядокъ самой установки жезловъ описанъ ниже, въ п. 2.

Далѣе измѣряютъ превышеніе твердаго конца жезла A надъ базиснымъ центромъ, до долей дюйма, и горизонтальное разстояніе этого же конца отъ вертикальной оси боковаго теодолита. Первое измѣреніе служитъ для повѣрки наклонностей всѣхъ жезловъ, если извѣстна разность высотъ центровъ базиса, а второе—для вычисленія горизонтальнаго разстоянія между первымъ базиснымъ центромъ и началомъ перваго жезла.

Затѣмъ на жезлѣ A ставятъ большой уровень и послѣ отсчета наклонности уровень переносятъ на жезлъ B; далѣе отсчитываютъ фюльгебель и термометры жезла A и измѣряютъ горизонтальный уголъ между базиснымъ центромъ и твердымъ концомъ перваго жезла, наводя трубу боковаго теодолита последовательно нѣсколько разъ на центръ (ставя тамъ для лучшей его видимости тонкую иглу) и на конецъ жезла (на который надѣвается гильза, описанная въ § 70, черт. 91) и отсчитывая горизонтальный лимбъ. При наведеніи трубы надо слѣдить за уровнемъ, чтобы горизонтальная ось теодолита была горизонтальна.

Покончивъ съ этимъ, переносятъ большой уровень на жезлъ *C* и отсчитываютъ наклонность этого жезла и показанія фюльгебеля и термометровъ жезла *B*. Дальнѣйшая работа ведется порядкомъ, объясненнымъ ниже.

2) Различныя дѣйствія при измѣреніи базиса распредѣляются между четырьмя наблюдателями: № *1* — у теодолита на линіи, № *2* — у передняго мягкаго конца жезла, № *3* — у



Черт. 106.

задняго твердаго конца жезла и № *4*—при уровняхъ и табуретахъ съ подставками. При наблюдателяхъ должно состоять не менѣе 6 человѣкъ прислуги: 4 для перенесенія жезловъ и 2 для переноски табуретовъ и подставокъ. Обязанности отдѣльныхъ наблюдателей заключаются въ слѣдующемъ:

№ *1* смотритъ въ трубу теодолита и слѣдитъ за установкою каждаго жезла въ линіи, причемъ поднятіемъ до горизонтальнаго положенія правой или лѣвой руки указываетъ, въ которую сторону нужно подвинуть мягкій конецъ жезла по азимуту. Когда изображеніе полосы на фюльгебельной коробкѣ окажется точно между вертикальными нитями теодолита, наблюдатель подымаетъ одновременно обѣ руки. При помощи такихъ же знаковъ № *1* устанавливаетъ всѣ табуреты, слѣдя, чтобы середины подставокъ оказывались на базисной линіи. Время отъ времени № *1* повѣряетъ положеніе теодолита, наводя трубу на марки базисныхъ знаковъ или на ихъ визирные цилиндры. Если онъ замѣтитъ, что жезлы уклонились отъ линіи, то исправляетъ ошибку не на слѣдующемъ жезлѣ, а постепенно, отчего погрѣшность измѣренія будетъ меньше. Когда установка жезловъ приблизится къ теодолиту на разстояніе 5—10 саженей, № *1* даетъ знакъ пріостановить кладку жезловъ, а самъ переходитъ на новую точку стоянія, опять саженей на 100 впередъ, и, послѣ точной установки своего инструмента, приглашаетъ другихъ продолжать работу.

№ *2* и № *3* снимаютъ и вновь устанавливаютъ жезлы, отсчитываютъ и записываютъ показанія уровня, термометровъ и фюльгебелей; каждый изъ нихъ имѣетъ журналъ, одинаково разграфленый по образцу, приведенному въ § 77. Отсчеты дѣлаетъ сперва № *3*, потомъ № *2*, и одинъ изъ нихъ произноситъ затѣмъ свои записи, а другой слѣдитъ по своему журналу. Всѣ отсчеты должны быть согласными до 0.1; въ случаѣ разногласія отсчеты повторяются обоими наблюдателями.

Переносъ задняго жезла впередъ начинается съ того, что № *3* отодвигаетъ при помощи имѣющагося у него ключа послѣдній жезлъ отъ предпослѣдняго и вмѣстѣ съ № *2* подымаетъ ящикъ съ жезломъ рукою подъ мышку и передаетъ его носильщикамъ, берущимся за ручки ящика. Когда носильщики примутъ ящикъ, № *3* выдвигаетъ жезлъ внутри ящика ключемъ по возможности впередъ, дабы имѣть запасъ для движенія назадъ, послѣ слѣдующей установки ящика. Отпусканіе и закрѣпленіе зажимного винта *B* (черт. 101) при жезлѣ дѣлается правымъ заднимъ носильщикомъ; онъ долженъ быть заранѣе пріученъ дѣлать это въ то именно мгновеніе, когда онъ видитъ, что № *3* ставитъ ключъ для передвиженія жезла.

Носильщики подъ надзоромъ № *2* и № *3* идутъ съ правой стороны базисной линіи до приготовленныхъ впереди табуретовъ. Тутъ наблюдатели берутъ ящикъ въ руки и сами осторожно опускаютъ его на подставки, причемъ № *3* зорко слѣдитъ, чтобы не толкнуть стоящаго уже жезла и чтобы, послѣ установки, промежутокъ между концами жезловъ былъ около

1 дюйма. Какъ только ящикъ опущенъ на подставки, наблюдатель № *4* ставитъ на задній столикъ этого жезла маленькій поперечный уровень, а № *2* и № *3* начинаютъ вводить жезлъ въ линію, причемъ № *2* слѣдитъ за указаніями № *1*, а № *3*, смотря сверху и сбоку, подводитъ твердый конецъ вновь поставленнаго на продолженіе оси стоящаго уже жезла и, взглядывая на поперечный уровень, вращаетъ подъемные винты такъ, чтобы пузырекъ его былъ по серединѣ трубки. Послѣ этой предварительной установки № *3* отпускаетъ зажимной винтъ и ключемъ придвигаетъ жезлъ точно до соприкосновенія съ мягкимъ концомъ предъидущаго; окончательная установка, т. е. такая, при которой фюльгебель предъидущаго жезла станетъ на дѣленіе 15 (или близкое къ нему), достигается медленнымъ вращеніемъ въ противоположныя стороны двухъ правыхъ подъемныхъ винтовъ задней подставки. Тутъ же № *3* долженъ убѣдиться, что задержка фюльгебеля дѣйствительно отпущена, т. е. что фюльгебель имѣетъ полную свободу двигаться. Тогда № *3* произноситъ «есть», а № *2* подаетъ рукою знакъ № *1*, приглашая его вновь посмотрѣть въ трубу теодолита и убѣдиться, что окончательная установка жезла не вывела его передній конецъ изъ линіи. Если окажется, что положеніе жезла не совсѣмъ правильно, то № *2* дѣлаетъ нужныя исправленія по указаніямъ № *1*, а № *3* слѣдитъ за своимъ концомъ, чтобы эти исправленія не разстроили его установку. Если же все оказалось въ порядкѣ, то по слову № *2* «есть» № *2* и № *3* оставляютъ только что поставленный жезлъ, идутъ назадъ къ третьему (сзади) жезлу, отсчитываютъ на немъ большой уровень и переходятъ къ слѣдующему (второму сзади) жезлу, гдѣ отсчитываютъ фюльгебель и термометры *). Послѣ

---

*) Такой порядокъ объясняется слѣдующими соображеніями. Фюльгебель второго сзади жезла занимаетъ среднее мѣсто въ системѣ четырехъ поставленныхъ въ линію жезловъ, т. е. мѣсто, наиболѣе обезпеченное отъ толчковъ при сниманіи задняго жезла и установкѣ его впереди. Уровень же долженъ быть уже заранѣе снятъ со второго жезла, такъ какъ своимъ вѣсомъ онъ могъ бы измѣнить показаніе фюльгебеля. Хотя уровень отсчитывается на третьемъ сзади жезлѣ, т. е. на жезлѣ, могущемъ подвергнуться толчку при установкѣ слѣдующаго, однако вліяніе погрѣшности за наклонность ничтожна (см. § 78). На черт. 106 расположеніе наблюдателей показано неправильно: когда № *2* и № *3*, обращенные

повѣрки этихъ отсчетовъ они отступаютъ къ заднему жезлу и начинаютъ работу въ прежнемъ порядкѣ, т. е. снимаютъ этотъ задній жезлъ, переносятъ его впередъ и т. д.

Когда задній жезлъ снятъ, носильщики табуретовъ переносятъ ихъ вмѣстѣ съ подставками впередъ, идя по лѣвой сторонѣ базисной линіи, ставятъ ихъ сбоку и ожидаютъ приказаній № 4. Установка табуретовъ и подставокъ, сперва задней, потомъ передней, дѣлается лишь тогда, когда передній жезлъ уже приблизительно введенъ въ линію, и когда, слѣдовательно, наблюдатель № 1 (у теодолита) уже свободенъ. Правило для вѣрнаго расположенія подставокъ кладется правымъ переднимъ носильщикомъ жезла по правой сторонѣ базисной линіи. Установка подставокъ по азимуту дѣлается по указаніямъ наблюдателя № 1 у теодолита. Когда обѣ подставки введены въ линію, № 4 взглядываетъ вдоль базисной линіи назадъ и соображаетъ, нужно ли измѣнить ихъ положеніе по высотѣ, и если найдетъ, что нужно, то поднимаетъ или опускаетъ ихъ, вращая подъемные винты. Удачное расположеніе подставокъ значительно ускоряетъ и облегчаетъ работу № 2 и № 3. Услышавъ слово «есть», № 4 переходитъ къ третьему (сзади) жезлу и окончательно устанавливаетъ на немъ пузырекъ главнаго уровня. Тотчасъ послѣ того, какъ № 2 и № 3 произведутъ отсчеты верньера дуги и повѣрятъ ихъ, № 4 снимаетъ уровень и переноситъ его на передній жезлъ; стоявшій же на столикѣ послѣдняго поперечный уровень онъ снимаетъ и, держа его въ рукахъ, выжидаетъ приноса сзади слѣдующаго жезла.

3) Имѣя въ виду пріостановить измѣреніе, наблюдатель № 4 приказываетъ забить желѣзный колъ (черт. 103) впереди на два жезла, дабы сотрясеніями почвы при забивкѣ не разстроить соприкосновенія стоящихъ уже жезловъ. Мѣсто для кола опредѣляется по линіи мѣрною тесьмою, а перпендикулярно къ ней — по указаніямъ № 1 при теодолитѣ. Когда колъ прочно забитъ, къ нему привинчиваютъ марку и продол-

---

къ зрителю спиною, отсчитываютъ термометры и фюльгебель изображеннаго полностью жезла, № 4, стоящій лицомъ къ зрителю, и большой уровень должны быть по чертежу вправо, т. е. впереди.

жаютъ кладку жезловъ, пока два жезла не будутъ до кола, а два впереди его. Тогда сбоку линіи, въ разстояніи 3—4 саженей, ставятъ по перпендикуляру теодолитъ и, проектируя мѣсто соприкосновенія концовъ жезловъ на марку, переставляютъ ея кубикъ съ маркою микрометрическими винтами до тѣхъ поръ, пока точка на немъ не окажется въ точности на отвѣсной линіи съ точкою соприкосновенія. Затѣмъ работа пріостанавливается, всѣ жезлы покрываются длиннымъ брезентомъ и при нихъ оставляется караулъ, которому внушаютъ отнюдь не допускать кого либо близко подходить къ жезламъ.

На слѣдующій день или по миновании ненастной погоды брезентъ снимается, на перпендикулярѣ къ линіи ставится теодолитъ, и наблюдатель наводитъ его трубу на точку кубика марки, а затѣмъ, не двигая трубы по азимуту, на мѣсто соприкосновенія жезловъ. Если оно не измѣнилось, то измѣреніе можно тотчасъ продолжать дальше; если же жезлы немного сдвинулись, то ихъ не передвигаютъ, а малое уклоненіе измѣряютъ при помощи наведеній (на точку и на жезлы) бокового теодолита съ отсчетами на горизонтальномъ кругѣ. Зная горизонтальный уголъ и разстояніе отъ марки до бокового теодолита, легко вычислить величину уклоненія, которую потомъ съ соотвѣтствующимъ знакомъ придаютъ къ длинѣ базиса.

Когда измѣреніе подходитъ къ конечному (или промежуточному) центру базиса, то ставятъ жезлы такъ, чтобы послѣднее мѣсто соприкосновенія оказалось за центромъ и, смотря по тому, до котораго изъ соприкосновеній ближе, заранѣе забиваютъ колъ и устанавливаютъ на немъ марку. Послѣ проектированія послѣдняго соприкосновенія на марку, кладутъ какой нибудь ровный прямой брусокъ (или особую линейку) горизонтально, по линіи базиса и, при помощи двухъ боковыхъ теодолитовъ, проектируютъ на него марку кола и центръ базиса, отмѣчая соотвѣтствующія мѣста надрѣзами ножемъ. Разстояніе между надрѣзами, называемое *остаткомъ базиса*, измѣряютъ затѣмъ штангенъ-циркулемъ и записываютъ въ журналъ. Тамъ же дѣлаютъ небольшой чертежикъ расположенія марки, центра и бруска, чтобы впослѣдствіи не могло возникнуть никакихъ сомнѣній относительно того, съ какимъ знакомъ слѣдуетъ ввести въ вычисленіе длину остатка.

77. Вычисленіе базиса. Пусть длины мѣрныхъ жезловъ изъ сравненій съ нормальнымъ при нѣкоторой температурѣ t_0 оказались равными A, B, C и D. Назвавъ сумму $A+B+C+D$ черезъ S_0, при температурѣ t получимъ:

$$S = S_0 + S_0 \, . \, k \, . \, (t - t_0)$$

гдѣ k — коэффиціентъ расширенія желѣза. Если число жезловъ въ базисѣ не есть кратное четырехъ, то придется прибавлять еще одинъ или нѣсколько отдѣльныхъ жезловъ, длину которыхъ при температурѣ t такъ же легко вычислить по формулѣ

$$A = A_0 + A_0 \, . \, k \, . \, (t - t_0)$$

Длина базиса выражалась бы просто извѣстнымъ числомъ жезловъ + остатокъ только въ томъ случаѣ, если бы всѣ жезлы были положены горизонтально, ихъ фюльгебели показывали ровно 15 и самый базисъ измѣрялся на уровнѣ океана. На самомъ дѣлѣ этого, конечно, никогда не бываетъ, и къ полученному числу необходимо прибавлять поправки.

Горизонтальная проекція каждаго жезла при наклонности i равна $l \, . \cos i$, и потому *поправка за наклонность* отдѣльнаго жезла есть

$$l\,(\cos i - 1) = -\, l \, . \, 2 \sin^2 \frac{i}{2} = -\, l \, . \, \frac{\sin^2 1'}{2} \, . \, i'^2$$

гдѣ i выражено въ минутахъ, а $\sin^2 \frac{i}{2}$ замѣнено черезъ $\sin^2 1' \, . \, \frac{i'^2}{4}$, потому что самая наклонность обыкновенно весьма незначительна.

Поправка за показаніе фюльгебеля для каждаго жезла равна очевидно

$$+\, v\,(15 - f)$$

гдѣ f—показаніе индекса фюльгебеля, а v—цѣна одного дѣленія фюльгебеля, которое, какъ было объяснено въ § 74, выводится изъ особыхъ изслѣдованій на компараторѣ.

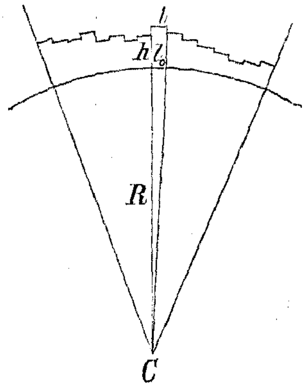
Такъ какъ всѣ жезлы почти равны, то, суммируя поправочные члены, можно величину l взять за скобки и, означивъ черезъ Σ суммы членовъ для отдѣльныхъ жезловъ, а черезъ

L длину базиса, получимъ:

$$L = n \,.\, S + k \,.\, l \,.\, \Sigma\,(t - t_0) - l \,.\, \frac{\sin^2 1'}{2}\,\Sigma\, i'^2 + v \,.\, \Sigma\,(15 - f) \pm r$$

гдѣ r — остатокъ или избытокъ, меньшій одного тоаза и измѣряемый при помощи вспомогательнаго бруска.

Полученную длину базиса необходимо еще привести къ уровню океана. Пусть h абсолютная высота какого нибудь жезла, а R радіусъ кривизны уровенной поверхности въ вертикальной плоскости базиса, вычисляемый по формуламъ (11) или (13); тогда по чертежу 107 легко составить пропорцію



Черт. 107.

$$\frac{l}{l_0} = \frac{R + h}{R}$$

или

$$\frac{l - l_0}{l} = \frac{h}{R + h} = \frac{h}{R}\left\{1 - \frac{h}{R} + \left(\frac{h}{R}\right)^2 - \dots\right\}$$

По малости дроби $\frac{h}{R}$ можно всегда пренебречь ея квадратомъ и всѣми высшими степенями, такъ что величина *приведенія къ уровню океана* выразится просто черезъ

$$l_0 - l = -\frac{l \,.\, h}{R}$$

Сумма же приведеній всѣхъ жезловъ черезъ $-\frac{l}{R}\,\Sigma h$.

Величина этого приведенія всегда такъ мала, что вмѣсто суммы высотъ h отдѣльныхъ жезловъ можно взять среднюю высотỳ базиса H, умноженную на число (m) положенныхъ жезловъ, а произведеніе $l \,.\, m$ замѣнить черезъ L; такимъ образомъ окончательная длина базиса, уже приведенная къ уровню океана, выразится формулою:

$$L_0 = n \,.\, S + k \,.\, l \,.\, \Sigma\,(t - t_0) - l \,.\, \frac{\sin^2 i'}{2} \,.\, \Sigma\, i'^2 + \\ + v \,.\, \Sigma\,(15 - f) \pm r - \frac{LH}{R} \qquad (49)$$

Нижеслѣдующія таблицы представляютъ журналъ измѣренія малаго Пулковскаго базиса и его вычисленіе. *Эльзевирныя* цифры изображаютъ записи въ полѣ (карандашомъ), а *жирныя*—послѣдующія вычисленія (перомъ). Значеніе чиселъ показано въ заголовкахъ, i—наклонность, выраженная въ частяхъ дуги уровня (см. § 75).

Время $24^9/_{10}$ Іюля 1884 г.	Жезлы.	Отсчеты уровня.	Температура. t_1	Температура. t_2	Отсчеты фюльгебеля.	i	i^2
$19^h\ 0^m$	1 *A*	206.6	13.0	13.6	14.0	**— 38.1**	**1 452**
	2 *B*	199.0	13.9	14.0	16.7	**— 30.6**	**936**
	3 *C*	168.5	14.7	14.0	15.9	**— 0.3**	**0**
	4 *D*	173.4	13.8	13.7	15.7	**— 4.9**	**24**
			55.4	**55.3**	**— 2.3**	**— 73.9**	**2 412**
19 20	5 *A*	166.4	12.7	13.1	13.6	**+ 2.1**	**4**
	6 *B*	169.3	13.3	13.8	14.7	**— 0.9**	**1**
	7 *C*	170.7	14.3	13.4	15.9	**— 2.5**	**6**
	8 *D*	168.7	13.4	13.4	13.4	**— 0.2**	**0**
			53.7	**53.7**	**+ 2.4**	**— 1.5**	**11**
19 35	9 *A*	181.0	12.5	12.8	14.2	**— 12.5**	**156**
	10 *B*	194.4	13.1	13.3	17.2	**— 26.0**	**676**
	11 *C*	178.2	14.1	13.3	14.7	**— 10.0**	**100**
	12 *D*	167.3	13.2	13.2	15.9	**+ 1.2**	**1**
			52.9	**52.6**	**— 2.0**	**— 47.3**	**933**
19 50	13 *A*	171.0	12.3	12.6	13.7	**— 2.5**	**6**
	14 *B*	176.7	12.8	13.0	15.4	**— 8.3**	**69**
	15 *C*	179.8	13.8	13.0	14.8	**— 11.6**	**135**
	16 *D*	184.3	12.9	12.9	16.9	**— 15.8**	**250**
			51.8	**51.5**	**— 0.8**	**— 38.2**	**460**

Время $4^{9}/_{10}$ Іюля 1884 г.	Жезлы.	Отсчеты уровня.	Температура. t_1	t_2	Отсчеты фюльгебеля.	i	i^2
20^h 2^m	17 *A*	182.7	12.3	12.5	15.1	— 14.2	202
	18 *B*	185.9	12.7	12.9	12.6	— 17.5	306
	19 *C*	189.2	13.6	12.9	14.4	— 21.0	441
	20 *D*	170.0	12.6	12.9	15.6	— 1.5	2
			51.2	51.2	+ 2.3	— 54.2	951
20 12	21 *A*	190.7	12.1	12.4	16.1	— 22.2	493
	22 *B*	183.8	12.4	12.5	14.7	— 15.4	237
	23 *C*	157.4	13.5	12.8	14.7	+ 10.8	117
	24 *D*	170.8	12.3	12.3	13.9	— 2.3	5
			50.3	50.0	+ 0.6	— 29.1	852
20 35	25 *A*	169.4	11.9	12.3	15.1	— 0.9	1
	26 *B*	181.9	12.0	12.3	14.4	— 13.5	182
	27 *C*	203.9	13.1	12.4	14.6	— 35.7	1 274
	28 *D*	201.5	12.3	12.4	14.1	— 33.0	1 089
			49.3	49.4	+ 1.8	— 83.1	2 546
20 48	29 *A*	185.3	11.8	12.1	13.5	— 16.8	282
	30 *B*	153.9	12.0	12.3	14.3	+ 14.5	210
	31 *C*	171.5	13.0	12.3	14.1	— 3.3	11
	32 *D*	148.0	12.0	12.1	16.9	+ 20.5	420
			48.8	48.8	+ 1.2	+ 14.9	923
21 0	33 *A*	182.8	11.8	12.2	14.3	— 14.3	204
	34 *B*	184.2	12.1	12.1	13.8	— 15.8	250
	35 *C*	164.6	12.9	12.2	13.9	+ 3.6	13
	36 *D*	169.8	11.9	12.2	16.4	— 1.3	2
			48.7	48.7	+ 1.6	— 27.8	469
21 14	37 *A*	175.1	11.7	12.0	14.3	— 6.6	44
	38 *B*	190.4	11.9	12.0	14.3	— 22.0	484
	39 *C*	208.7	12.9	12.1	15.6	— 40.5	1 640
	40 *D*	177.9	11.8	12.0	16.2	— 9.4	88
			48.3	48.1	— 0.4	— 78.5	2 256

Время 24⁹/₁₀ Іюля 1884 г.	Жезлы.	Отсчеты уровня.	Температура. t_1	t_2	Отсчеты фюльгебеля.	i	i^2
$21^h\ 26^m$	41 *A*	188.7	11.6	12.0	16.1	— 20.2	408
	42 *B*	186.3	11.7	11.9	14.4	— 17.9	320
	43 *C*	195.0	12.9	12.0	13.8	— 26.8	718
	44 *D*	186.7	11.8	11.9	12.8	— 18.2	331
			48.0	47.8	+ 2.9	— 83.1	1 777
21 37 переставляли передній теодолитъ и принимали пищу.	45 *A*	190.3	11.7	12.0	14.1	— 21.8	475
	46 *B*	205.3	11.7	11.8	16.0	— 36.9	1 362
	47 *C*	188.7	12.8	11.8	15.0	— 20.5	420
	48 *D*	198.0	11.7	11.9	15.7	— 29.5	870
			47.9	47.5	— 0.8	—108.7	3 127
22 25	49 *A*	199.8	11.7	11.9	19.6	— 31.3	980
	50 *B*	170.5	11.5	11.7	18.6	— 2.1	4
	51 *C*	185.5	12.9	12.0	14.3	— 17.3	299
	52 *D*	168.7	11.7	11.8	15.4	— 0.2	0
			47.8	47.4	— 7.9	— 50.9	1 283
22 44	53 *A*	188.5	11.8	12.0	13.5	— 20.0	400
	54 *B*	193.6	11.8	11.9	14.1	— 25.2	635
	55 *C*	215.8	12.8	12.1	14.0	— 47.6	2 266
	56 *D*	215.1	12.0	12.1	15.4	— 46.6	2 172
			48.4	48.1	+ 3.0	—139.4	5 473
23 0	57 *A*	208.6	12.1	12.3	13.1	— 40.1	1 608
	58 *B*	227.0	12.0	12.1	13.1	— 58.6	3 434
	59 *C*	237.3	13.1	12.5	15.0	— 69.1	4 775
	60 *D*	215.9	12.3	12.5	14.8	— 47.4	2 247
			49.5	49.4	+ 4.0	—215.2	12 064
23 15	61 *A*	208.5	12.7	13.1	13.6	— 40.0	1 600
	62 *B*	198.1	12.5	13.0	13.9	— 29.7	882
	63 *C*	190.2	13.7	13.2	14.2	— 22.0	484
	64 *D*	192.9	13.0	13.2	16.3	— 24.4	595
			51.9	52.5	+ 2.0	—116.1	3 561

Время $24^9/_{10}$ Іюля 1884 г.	Жезлы.	Отсчеты уровня.	Температура.		Отсчеты фюльгебеля.	i	i^2
			t_1	t_2			
$23^h\ 30^m$	65 *A*	176.6	13.2	13.5	14.2	— 8.1	66
	66 *B*	171.3	12.9	13.2	19.5	— 2.9	8
	67 *C*	217.9	14.2	13.7	14.3	— 49.7	2 470
	68 *D*	213.6	13.2	13.5	13.1	— 45.1	2 034
			53.5	53.9	— 1.1	— 105.8	4 578
23 42	69 *A*	196.7	13.2	13.7	13.2	— 28.2	795
	70 *B*	193.3	13.1	13.5	13.9	— 24.9	620
	71 *C*	202.2	14.4	14.0	14.0	— 34.0	1 156
	72 *D*	214.2	13.3	13.8	16.7	— 45.7	2 088
			54.0	55.0	+ 2.2	— 132.8	4 659
0 5	73 *A*	187.0	13.4	14.0	13.7	— 18.5	342
	74 *B*	177.9	13.3	13.7	15.0	— 9.5	90
			26.7	27.7	+ 1.3	— 28.0	432
		$\Sigma =$	938.1	938.6	+ 10.0	—1398.7	48 767

Средняя сумма температуръ = 938.35 и потому средняя температура (раздѣляя на число жезловъ) = + 12°.68, а такъ какъ ср. поправка термометровъ была—0°.18, то $t = + 12°.5$ C = = + 10°.0 *R*. Одно дѣленіе уровня = 1′.9983. Далѣе, при установкѣ перваго жезла уголъ между центромъ и началомъ жезла оказался (изъ четырехъ измѣреній) 30″.6, а разстояніе до теодолита было 409.0 дюйм., слѣдовательно, къ длинѣ базиса надо придать 409 . $\sin$ 30″.6 = + 0.683 пар. линіи. Остатокъ между концомъ послѣдняго жезла и вторымъ базиснымъ центромъ оказался 1180.56 пар. линіи. Такимъ образомъ по формулѣ (49) имѣемъ:

$n . S = 18\, S + A + B$ (см. § 74) . . . 127 870.022 пар. лин.

$k\, l\, \Sigma\, (t - t_0) = (0.0000114)\,(1728)\,(74)$

$(10.0 - 13.9)$ . . . . —5.685 » »

$l . \frac{\sin^2 1'}{2} \Sigma i^2 = (1728) \frac{\sin^2 1'.9983}{2} (48767)$ —14.236 » »

$v \,.\, \Sigma\,(15 - f) = \frac{1}{69.42} \,.\, 10$	$+0.144$	пар. лин.
$\pm r = + 0.683 + 1180.56$	1181.243	» »
Приблизительная длина базиса $L =$	129 031.488	пар. лин.
Приведеніе къ уровню океана ($\varphi = 59°46'$, $\alpha = 110°52'$, $H = 34.10$ саж.)	-1.505	» »
Окончательная длина базиса $L_0 =$	129 029.98	пар. лин.
или $=$	136.423 04	саж.

78. Точность и скорость измѣренія. *Точность* измѣренія базиса приборомъ Струве, подобно точности каждаго другого измѣренія, можетъ быть выведена изъ разсмотрѣнія точностей отдѣльныхъ дѣйствій. Эти дѣйствія суть: 1) сравненіе мѣрныхъ жезловъ съ нормальнымъ, 2) установка жезловъ по линіи, 3) измѣреніе наклонностей, 4) отсчеты фюльгебелей, 5) опредѣленіе температуры жезловъ при измѣреніи и 6) личныя ошибки наблюдателей.

1) Сравненія мѣрныхъ жезловъ съ нормальнымъ производятся на компараторѣ, при извѣстной температурѣ. Ошибки этихъ сравненій зависятъ частью отъ ошибокъ отсчетовъ микрометра, частью отъ ошибочнаго знанія коэффиціентовъ расширенія. Изъ многократныхъ сравненій В. Струве вывелъ, что длина мѣрныхъ жезловъ можетъ быть опредѣлена до $^1/_{1400}$ пар. линіи, что составляетъ около 0.4 милліонной доли ихъ длины (2 тоаза $=$ 1728 пар. линіи). Такъ какъ неточность знанія длины жезла умножается на число жезловъ, положенныхъ по базису, то если длина жезла извѣстна съ ошибкою въ 0.4 милліонной его доли, длина базиса будетъ извѣстна съ ошибкою въ $\pm$ 0.4 милліонной доли всего базиса.

2) Установка жезловъ по азимуту производится, какъ объяснено выше, при помощи теодолита. Ошибка установки каждаго жезла можетъ быть оцѣнена приблизительно въ $\pm 2'$, отчего въ общей длинѣ базиса можетъ произойти ошибка около 0.1 милліонной его доли.

3) Ошибка наклонности дѣйствуетъ совершенно подобно

ошибкѣ установки жезла по азимуту, и ее тоже можно оцѣнить въ 0.1 милліонной доли всего базиса.

4) Цѣна одного дѣленія фюльгебеля v равна около $^1/_{70}$ пар. линіи и, слѣдовательно, $^1/_{10}$ v равна $^1/_{700}$ пар. линіи. Если принять, что индексъ отсчитывался лишь до $^1/_{10}$ дѣленія, то въ среднемъ изъ отсчетовъ двухъ наблюдателей ошибка на каждый жезлъ составитъ около $^1/_{2000}$ пар. линіи, т. е. ± 0.3 милліонной доли жезла, а, слѣдовательно, и ошибка базиса составитъ только $\pm$ 0.3 милліонной доли базиса.

5) Неизвѣстность температуры жезловъ во время измѣренія производитъ *наибольшую погрѣшность* въ результатѣ. Дѣйствительно, коэффиціентъ расширенія желѣза равенъ приблизительно 0.000012, слѣдовательно, если ошибка температуры равна лишь $\pm 0^\circ.1$ С., то и тогда длина жезловъ, а потому и длина всего базиса, будетъ ошибочна на $\pm$ 1.2 милліонной доли. Однако термометры жезловъ отсчитываются дважды и притомъ по двумъ термометрамъ, поэтому Струве признаетъ возможнымъ оцѣнить ошибку отъ температуры въ $\pm$ 0.7 милліонной доли базиса.

6) Личныя ошибки измѣреній, выводимыя непосредственно изъ разногласій отсчетовъ наклонностей, фюльгебелей и термометровъ двумя наблюдателями, приводятъ къ заключенію, что эта причина можетъ ввести ошибку около $\pm$ 0.2 милліонной доли длины базиса.

Называя ошибки отдѣльныхъ дѣйствій черезъ α, β, γ..... и составляя полную ошибку измѣренія ΔL по формулѣ

$$\Delta L = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \ldots\ldots}$$

гдѣ вмѣсто α, β, γ..... нужно подставить найденныя выше величины 0.4, 0.1... милліонныхъ, получимъ

$$\Delta L = 0.9 \text{ милліонной доли базиса}$$

т. е. длина базиса можетъ быть опредѣлена со среднею ошибкою *менѣе одной милліонной* его доли.

Нѣтъ никакого сомнѣнія, что найденная точность измѣренія базисовъ совершенно достаточна, по крайней мѣрѣ при настоящихъ способахъ измѣренія угловъ. Ошибка угловъ въ самыхъ лучшихъ тріангуляціяхъ, въ среднемъ, не менѣе $\pm 0''.5$, что составляетъ, даже въ наиболѣе выгодномъ случаѣ, около 2.5 милліонныхъ долей стороны.

Что касается *скорости* измѣренія, то изъ разсмотрѣнія времени, употребленнаго на измѣреніе многихъ базисовъ приборомъ Струве, оказывается, что въ 1 часъ можно положить до 20 жезловъ, а въ рабочій день—полагая его въ 10 часовъ—200 жезловъ, или измѣрить около 400 тоазовъ (366 саж.). Такимъ образомъ для измѣренія базиса въ 5—6 верстъ необходимо затратить отъ 8 до 10 дней, а считая приготовительныя работы и сравненіе жезловъ—до 2-хъ недѣль. Такъ какъ подготовительныя работы отнимаютъ много времени, то можно совѣтовать измѣрять каждый базисъ по крайней мѣрѣ два раза, туда и назадъ, и такъ, чтобы половина каждаго измѣренія производилась при возрастающей температурѣ (утромъ), а половина при убывающей (вечеромъ).

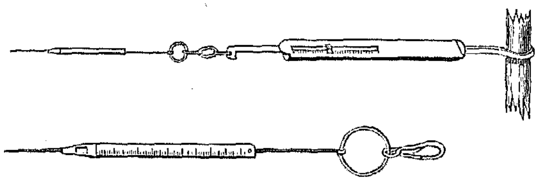
Другіе базисные приборы, упомянутые въ § 72, даютъ точности и скорости измѣренія, близкія къ показаннымъ выше. Приборы съ нарѣзными жезлами даютъ, правда, еще бо̀льшую точность, доходящую до двухъ десятимилліонныхъ долей длины, но такая точность оказывается нынѣ даже безполезною, потому что въ первомъ же треугольникѣ тріангуляціи она исчезаетъ, всецѣло поглощаясь неточностью измѣренія угловъ. Кромѣ того замѣчательная точность новѣйшихъ приборовъ подлежитъ еще сомнѣнію. Германскіе геодезисты въ послѣднее время измѣрили Боннскій базисъ четыре раза: два раза приборомъ *Бесселя* и два раза приборомъ *Бруннера*, считающимся лучшимъ изъ приборовъ съ нарѣзными жезлами. Согласіе результатовъ, полученныхъ обоими приборами порознь, поразительно, такъ что ошибку измѣренія должно бы считать не болѣе $^1/_{4500000}$ длины; между тѣмъ средніе результаты, полученные этими приборами, расходятся на 1 сантиметръ, что, при длинѣ базиса въ 2.5 километра, составляетъ $^1/_{250000}$ длины. Притомъ же скорость измѣренія нарѣзными приборами гораздо меньше скорости измѣренія приборами съ концевыми жезлами. Базисъ близъ Мадридехоса въ Испаніи (въ 100 верстахъ къ югу отъ Мадрида), длиною въ 14,66 километра (около 13.7

версты), измѣрялся приборомъ *Бруннера* (Иваньеса) съ мая по октябрь 1858 года. Всѣхъ рабочихъ дней было 78, и въ одинъ день, въ среднемъ, клали только 60 жезловъ (длиною по 4 метра).

79. Приборъ Іедерина. Профессоръ Стокгольмской политехнической школы *Іедеринъ* изобрѣлъ базисный приборъ, основанный на совершенно новыхъ началахъ: вмѣсто массивныхъ, тяжелыхъ жезловъ, составляющихъ всѣ доселѣ извѣстные приборы, онъ предложилъ измѣрять базисы проволоками въ 25 метровъ длиною, натягиваемыми между послѣдовательно разставляемыми вдоль базиса легкими деревянными треногами, на мѣдныхъ головкахъ которыхъ имѣются небольшіе крестики или мѣтки. Проволока въ 25 метровъ длины, удерживаемая за концы, конечно вытягивается, но, съ другой стороны, она уже представляетъ не прямую, а цѣпную линію, и хорда, стягивающая концы ея, будетъ короче самой проволоки. Поправки за вытягиваніе проволоки и за приведеніе дуги къ хордѣ измѣняются въ зависимости отъ матеріала проволоки, ея длины и поперечнаго сѣченія, а равно и отъ силы натяженія, но легко вычислить то натяженіе, при которомъ хорда будетъ равна длинѣ проволоки, наложенной по прямой въ горизонтальной плоскости. Это натяженіе Іедеринъ называетъ нормальнымъ. Однако можно употреблять проволоку при любомъ натяженіи, лишь бы при этомъ же натяженіи производились сравненія проволоки съ какою нибудь нормальною мѣрою и оно не достигло такъ называемой предѣльной упругости проволоки. Для своихъ 25 метровыхъ проволокъ Іедеринъ употребляетъ натяженіе въ 10 килограммовъ, причемъ постоянство натяженія достигается динамометрами, при помощи которыхъ проволока держится въ рукахъ.

Главную часть прибора составляютъ двѣ проволоки изъ разныхъ металловъ (сталь и мѣдь), для исключенія вліянія перемѣнъ температуры, такъ что здѣсь примѣнено начало биметаллизма. Проволоки имѣютъ 25 метровъ длины и 2 миллиметра въ діаметрѣ, а для предохраненія отъ окисленія и для приданія имъ одинаковой способности къ лучеиспусканію и поглощенію тепла, онѣ покрыты никкелемъ. Вѣсъ стальной и мѣдной проволокъ равенъ соотвѣтственно 560 и 600 граммамъ. Концы ихъ представляютъ небольшія шкалы по 1 дециметру, раздѣленныя на миллиметры (черт. 108), за которыми придѣланы кольца съ крючками для пристегиванія къ нимъ динамометровъ.

Треноги, разставляемыя по базису, снабжены мѣдными головками съ колѣнчатыми стерженьками, такъ что верхнія части стерженьковъ, называемыя цѣликами, легко выравнять въ вертикальной плоскости базиса даже и въ томъ случаѣ, если тренога поставлена не совсѣмъ правильно. По крестикамъ цѣли-



Черт. 108.

ковъ производится отсчитываніе шкалъ проволокъ. Чтобы не задерживать измѣренія, при каждомъ приборѣ имѣется 10 треногъ, которыя и переставляются послѣдовательно впередъ, по мѣрѣ хода работъ.

Кромѣ проволокъ и треногъ, представляющихъ въ сущности весь приборъ, нужно еще имѣть нивелиръ и рейку для измѣренія относительныхъ высотъ стерженьковъ штативовъ, стальную мѣрную тесьму для измѣренія остатковъ линій, меньшихъ 25 метровъ, лупы для облегченія отсчитыванія шкалъ, термометры для повѣрки температуръ, выводимыхъ изъ разностей отсчетовъ мѣрныхъ проволокъ и, наконецъ, два упорныхъ кола, для удобства удерживанія проволокъ въ требуемомъ натяженіи въ моментъ отсчетовъ шкалъ.

Измѣреніе базиса начинается съ его провѣшиванія, причемъ вѣхи ставятся на такомъ разстояніи, чтобы съ любой точки базиса можно было видѣть въ обѣ стороны не менѣе какъ по двѣ вѣхи. Кромѣ того, приблизительно черезъ каждыя $2—2^1/_2$ версты зарываются центры изъ камней со свинцовыми заливками, на которыхъ можно останавливать работу или прекращать ее на ночь.

Наблюдатели распредѣляются слѣдующимъ образомъ: 2 для разстановки треногъ, 1 для нивелировки ихъ и 4 для производства собственно измѣренія.

Разстановка треногъ начинается съ первой базисной точки, причемъ наблюдатель, стоя надъ нею или за поставленною уже треногою, показываетъ, какъ поставить слѣдующую. Установка по азимуту, т. е. въ линіи базиса, дѣлается на глазъ, потому что, благодаря большой длинѣ проволокъ, уклоненіе головки треноги въ сторону даже на 1 дюймъ производитъ ошибку менѣе одной милліонной доли длины проволоки. Установка по разстоянію производится при помощи особаго проволочнаго каната, имѣющаго на концѣ черточки, разстояніе между которыми равно 25 метрамъ. Для большей точности канатъ натягивается маленькими динамометрами, снабженными не дѣленными шкалами, а лишь одиночными чертами, соотвѣтствующими натяженію въ 10 килограммовъ. Впрочемъ, и въ установкѣ по разстоянію не требуется большой точности: шкалы мѣрныхъ проволокъ даютъ возможность отсчитывать разстоянія на 5 сантиметровъ больше или меньше 25 метровъ. Каждая тренога ставится сперва приближенно и ножки ея крѣпко углубляются въ землю; болѣе точная установка достигается затѣмъ передвиженіемъ цѣликовъ на головкѣ треноги. На каменистомъ грунтѣ, когда ножки треногъ не могутъ быть углублены въ землю, подъ головку треноги за имѣющійся тамъ крюкъ подвѣшивается камень. Разстановка треногъ идетъ непрерывно: когда всѣ 10 треногъ уже поставлены, заднія треноги, на которыхъ окончено измѣреніе, снимаются и ставятся дальше, впередъ по линіи.

Вслѣдъ за разстановкою треногъ производится нивелировка для опредѣленія относительнаго превышенія ихъ цѣликовъ. Нивелиръ ставится въ сторонѣ отъ линіи, такъ, чтобы съ одной точки можно было пронивелировать 5—6 треногъ. На цѣлики ставится рейка, а наблюдатель, приводя каждый разъ пузырекъ уровня на середину, визируетъ послѣдовательно на каждую треногу и записываетъ дѣленіе рейки, оказавшееся на горизонтальномъ волоскѣ въ трубѣ. Для повѣрки рейка отсчитывается два раза по черной и красной сторонамъ, имѣющимъ дѣленія въ разныхъ мѣрахъ. Послѣ отсчета рейки на послѣдней видимой треногѣ нивелиръ переносится дальше на слѣдующую точку стоянія и отсчитываніе рейки начинается здѣсь съ той треноги, на которой оно окончилось на предъидущей точкѣ.

За нивелировкою начинается собственно измѣреніе, состоящее въ прикладываніи проволокъ къ цѣликамъ треногъ и въ отсчетахъ по шкаламъ. Двое наблюдателей держатъ проволоку за динамометры, а двое отсчитываютъ шкалы проволокъ. Для держанія другой проволоки и ея подаванія взамѣнъ первой, при этихъ четырехъ наблюдателяхъ должны быть двое рабочихъ. Чтобы облегчить регулированіе натяженія проволоки, динамометры зацѣпляются за колья, упираемые въ землю и удерживаемые плечами наблюдателей при динамометрахъ. Когда проволока натянута такъ, что указатели динамометровъ стоятъ на цифрахъ 10, наблюдатели при шкалахъ берутся за нихъ руками и, придерживая ихъ надъ цѣликами треногъ, производятъ отсчетъ, причемъ наблюдатель у задняго конца устанавливаетъ 5-ое дѣленіе шкалы противъ поперечной черты своего цѣлика, а передній отсчитываетъ по своей шкалѣ съ точностью до 0.1 миллиметра и записываетъ отсчетъ въ полевой журналъ. Такая точность легко достигается и невооруженнымъ глазомъ, но наблюдатели могутъ пользоваться лупами, оправы которыхъ насаживаются на цѣлики треногъ и которыя переносятся по мѣрѣ движенія работы впередъ. Тотчасъ послѣ записи отсчета наблюдатели у динамометровъ отстегиваютъ проволоку, передаютъ ее рабочимъ и пристегиваютъ другую, по которой такимъ же образомъ производится отсчетъ и запись въ журналъ. Если на какомъ нибудь промежуткѣ между двумя треногами отсчитывали сперва по мѣдной, а потомъ по стальной проволокѣ, то на слѣдующемъ промежуткѣ прикладываютъ сперва стальную, а потомъ мѣдную проволоку. При такомъ порядкѣ отчасти исключается вліяніе перемѣнъ температуры и ускоряется работа: на каждомъ промежуткѣ необходимо только одинъ разъ перестегивать динамометры съ одной проволоки на другую. Для повѣрки отсчетовъ можно держаться правила, чтобы *послѣ перваго отсчета переднимъ наблюдателемъ* та же проволока отсчитывалась вторично заднимъ наблюдателемъ, причемъ передній ставитъ свою шкалу 5-мъ дѣленіемъ противъ поперечной черты цѣлика.

Иногда случается, что отъ небрежности установки треногъ разстояніе ихъ выходитъ изъ предѣловъ тѣхъ 5-ти сантиметровъ, которые имѣются на шкалѣ въ ту и другую стороны. Въ такихъ случаяхъ наблюдатели передвигаютъ проволоку такъ, чтобы одинъ ея конецъ поставить не на 5-ое, а на другое дѣленіе, напр. на 0 или на 10. Подобныя отступленія должны быть, конечно, занесены въ журналъ; хотя они устраняютъ необходимость переставлять треноги, но частое повтореніе ихъ нежелательно, потому что, помимо возможныхъ промаховъ въ установкѣ шкалъ и ихъ записяхъ, особыя вспомогательныя таблицы приведеній разстояній къ горизонту за наклонность линіи вычислены для промежутковъ ровно въ 25 метровъ и, слѣдовательно, при большихъ наклонностяхъ, табличныя приведенія могутъ оказаться недостаточно вѣрными, и самыя приведенія придется каждый разъ вычислять особо.

Измѣреніе идетъ непрерывно съ одной базисной точки до другой или до промежуточнаго центра. Разстояніе между центромъ на землѣ и первою треногою измѣряется какъ разстояніе между двумя треногами. Разстояніе же между послѣднею треногою и центромъ (всегда менѣе 25 метровъ) измѣряется стальною мѣрною лентою, натягиваемою тоже при помощи динамометровъ.

Длина базиса L выражается слѣдующими формулами:

По стальной проволокѣ $L = nl + \Sigma e + nl\,k\,(t - t_0)$

» мѣдной » $L = nl_1 + \Sigma e_1 + nl_1 k_1 (t - t_0)$

гдѣ l и l_1—длины обѣихъ проволокъ при температурѣ t_0 (см. форм. 47), t — температура въ моментъ измѣренія, k и k_1 — коэффиціенты расширеній, Σe и Σe_1—суммы отсчетовъ по шкаламъ, а n — число измѣренныхъ промежутковъ между штативами. Если обозначить для краткости $nl + \Sigma e$ черезъ S, а $nl_1 + \Sigma e_1$ черезъ S_1, то, послѣ исключенія изъ предъидущихъ двухъ уравненій неизвѣстной $t-t_0$, получится (считая въ послѣднихъ малыхъ членахъ $l=l_1$):

$$L = S + \frac{k}{k_1-k}(S-S_1) = S_1 + \frac{k_1}{k_1-k}(S-S_1) \quad (50)$$

или

$$L = \frac{k_1}{k_1-k}\cdot S - \frac{k}{k_1-k}\cdot S_1$$

Величина L должна быть затѣмъ исправлена приведеніями къ горизонту, остаткомъ, измѣреннымъ стальною мѣрною лентою, и приведеніемъ къ уровню океана (см. § 77). Если означить черезъ l_0 горизонтальное разстояніе между треногами, а черезъ h — разность высотъ двухъ послѣдовательныхъ цѣликовъ, то

$$l_0 = \sqrt{l^2 - h^2}$$

и потому величина приведенія будетъ:

$$l_0 - l = -\frac{h^2}{2l} - \frac{h^4}{8l^3} - \ldots.$$

По малости h (относительно l) въ этомъ разложеніи почти всегда можно ограничиться первымъ членомъ; впрочемъ, для облегченія этихъ вычисленій, имѣются таблицы, дающія величины приведеній непосредственно и притомъ отдѣльно по h, выраженнымъ въ дѣленіяхъ по чернымъ и по краснымъ сторонамъ реекъ. Таблицы эти напечатаны въ LI части Записокъ В. Т. Отдѣла Главнаго Штаба, отд. II, на стр. 72—74.

Скорость измѣренія базиса приборомъ Іедерина превосходитъ скорость измѣреній всѣми прочими существующими приборами и достигаетъ 3-хъ верстъ въ рабочій день. Молосковицкій базисъ, длиною болѣе 9 верстъ, былъ измѣренъ дважды (туда и назадъ) въ 6 рабочихъ дней. Что касается *точности* измѣренія, то въ настоящее время нельзя еще сказать о ней чего либо окончательнаго, по недостаточности опытныхъ изслѣдованій. Теоретически же она должна быть больше точности измѣреній концевыми жезловыми приборами, потому что точки соприкосновенія жезловъ остаются въ воздухѣ и, слѣдовательно, вообще говоря, могутъ передвигаться вдоль базиса, тогда какъ приборомъ Іедерина измѣреніе ведется съ одного штатива на другой, а постоянство штативовъ въ теченіи короткихъ промежутковъ времени не подлежитъ сомнѣнію. Въ ближайшемъ будущемъ проволочные приборы, вѣроятно, получатъ большое распространеніе, потому что, благодаря быстротѣ измѣренія и возможности производить его даже на пересѣченной мѣстности *), число базисовъ можетъ быть увеличено, а чѣмъ больше базисовъ въ данной тріангуляціи, тѣмъ общая точность послѣдней должна быть больше.

Кромѣ указанныхъ ниже въ § 81 трехъ базисовъ въ Россіи, приборомъ, подобнымъ базисному прибору Іедерина, измѣрено нѣсколько базисовъ въ Сѣверной Америкѣ. Тамъ вмѣсто проволокъ брали стальныя ленты въ 100 фут. длиною и съ размѣромъ поперечнаго сѣченія $^1/_5$ и $^1/_{40}$ дюйма.

Къ недостаткамъ прибора Іедерина должно отнести необходимость многихъ опытныхъ наблюдателей (7 человѣкъ) и крайнюю чувствительность проволокъ къ сколько нибудь грубому обращенію. Такъ какъ проволоки хранятся свернутыми въ кольцевыя связки около 2 футовъ въ діаметрѣ, то во время измѣренія, при ослабленіи натяженій, онѣ стремятся опять собираться въ кольца, и при неосторожномъ натяженіи кольца эти скручиваются въ колышки, которыя, даже будучи расправлены, несомнѣнно измѣняютъ длину проволоки. Точно также длина проволокъ можетъ измѣниться, если на проволоку, положенную во время перерыва работы на землю, наступить сапогомъ. Сильный, порывистый вѣтеръ и ясная погода, когда проволоки быстро нагрѣваются, вредятъ точности измѣреній. Самая благопріятная погода для измѣреній — безвѣтренная и пасмурная, когда температура почвы почти одинакова съ температурою окружающаго воздуха.

80. Компараторъ Іедерина. Значительная длина проволокъ прибора Іедерина не позволяетъ сравнивать ихъ съ нормаль-

---

*) Малые овраги, ручьи и даже рѣчки до 25 метровъ шириною нисколько не препятствуютъ измѣренію. Для перехода болѣе широкихъ препятствій Іедеринъ употребляетъ проволоки въ 50 метровъ, и длина ихъ легко опредѣляется изъ сравненій съ проволоками 25-ти метровыми.

ными мѣрами на обыкновенныхъ компараторахъ. Іедеринъ изобрѣлъ для своего прибора особый способъ сравненія при помощи измѣренія вспомогательнаго базиса въ 25 метровъ. Компараторъ состоитъ изъ нормальнаго жезла въ $2^1/_2$ метра длиною и отдѣльныхъ частей, служащихъ для сравненій этого жезла съ мѣрными проволоками. Полная длина нормальнаго жезла равна 2.566 метра; онъ сдѣланъ изъ кованной бессемеровой стали и имѣетъ въ разрѣзѣ фигуру буквы X. У концовъ и черезъ каждые полъ-метра въ тѣло жезла, на его нейтральной плоскости, впаяны серебряныя пластинки, означенныя цифрами 0, 1, 2, 3, 4 и 5. На первыхъ четырехъ пластинкахъ сдѣланы двѣ взаимно-перпендикулярныя черты, пересѣченія которыхъ и составляютъ полуметровыя мѣтки жезла; на послѣдней же, пятой пластинкѣ нарѣзана шкала въ 1 сантиметръ длиною, съ дѣленіями черезъ 0.1 миллиметра. За исключеніемъ мѣстъ вблизи мѣтокъ, весь жезлъ обернутъ ватою и мягкимъ войлокомъ. Температура отсчитывается по двумъ термометрамъ, шарики которыхъ помѣщены въ углубленіяхъ, высверленныхъ въ жезлѣ и наполненныхъ ртутью. Весь жезлъ уложенъ въ ящикъ съ откидными крышками по концамъ; на ящикѣ имѣется два уровня, продольный и поперечный, для приведенія жезла въ горизонтальное положеніе, и особо устроенная зрительная труба для введенія его въ линію вспомогательнаго базиса. Ящикъ снабженъ, конечно, прочными ручками для переноски. Длина и коэффиціентъ расширенія жезла опредѣляются отдѣльными сравненіями съ нормальнымъ нарѣзнымъ метромъ на обыкновенномъ компараторѣ. Сочетаніями сравненій метровыхъ и полуметровыхъ промежутковъ можно опредѣлить длину жезла съ величайшею точностью. Такъ, для нормальнаго жезла прибора, служившаго для измѣреній базисовъ С.-Петербургской тріангуляціи, изъ многократныхъ сравненій получено уравненіе:

$$N = 2^m.500\,326\,25 + 0^m.0000\,302\,05\ (t - 20^\circ)$$

гдѣ t температура жезла въ градусахъ Цельзіуса.

Для сравненій проволокъ съ нормальнымъ жезломъ выбираютъ подходящее закрытое и достаточно обширное помѣщеніе и укладываютъ горизонтально, рядомъ, но безъ взаимнаго соприкосновенія, два толстые бруса, длиною немного болѣе 25 метровъ. Эти брусья составляются изъ отдѣльныхъ частей, прочно скрѣпленныхъ желѣзными болтами.

На концахъ одного бруса, служащаго для десятикратной укладки нормальнаго жезла, привинчены массивные чугунные наугольники, а къ нимъ—мѣдныя вертикальныя стойки съ двумя взаимно-перпендикулярными черточками на ихъ верхнихъ выпуклыхъ граняхъ. Точки пересѣченія этихъ черточекъ означаютъ концы вспомогательнаго базиса, а высота стоекъ разсчитана такъ, чтобы натягиваемыя при сравненіяхъ мѣрныя проволоки отнюдь не касались бруса. При помощи особыхъ исправительныхъ, подъемныхъ и азимутальныхъ винтовъ стойки можно передвигать и установить верхнія ихъ грани въ одной горизонтальной плоскости и на разстояніи, близкомъ къ 25 метрамъ.

Другой брусъ служитъ для привинчиванія микроскоповъ. Сперва надъ стойкою, съ которой предполагаютъ начать измѣреніе, устанавливаютъ первый микроскопъ, который при помощи исправительныхъ винтовъ наводится строго на центръ стойки, т. е. такъ, чтобы изображеніе ея поперечной черты пришлось по серединѣ между двумя параллельными, близкими между собою нитями въ окулярѣ микроскопа. Послѣ этого стойка снимается и на первый брусъ ставится ящикъ съ жезломъ, нулевымъ концомъ (черта 0) подъ микроскопъ. Ящикъ располагается на двухъ треножкахъ, которыя, кромѣ обыкновенныхъ подъемныхъ винтовъ, имѣютъ еще центральные микрометрическіе подъемные винты, а для передвиженій жезла вдоль линіи, верхнія, принимающія ящикъ жезла части треножекъ представляютъ катки, легко и плавно вращаемые особыми рукоятками. Кромѣ того оба катка имѣютъ навинтованныя горизонтальныя оси, такъ что, вращая ихъ, можно исправлять положеніе жезла по азимуту.

Зрительная труба, прикрѣпленная къ ящику сбоку, установлена для яснаго видѣнія на безконечное разстояніе и имѣетъ въ фокусѣ крестъ нитей. Ея оптическая ось параллельна прямой, соединяющей мѣтки жезла (0) и (5). Другая зрительная труба, имѣющая въ фокусѣ кольцевой микрометръ и установленная тоже для видѣнія на безконечное разстояніе, располагается неподвижно, вблизи другого конца базиса. Жезлъ долженъ быть поставленъ такъ, чтобы пересѣченіе нитей его трубы совпадало съ центромъ изображенія поля кольцевого микрометра неподвижной трубы. Смотря въ трубу (снабженную для удобства прямоугольною призмочкою у окуляра), вращая рукоятки катковъ и подъемные винты треножекъ и слѣдя одновременно за уровнями при ящикѣ, легко привести жезлъ въ надлежащее положеніе, причемъ помимо оріентированія и горизонтальности, его первая мѣтка (0) должна оставаться точно въ фокусѣ уже укрѣпленнаго перваго микроскопа.

Когда жезлъ установленъ, то ко второму брусу надъ концевою мѣткою (5), имѣющею шкалу, привинчиваютъ второй микроскопъ. Поставивъ его по фокусу и повѣривъ прочность установки нѣсколькими ударами колотушки по его подставкѣ, наблюдатель производитъ отсчетъ шкалы по обѣимъ нитямъ микроскопа. Затѣмъ жезлъ снимается, переносится на свою длину дальше по линіи и опять ставится на треножки (чтобы не задерживать измѣреніе, имѣется двѣ пары треножекъ), концомъ (0) подъ второй микроскопъ. Въ это время подъ первый микроскопъ вновь привинчивается мѣдная стойка съ конечною точкою, а надъ переднею мѣткою (5) жезла привинчивается третій микроскопъ и производится отсчетъ по шкалѣ; затѣмъ жезлъ вновь переносится, надъ его переднимъ концомъ опять привинчивается микроскопъ и т. д. до конца вспомогательнаго базиса. Собственно говоря, необходимо имѣть только два микроскопа, послѣдовательно переставляемые на второмъ брусѣ, но одинъ микроскопъ остается надъ первою стойкою, чтобы убѣждаться въ ея постоянствѣ, поэтому при компараторѣ имѣется три одинаковыхъ микроскопа. Послѣ каждой установки жезла, кромѣ шкалы передней мѣтки (5), отсчитываются и записываются показанія обоихъ термометровъ жезла.

Когда измѣреніе доходитъ до конца вспомогательнаго базиса, то въ послѣдній разъ микроскопъ привинчивается надъ второю конечною стойкою, которая тотчасъ затѣмъ снимается, а послѣ установки жезла и его отсчетовъ вновь устанавливается на прежнемъ мѣстѣ, подъ микроскопомъ. Такимъ образомъ, въ десятый, послѣдній разъ жезлъ кладется подъ два уже поставленные микроскопа, и вслѣдствіе накопленія погрѣшностей въ оріентировкѣ онъ можетъ оказаться не строго въ линіи. Однако происшедшее уклоненіе легко опредѣляется оцѣнкою положенія изображенія кольцевого микрометра неподвижной трубы въ окулярѣ трубы жезла; оцѣнка уклоненія дѣлается на глазъ съ достаточною точностью и принимается въ разсчетъ при вычисленіи длины вспомогательнаго базиса.

Для сравненія проволокъ съ измѣреннымъ описаннымъ способомъ вспомогательнымъ базисомъ, ихъ натягиваютъ съ обоихъ концовъ динамометрами, прикрѣпленными къ особымъ треножнымъ стойкамъ, поставленнымъ на продолженіяхъ перваго бруса компаратора. Надъ брусомъ вѣшаются въ трехъ равноудаленныхъ мѣстахъ термометры для отсчитыванія температуры во время сравненій. Когда проволока натянута силою въ 10 килограммовъ, то средняя черта (5 сантиметровъ) одного ея конца приводится въ совпаденіе съ пересѣченіемъ нарѣзокъ первой стойки, а положеніе пересѣченія нарѣзокъ другой отсчитывается по шкалѣ другого конца проволоки. Отсчетъ легко сдѣлать до $\pm$ 0.05 миллиметра, и, слѣдовательно, точность даже одного сравненія достигаетъ пятисотъ-тысячной доли длины проволоки.

Въ общемъ, сравненіе проволокъ съ жезломъ заключается въ многократномъ измѣреніи разстоянія между конечными точками компаратора нормальнымъ жезломъ и мѣрными проволоками. Одинъ рядъ сравненій состоитъ изъ сравненій всѣхъ *) проволокъ между собою, послѣ чего производится измѣреніе вспомогательнаго базиса при помощи нормальнаго жезла, и, наконецъ, изъ вторичнаго сравненія всѣхъ проволокъ въ обратномъ порядкѣ. Изъ каждаго такого ряда сравненій легко вывести длины всѣхъ проволокъ при температурѣ сравненій, а произведя отдѣльные ряды сравненій въ разное время и при различныхъ температурахъ, можно вывести коэффиціенты расширенія ихъ и другія постоянныя.

Наиболѣе полныя изслѣдованія проволокъ прибора Іеде-

*) Приборъ долженъ бы имѣть лишь двѣ проволоки, стальную и мѣдную (см. § 79); однако, на случай поврежденія, каждый приборъ имѣетъ 6 проволокъ, три стальныя и три мѣдныя.

рина были произведены Начальникомъ Съемки С.-Петербургской губ. *А. Р. Бонсдорфомъ* и академикомъ *Баклундомъ* въ 1888 году, до и послѣ измѣренія базисовъ (Пулковскаго и Молосковицкаго). Подробности этихъ изслѣдованій помѣщены въ указанной уже въ § 72 монографіи *). Въ результатѣ оказалось, что проволоки, не смотря на неоднократное скручиваніе, сохраняютъ свою длину почти въ предѣлахъ точности сравненій; болѣе же тщательныя изысканія обнаружили даже поразительное явленіе, что проволоки съ теченіемъ времени укорачиваются. Это послѣднее обстоятельство, вѣроятно, находится въ связи со способомъ изготовленія проволокъ и объясняется такъ называемымъ упругимъ послѣдѣйствіемъ. Длина каждой проволоки можетъ быть выражена уравненіемъ:

$$l = 25^m + a + a' (\tau - \tau_0) + a'' (\tau - \tau_0)^2 + k (t - t_0)$$

гдѣ $25^m + a$ — длина проволоки въ эпоху τ_0 и при температурѣ t_0, а l — длина въ эпоху τ и при температурѣ t; k — коэффиціентъ расширенія проволоки на 1° Цельзіуса, а a' и a'' постоянныя, выводимыя изъ сравненій. Для всѣхъ изслѣдованныхъ проволокъ постоянная a' получилась отрицательною, а a'' — положительною величинами, откуда слѣдуетъ, что если вскорѣ послѣ изготовленія проволоки и укорачиваются, то это укорачиваніе не будетъ продолжаться непрерывно, а лишь въ теченіи извѣстнаго промежутка времени.

81. Число базисовъ. Измѣреніе базиса представляетъ весьма медленную работу и можетъ быть произведено, вообще говоря, только на ровной и открытой мѣстности; поэтому обыкновенно ограничиваются короткими базисами и связываютъ ихъ затѣмъ съ длинными основными сторонами тріангуляціи при помощи такъ называемыхъ базисныхъ сѣтей (см. § 49).

---

*) См. также *Jederin* — Geodätische Längenmessung mit Stahlbänden und Metalldrähten (Kön. Sv. Vet. Ak. Bd. 9), *Woodward*—The metallic tape base apparatus (Report of the U. S. Coast and Geodetic Survey for 1892, p. 413) и *Витковскій*—Базисный приборъ Іедерина (Журналъ Русскаго Физико-Химическаго Общества, т. XXIV, стр. 77—95). Проволочными приборами занимался и извѣстный французскій географъ *Аббади* (1810—1897).

Современные приборы позволяютъ опредѣлять длину базиса съ точностью до $^1/_{1\,000\,000}$, тогда какъ лучшіе угломѣрные инструменты даютъ углы до $\pm 0''.5$, что соотвѣтствуетъ линейной погрѣшности около $^1/_{300\,000}$. Такимъ образомъ, начиная съ весьма точно измѣреннаго базиса, послѣдующія стороны треугольниковъ будутъ вычислены все съ бо̀льшими и бо̀льшими ошибками и, напримѣръ, стороны 50-го треугольника (отъ базиса), на основаніи формулы (39), будутъ опредѣлены съ среднею ошибкою въ $^1/_{300\,000} \cdot \sqrt{50}$ или около $^1/_{40\,000}$. Единственное средство для уменьшенія постепеннаго накопленія погрѣшностей въ вычисленныхъ сторонахъ заключается въ увеличеніи числа базисовъ: чѣмъ они чаще, тѣмъ вся тріангуляція будетъ точнѣе. Однако насколько не легко найти удобное мѣсто для длиннаго базиса, настолько же трудно находить мѣста вообще удобныя для измѣренія базисовъ; если припомнить медленность самыхъ измѣреній и значительность издержекъ, сопряженныхъ съ ними, то нѣтъ ничего удивительнаго, что число базисовъ, до сихъ поръ измѣренныхъ, весьма незначительно. Въ среднемъ оказывается, что даже въ лучшихъ заграничныхъ тріангуляціяхъ базисы отстоятъ другъ отъ друга на разстояніяхъ 200—300 верстъ, а число треугольниковъ между ними колеблется отъ 15 до 50 и даже больше.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ перечислены базисы, измѣренные по настоящее время въ Россіи; для облегченія справокъ они расположены въ алфавитномъ порядкѣ, и кромѣ мѣста, длины, употребленнаго прибора и года измѣренія, приведены еще изданія съ указаніемъ страницъ, гдѣ напечатаны всѣ подробности измѣренія. Въ эту таблицу не включены лишь базисы, измѣренные деревянными жезлами, въ началѣ XIX столѣтія, базисы, измѣренные для практическихъ нуждъ разныхъ вѣдомствъ, а равно базисы, измѣренные по бичевѣ.

Изъ этой таблицы (см. стр. 246 и 247) видно, что русскіе базисы имѣютъ длину отъ 2-хъ до 11-ти верстъ, причемъ самый короткій базисъ *Альтенскій*, а самый длинный — *Понедѣльскій*. Изъ всѣхъ 41 базисовъ 9 измѣрено приборомъ Теннера, 14 — приборомъ Шуберта, 15 — приборомъ Струве и 3—приборомъ Іедерина.

Списокъ русскихъ базисовъ.

НАЗВАНІЕ БАЗИСА.	Длина въ саженяхъ.	Какимъ приборомъ.	Годъ измѣренія.	Какой губерніи.	СПРАВКА.
1. Аландскій	2599.94	Шуберта .	1835	Абосской	Триг. съемка Балт. моря I, 102—156.
2. Альтенскій.	1054.87	Струве . .	1850	Въ Норвегіи . .	Дуга меридіана II, стр. 19.
3. Астраханскій . . .	3947.04	„	1856	Астраханской . .	Записки XXII, (II), стр. 27—117.
4. Бериславскій . . .	3184.35	„	1850	Херсонской . . .	„ XIX, (II), 77—79.
5. Бузулукскій . . .	3615.46	„	1863	Самарской . . .	„ XLVII, 15—19.
6. Бѣломѣстный . . .	3618.98	Шуберта .	1856	Курской	„ XXVI, (II), 61.
7. Бѣлоцерковскій . .	2909.25	Теннера .	1843	Кіевской	„ XVI (II), 10—20.
8. Варшавскій	2710.48	„	1846	Варшавской . .	„ XXIII (II), 85—142.
9. Вольскій	3263.45	Струве . .	1863	Саратовской . .	„ XLVII, 19—22.
10. Дрисвятскій . . .	5407.15	Теннера .	1817	Виленской . . .	„ X, 81—84, 120—124.
11. Евпаторійскій . . .	3077.51	Шуберта .	1836	Таврической . .	„ XXI (II), 12—17.
12. Екатериноградскій.	4566.92	„	1861	Ставропольской.	„ XXX (II), 29—54.
13. Елецкій (Ольшанскій)	3067.77	Струве . .	1863	Орловской . . .	„ XXVI, (II), 179. XLVII, 22—25.
14. Зугдидскій	2760.47	Іедерина .	1894	Кутаисской . . .	—
15. Ильинскій	4000.95	Шуберта .	1843	Орловской . . .	„ XXVI (II), 28—39.
16. Ильменскій (Коростынскій)	4136.55	„	1824	Новгородской .	„ II, 117—146, 230.
17. Молосковицкій . .	4603.68	Іедерина .	1888	С.-Петербургской.	„ LI (II), 1—162.
18. Московскій	3505.85	Шуберта .	1833	Московской . . .	„ XV (II), 2—8.
19. Новочеркасскій . .	3614.85	Струве . .	1853	Донской обл. . .	„ XIX (II), 206—209.
20. Орскій	4160.37	Струве . .	1865	Оренбургской . .	Записки XLVII, 11—15.
21. Освейскій	5225.79	Шуберта .	1831	Витебской . . .	„ II, 180—213, 232.
22. Осовницкій	5225.12	Теннера .	1827	Гродненской . .	„ VIII, 176—287.
23. Петербургскій *). .	4840.18	Шуберта .	1820	С.-Петербургской.	„ II, 83—116, 229.
24. Полангенскій . . .	4633.15	Теннера .	1821	Курляндской . .	„ X, 85—86, 124—126.
25. Понедѣльскій . . .	5531.63	„	1820	Виленской . . .	„ VIII, 288—392.
26. Пулковскій	1063.57	Іедерина .	1888	С.-Петербургской.	„ LI (II), 1—162.
27. Ревельскій	2252.74	Шуберта .	1830	Эстляндской . .	Триг. съемка Балт. моря I, 5—102.
28. Рогачевскій	2655.18	Струве . .	1862	Могилевской . .	Записки XLVII, 25—29.
29. Романкауцкій . . .	2658.42	„	1848	Бессарабской . .	„ XVII, 29—37, 42—46.
30. Симонисскій . . .	2114.89	„	1827	Эстляндской . .	Дуга меридіана I, 76.
31. Смоленскій	3120.43	Шуберта .	1833	Смоленской . . .	Записки XIV (II), 8—13.
32. Старо-Константиновскій (Кузьминъ-Погорѣлое)	4169.43	Теннера .	1838	Волынской . . .	„ XII (II), 30—35.
33. Суккантскій	5039.24	Шуберта .	1849	Бакинской . . .	„ XX (II), 35—41.
34. Тарноградскій . . .	2522.06	Теннера .	1847	Люблинской . .	„ XXIII (II), 143—150.
35. Ташбунарскій (Измаильскій)	2530.77	Тен. и Стр.	1840 и 52	Бессарабской . .	„ XVII (II), 37—42, 47—51.
36. Торнеоскій	1388.45	Струве . .	1851	Улеаборгской . .	Дуга меридіана II, 19.
37. Улеаборгскій . . .	1375.12	„	1845	„ . .	„ „ II, 19.
38. Ченстоховскій. . .	2048.44	Теннера .	1848	Петроковской . .	Записки XXIII (II), 151—162.
39. Шамхорскій . . .	4296.39	Шуберта .	1847	Тифлисской . . .	„ XX (II), 21—34.
40. Эпимскій	1232.09	Струве . .	1844	Нюландской . .	Дуга меридіана II, 19.
41. Ѳеодосійскій . .	2285.32	Шуберта .	1888	Таврической . .	Записки XLVIII (II), 191—205.

*) Петербургскій базисъ въ 1825 году измѣренъ вторично съ новыми центрами и для него получена длина 4910.16 саж. Записки II, 147—179, 231.

Что касается базисовъ, измѣренныхъ заграницею, то полный списокъ ихъ съ примѣчаніями о приборахъ и пр. помѣщенъ въ статьѣ французскаго геодезиста *Бассо*, напечатанной въ Отчетахъ Международнаго измѣренія земли (*Bassot.* Rapport sur la mesure des bases. Comptes-Rendus de l'Association Géodésique internationale, 1890). Не перечисляя всѣхъ базисовъ и ограничиваясь лишь европейскими, въ нижеслѣдующей таблицѣ приведено общее число базисовъ въ отдѣльныхъ государствахъ и употребленные для измѣренія ихъ приборы.

НАЗВАНІЯ ГОСУДАРСТВЪ.	Число базисовъ.	КАКІЕ ПРИБОРЫ.	
Австро-Венгрія	19	Приборъ	съ простыми жезлами и высовками въ родѣ Борда.
Англія	2	„	Кольби
Бельгія	2	„	Бесселя и Рейхенбаха.
Германія	14	„	Бесселя, Бруннера и Репсольда.
Голландія	2	„	Репсольда.
Данія	2	„	Бесселя.
Испанія и Португалія.	10	„	Иваньеса.
Италія	9	„	Бесселя и Порро.
Франція	7	„	Борда.
Швейцарія	5	„	Порро и Бруннера.
Швеція и Норвегія . .	10	„	барона Вреде, въ родѣ Струве.

82. Измѣреніе по бичевѣ. Для работъ Каспійской экспедиціи *), снаряженной въ 1836 году съ цѣлью опредѣленія разности высотъ уровней Чернаго и Каспійскаго морей, *В. Струве* предложилъ особый, весьма простой способъ измѣренія базисовъ—по бичевѣ деревянными жезлами. Такое измѣреніе не можетъ дать точности, достигаемой базисными приборами, но для такъ называемыхъ второклассныхъ тріангуля-

*) *W. Struve.* Beschreibung der zur Ermittelung des Höhenunterschiedes zwischen dem Schwarzen und dem Caspischen Meere ausgeführten Messungen. S. Petersburg, 1849.

цій, производящихся исключительно для нуждъ съемокъ, этотъ способъ признается удовлетворительнымъ и получилъ у насъ большое распространеніе, особенно на восточныхъ окраинахъ Европейской Россіи, въ Туркестанѣ и въ Сибири. Сущность способа заключается въ томъ, что по кольямъ, разставленнымъ вдоль базиса, *натягивается тонкая смоленая бичева* (2—3 линіи въ діаметрѣ) и затѣмъ по этой бичевѣ послѣдовательно откладывается длина деревяннаго жезла, снабженнаго по концамъ и по серединѣ стальными оковками (черт. 109).

Черт. 109.

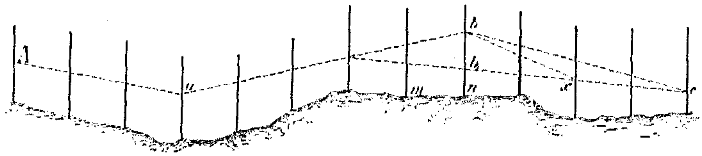
Измѣреніе базиса состоитъ изъ слѣдующихъ отдѣльныхъ дѣйствій:

1. *Провѣшиваніе линіи.* Ровные, заостренные снизу, длиною въ 10 — 12 футовъ и діаметромъ въ 2 — 3 дюйма колья раскладываются по базису черезъ каждыя 10 саженъ, отмѣриваемыя обыкновенною мѣрною цѣпью. Надъ первымъ базиснымъ центромъ устанавливается теодолитъ или другой угломѣрный инструментъ, труба его точно направляется на противоположный конецъ базиса и *закрѣпляется по азимуту.* Постановка кольевъ въ вертикальной плоскости базиса начинается съ болѣе или менѣе отдаленнаго кола, напримѣръ съ 50-го (далѣе было бы трудно управлять постановкою). Рабочій, поднявъ колъ, ставитъ его отвѣсно въ разрѣзъ груди и смотритъ на наблюдателя при теодолитѣ, который и выравниваетъ колъ въ линію голосомъ или знаками. Тогда рабочій вбиваетъ колъ въ землю на глубину отъ $1^1/_2$ до 2 футовъ; если грунтъ очень твердый, то дыры для кола выбиваются сперва желѣзнымъ ломомъ. Затѣмъ рабочій переходитъ къ слѣдующему колу (49-му) и, закрывъ собою прежде поставленный, такимъ же образомъ, по указаніямъ наблюдателя у теодолита, вбиваетъ его въ землю. Далѣе точно такъ же ставятъ колья 48-й, 47-й и пр. Послѣ постановки 1-го кола теодолитъ убирается, а сзади перваго базиснаго центра вбивается еще одинъ колъ (0-й), который выравнивается на глазъ, по ряду поставленныхъ уже кольевъ. Снятый теодолитъ переносится впередъ, устанавливается надъ

ямкою 50-го кола (который на время вынимается); труба теодолита направляется на второй базисный центръ, закрѣпляется по азимуту и, подобно предъидущему, ставятся колья 100, 99, 98-й.... до 51-го. Затѣмъ теодолитъ *переносится* на ямку 100-го кола и ставятся колья отъ 150 до 101-го и т. д., пока не разставятъ кольевъ по всему базису. Послѣдній колъ долженъ быть поставленъ на продолженіи базиса, за вторымъ центромъ. Для порядка и повѣрки измѣреній всѣ колья нумеруются цвѣтнымъ карандашомъ.

2. *Забивка отмѣтокъ.* Послѣдующее вычисленіе упрощается, если всѣ точки подвѣса бичевы на кольяхъ расположены на одной прямой, но мѣстность рѣдко допускаетъ это, и точки подвѣса, т. е. отмѣтки гвоздиками, приходится располагать по ломаной линіи; надо стараться однако, чтобы число переломовъ, сообразно рельефу мѣстности, было по возможности меньше. Для указанія отмѣтокъ вблизи перваго центра сбоку базиса, въ разстояніи примѣрно одного шага, ставятъ теодолитъ и, направивъ его трубу на одинъ изъ удаленныхъ кольевъ, слѣдятъ, чтобы линія визированія пересѣкла всѣ предъидущіе колья на высотѣ, доступной для измѣренія. Найдя такое положеніе для трубы, ее *закрѣпляютъ по высотѣ* и передвиженіями по азимуту направляютъ послѣдовательно на колья, а рабочій съ гвоздиками и молоткомъ перебѣгаетъ отъ одного кола къ другому и вбиваетъ въ нихъ гвоздики по указаніямъ наблюдателя у теодолита. Когда отмѣтки на первомъ участкѣ сдѣланы, теодолитъ переносится на новую точку у послѣдняго отмѣченнаго кола и ставится такъ, чтобы его горизонтальная ось была на высотѣ забитаго тутъ гвоздика. Здѣсь, какъ и на первой точкѣ стоянія, труба направляется на колъ по возможности удаленный, лишь бы весь новый рядъ гвоздиковъ пришелся на высотѣ, доступной измѣреніямъ. Когда всѣ гвоздики на новомъ рядѣ забиты, теодолитъ переносится на слѣдующую точку стоянія и т. д. до конца базиса.

Мѣстныя условія принуждаютъ иногда располагать слѣдующій рядъ отмѣтокъ по новой линіи. По черт. 110 легко понять, что, доведя отмѣтки до точки b, слѣдующій участокъ можно сдѣлать или по прямой bc или по ломаной bxc; въ первомъ случаѣ за b надо поставить очень высокіе колья, и измѣреніе было бы крайне неудобно, во второмъ случаѣ образовался бы лишній переломъ въ x, который усложнилъ бы послѣдующее вычисленіе. Если расположить отмѣтки по новой прямой $b'c$, то эти затрудненія устраняются; нужно только, чтобы прежняя линія ab и новая $b'c$ были отмѣчены на двухъ



Черт. 110.

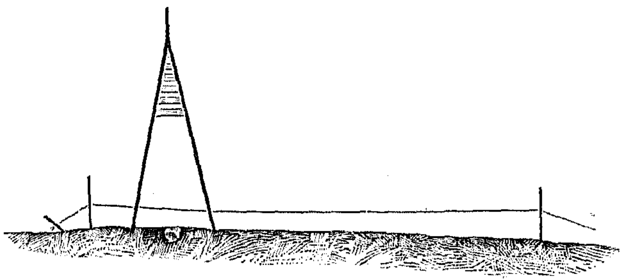
рядомъ стоящихъ кольяхъ m и n для переноса измѣренія съ одной бичевы на другую.

3. *Измѣреніе наклонностей.* Одновременно съ производствомъ отмѣтокъ, когда труба теодолита направлена на самый удаленный отъ нея гвоздикъ, нужно отсчитать показанія верньеровъ по вертикальному кругу (при двухъ положеніяхъ инструмента, см. § 104); изъ такихъ отсчетовъ получается непосредственно уголъ наклоненія соотвѣтствующаго участка, необходимый для вычисленія приведенія къ горизонту. Для повѣрки, при каждой новой установкѣ теодолита вертикальные углы измѣряются и впередъ, и назадъ. Напримѣръ, на переломѣ a (черт. 110) измѣряютъ углы наклоненія прямыхъ aA и ab, а при вычисленіи приведенія за наклонность участка Aa берутъ среднее изъ результатовъ наблюденій въ точкахъ A и a.

4. *Натягиваніе бичевы.* Пока одно отдѣленіе рабочихъ продолжаетъ производить отмѣтки, другое приступаетъ къ подвѣшиванію бичевы отъ начала базиса. Конецъ бичевы привязываютъ къ наклонно и крѣпко вбитому колу на продолженіи линіи (черт. 111), затѣмъ ее разматываютъ и подвѣшиваютъ на гвоздики всѣхъ послѣдовательныхъ кольевъ, дѣлая ею оборотъ около каждаго въ одну сторону и наблюдая, чтобы непрерывная линія бичевы шла по правой сторонѣ всѣхъ кольевъ (смотря отъ начала базиса). Когда выйдетъ одинъ мотокъ би-

чевы, къ ея концу приращивается другой ровнымъ и надежнымъ узломъ. Точно такъ же связываются концы бичевы, когда отъ излишняго усердія при натягиваніи она лопнетъ.

Бичева натягивается сперва не очень сильно, но потомъ, когда она подвѣшена уже на большомъ протяженіи, ее перетягиваютъ туже. Это перетягиваніе производится тѣмъ же или другимъ отдѣленіемъ рабочихъ, которые послѣдовательно переходятъ отъ одного кола къ другому; рабочихъ не лишне снабжать кожаными рукавицами. Натягивать нужно ровно и постепенно: отъ дерганія колья расшатываются, и бичева можетъ



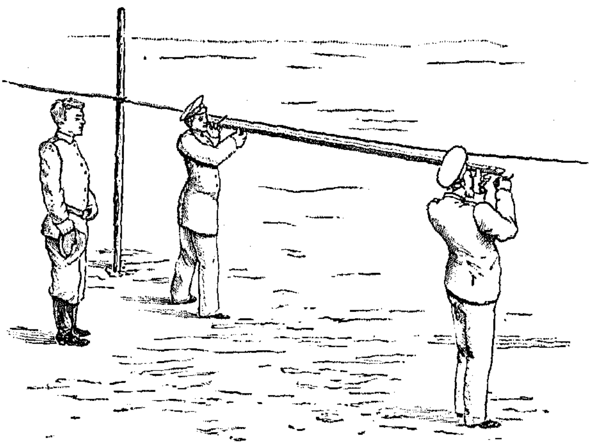
Черт. 111.

лопнуть, что задерживаетъ работу. За другимъ базиснымъ центромъ бичева привязывается опять къ наклонно забитому колу. Къ такимъ же наклонно забиваемымъ кольямъ привязываются концы въ мѣстахъ переноса бичевы.

Какъ бы туго бичева ни была натянута, по прошествіи нѣкотораго времени она снова обвисаетъ, и потому окончательное перетягиваніе производится обыкновенно уже передъ самымъ измѣреніемъ. Лучше всего натянуть бичеву съ вечера, дать ей вытянуться за ночь и утромъ перетянуть.

5. *Измѣреніе.* Ниже объяснено, какъ начинается и оканчивается измѣреніе; когда же работа непрерывно подвигается впередъ, то собственно измѣреніе производится двумя наблюдателями (черт. 112), причемъ оба стоятъ и переходятъ съ точки на точку съ правой стороны базиса (смотря отъ начала), а рабочіе, подающіе имъ жезлъ для отмѣтокъ и переносящіе его, идутъ съ лѣвой стороны. Наблюдатели должны имѣть острые

ножички, а рабочіе держатъ жезлъ не просто руками, а за тесемочныя мочки, привязанныя къ жезлу на разстояніи $^1/_4$ его длины отъ концовъ. Задній наблюдатель, принявъ конецъ жезла, прикладываетъ его къ бичевѣ такъ, чтобы нарѣзка ножомъ на бичевѣ оказалась по продолженію черты на пластинкѣ жезла, причемъ произносится «есть»; передній наблюдатель, уже приложившій свой конецъ жезла къ бичевѣ, услышавъ слово «есть», дѣлаетъ новую нарѣзку ножомъ противъ черты своей пластинки. Когда нарѣзка сдѣлана, передній наблюдатель тоже



Черт. 112.

произноситъ слово «есть», и если у задняго жезлъ не сдвинулся, то отмѣтка сдѣлана правильно, и оба наблюдателя отдаютъ жезлъ рабочимъ, которые переносятъ его дальше. Передній наблюдатель остается на мѣстѣ и не спускаетъ глазъ съ только что сдѣланной имъ нарѣзки (нарѣзка дѣлается слегка и, разъ сведя съ нея глаза, ее трудно вновь найти); задній же наблюдатель обходитъ передняго и самъ дѣлается теперь переднимъ. Рабочіе опять подаютъ жезлъ, и отмѣриваніе повторяется въ прежнемъ порядкѣ.

Постоянная смѣна наблюдателей имѣетъ слѣдующія цѣли: 1) нарѣзку, сдѣланную однимъ наблюдателемъ у передняго конца жезла, не надо указывать другому, къ ней прикладываетъ затѣмъ конецъ жезла тотъ же наблюдатель; 2) если нарѣзка оказалась сдѣланной не противъ черты пластинки, а нѣсколько впереди или сзади по бичевѣ, то наблюдатель, прикладывая заднiй конецъ жезла, можетъ соотвѣтствующимъ образомъ расположить и пластинку, такъ что подобныя ошибки, если и не вполнѣ, то частью исключаются; объяснять заднему наблюдателю, какъ надо бы приложить пластинку для исключенія случайной ошибки нарѣзки, было бы напрасною тратою времени; 3) повѣряется счетъ жезловъ, потому что если первый жезлъ отмѣренъ при наблюдателѣ A сзади и B впереди, то дальше, при томъ же положеніи наблюдателей, отмѣрены будутъ всѣ нечетные жезлы, а четные жезлы будутъ неизмѣнно отмѣриваться при положеніи наблюдателей A впереди и B сзади. Послѣ минованія каждаго кола, одинъ изъ наблюдателей пишетъ на немъ цвѣтнымъ карандашомъ цѣлое число отмѣренныхъ до этого кола жезловъ.

Первая нарѣзка въ точности по отвѣсу надъ первымъ базиснымъ центромъ дѣлается по указанію наблюдателя у теодолита, располагаемаго въ 3—4 саженяхъ отъ центра на перпендикулярѣ къ базисной линіи: наблюдатель приводитъ горизонтальную ось теодолита въ надлежащее положеніе при помощи уровня и направляетъ трубу на базисный центръ, на который, если онъ не ясно видимъ, ставится вертикально иголка; затѣмъ труба подымается, пока въ серединѣ ея поля зрѣнія не покажется бичева. Надрѣзъ ножомъ долженъ быть сдѣланъ такъ, чтобы онъ оказался по серединѣ между вертикальными нитями трубы теодолита. Совершенно подобнымъ же образомъ проектируется нарѣзка одной бичевы на другую въ мѣстахъ переноса бичевы. При переходѣ измѣренія съ одной бичевы на другую счетъ жезловъ не прерывается.

Когда измѣреніе подойдетъ къ концу базиса, то дѣлаютъ нарѣзку на бичевѣ такъ же, какъ надъ первымъ базиснымъ центромъ, а разстояніе между этой нарѣзкой и послѣднею нарѣзкою у конца жезла переносятъ нарѣзками же на самое тѣло приложеннаго къ бичевѣ жезла. Эта часть измѣряется потомъ штангенъ-циркулемъ или на описанномъ ниже компараторѣ (§ 83) и составляетъ *остатокъ базиса.*

Чтобы прекращать дневную работу или прерывать измѣреніе въ случаѣ наступленія ненастной погоды, необходимо заранѣе по базисной линіи заложить нѣсколько промежуточныхъ центровъ *) или забить прочные колья вровень съ землею, а въ нихъ вбить маленькіе гвоздики съ точкою на головкѣ. Самое прекращеніе измѣренія дѣлается, какъ будто оно доведено до базиснаго центра, а начало продолженія измѣренія—какъ самое начало его.

Для повѣрки измѣренія и сужденія объ его точности, работа ведется обыкновенно двумя жезлами и двумя отдѣленіями, слѣдующими одно за другимъ въ разстояніи промежутка въ 2—3 кола. Чтобы нарѣзки, сдѣланныя переднимъ отдѣленіемъ, не вводили въ заблужденіе наблюдателей задняго, оба жезла дѣлаются не совсѣмъ одинаковой длины, а одинъ короче другого, приблизительно на 0,1 дюйма. Второе отдѣленіе при прохожденіи каждаго кола повѣряетъ счетъ положенныхъ жезловъ по записямъ перваго.

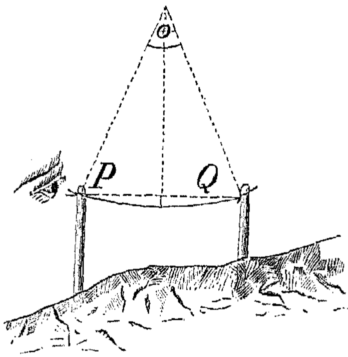
Когда работа закончена (у конца базиса или у промежуточнаго центра), то разность остатковъ, отмѣченныхъ на жезлахъ, очевидно должна равняться числу положенныхъ жезловъ, умноженному на разность ихъ длинъ, уже ранѣе извѣстную изъ сравненій на компараторѣ. Эта, такъ сказать, предварительная повѣрка достаточна, чтобы открыть грубый промахъ въ измѣреніяхъ. Если не получилось должнаго согласія или если, напримѣръ, оказалось разногласіе въ счетѣ жезловъ, то измѣреніе цѣлаго участка должно быть повторено.

6. *Стрѣлки провѣса.* Измѣреніе ведется по бичевѣ, представляющей между каждыми двумя сосѣдними кольями не прямую, а кривую, такъ называемую цѣпную линію. Для послѣдующаго приведенія дугъ къ хордамъ необходимо знать, помимо длины дугъ, еще ихъ стрѣлки провѣса (черт. 113). Онѣ

---

*) Временные промежуточные центры имѣютъ, помимо прямой своей цѣли, и другую: если нѣтъ достаточнаго запаса бичевы или если базисная линія пересѣкается проѣзжими дорогами, то не только измѣреніе, но и самое натягиваніе бичевы можно дѣлать не сразу, а по частямъ; по окончаніи измѣренія на одномъ участкѣ, бичева снимается и натягивается на слѣдующемъ.

измѣряются небольшою линеечкою, раздѣленною на десятыя доли дюйма. Одинъ наблюдатель смотритъ съ отмѣтки P на слѣдующую отмѣтку Q, а другой, ставъ приблизительно на середину между кольями P и Q, держитъ близъ бичевы линеечку отвѣсно и подымаетъ или опускаетъ ее до тѣхъ поръ, пока верхъ ея, гдѣ поставленъ 0 шкалы, не окажется точно на прямой PQ. Послѣ слова наблюдателя у P «есть» наблюдатель, держащій линеечку, отсчитываетъ дѣленіе у бичевы и записываетъ отсчетъ въ журналъ по формѣ:



Черт. 113.

Колья.	Провѣсы въ дюймахъ
0 — 1	2.3
1 — 2	1.7
2 — 3	1.9

Само собою разумѣется, что наблюдатель, держа линеечку, отнюдь не долженъ поддерживать самую бичеву. Стрѣлки провѣса измѣряются въ промежуткѣ между обоими отдѣленіями съ жезлами; такимъ образомъ одиночныя записи провѣсовъ могутъ служить потомъ для вычисленія приведеній дугъ къ хордамъ *средней* длины бичевы, полученной по обоимъ жезламъ.

83. Компараторъ Лебедева. Въ работахъ Каспійской экспедиціи и при первоначальномъ примѣненіи способа измѣреній базиса по бичевѣ длины жезловъ опредѣлялись просто штангенъ-циркулемъ. Однако такой пріемъ оказался недостаточно вѣрнымъ по тремъ причинамъ: 1) сравненія штангенъ-циркулемъ можно дѣлать не точнѣе 0.01 дюйма, что даетъ ошибку въ базисѣ до $^1/_{4200}$, ибо нормальная мѣра, возимая на мѣсто измѣренія, имѣетъ лишь полсажени длины (42 д.); 2) весьма трудно прикладывать острія циркуля къ самымъ концамъ поперечныхъ черточекъ на жезлахъ; при небрежномъ же прикладываніи къ другимъ частямъ этихъ черточекъ, разстоянія между ними получаются различныя, смотря по мѣстамъ прикосновеній, и 3) отъ многократныхъ прикосновеній остріями весьма скоро портятся какъ черточки на жезлахъ и на нормальной мѣрѣ, такъ и самыя острія циркуля.

Бывшій начальникъ русской тріангуляціи въ Болгаріи, *М. Н. Лебедевъ* (1841—1892), изобрѣлъ въ 1879 году особый, весьма удобный для перевозокъ компараторъ, устраняющій всѣ указанные недостатки штангенъ-циркуля и, главное, приведшій сравненіе жезловъ къ дѣйствію, однородному съ самымъ измѣреніемъ бичевы жезлами.

Нормальная мѣра компаратора представляетъ мѣдную линейку около 45 дюймовъ длиною, раздѣленную на цѣлые дюймы. Крайніе же промежутки, по два дюйма на обоихъ концахъ, раздѣлены еще на сотыя доли дюйма. Эти мелкія подраздѣленія сдѣланы на особыхъ серебряныхъ пластинкахъ, впаянныхъ въ тѣло линейки.

Собственно компараторъ состоитъ изъ крѣпкой мѣдной трубки, оправленной въ дерево, по которой могутъ передвигаться и закрѣпляться въ любомъ положеніи нажимными винтами двѣ обоймицы. Нижніе края обоймицъ суть тонкія высеребренныя пластинки съ черточками, представляющими верньеры для нормали. Именно, на нихъ пространство въ 0.49 дюйма раздѣлено на 50 равныхъ частей, и, слѣдовательно, точность отсчета по этимъ верньерамъ равна 0.0002 дюйма. Пластинка одной обоймицы прикрѣплена къ ней неподвижно, пластинка же другой — подвижная, и можетъ медленно и плавно передвигаться параллельно трубкѣ компаратора при помощи микрометрическаго винта. Надъ обѣими пластинками придѣланы еще подвижныя лупы для увеличиванія мелкихъ дѣленій, которыя простымъ глазомъ почти и не видны.

Опредѣленіе длины жезловъ производится по частямъ, для чего къ жезламъ привинчены пластинки черезъ каждыя полсажени. Первоначально употреблялись жезлы въ 1 сажень, теперь же почти исключительно въ $1^1/_2$ сажени; короткіе жезлы замедляютъ работу измѣренія базиса, а очень длинные могли бы прогибаться и не соприкасались бы на всемъ своемъ протяженіи съ бичевою. При сравненіяхъ сперва измѣряютъ разстояніе между черточками на концевой и на первой промежуточной пластинкахъ, затѣмъ между обѣими промежуточными и, наконецъ, между второю промежуточною и другою концевою. Для сравненій жезлъ кладется горизонтально на столъ или на два табурета, и два наблюдателя, взявшись за обоймицы компаратора, открѣпляютъ зажимные винты и ставятъ ихъ на разстояніе, близкое къ разстоянію между черточками на жезлѣ. Затѣмъ компараторъ прикладывается къ жезлу, и наблюдатель у одной обоймицы ставитъ 0 ея верньера въ разрѣзъ черты жезла, наблюдатель же у другой передвигаетъ пластинку микрометрическимъ винтомъ, пока и его 0 верньера не окажется въ разрѣзъ другой черты жезла. Далѣе компараторъ осторожно переносится на нормаль, и наблюдатель у одной изъ обоймицъ ставитъ 0 ея верньера точно на черту цѣлаго дюйма, а наблюдатель у другой производитъ отсчетъ, т. е. замѣчаетъ цѣлыя, десятыя и сотыя дюйма по нормали, а тысячныя и четныя цифры десятитысячныхъ дюйма по верньеру. Послѣ отсчета и записи въ журналъ наблюдатели, не мѣняя своихъ мѣстъ, ставятъ: второй—нуль своего верньера на черту цѣлаго дюйма, а первый производитъ отсчетъ. Такимъ же образомъ опредѣляются длины остальныхъ промежутковъ жезловъ. Длина каждаго жезла выразится, очевидно, суммою среднихъ выводовъ изъ отсчетовъ для всѣхъ трехъ частей. При сравненіяхъ записываются показанія термометра у нормальной мѣры.

Вотъ образецъ опредѣленія длины одного жезла:

Отсчеты (въ дюймахъ).

	Части жезла.	1-й набл.	2-й набл.	Среднее
	I	39.7541	40—0.2490	39.75255
$t = 26°.1$	II	39.7695	40—0.2324	39.76855
	III	39.7600	40—0.2412	39.75940

Длина жезла $A = 119.2805$ дюйма.

84. Вычисленіе базиса. Пусть l_1 и l_2 суть длины обоихъ жезловъ, служившихъ для измѣренія базиса, n_1 и n_2 — числа положенныхъ жезловъ (обыкновенно длины жезловъ различаются такъ мало, что $n_1 = n_2$), а r_1 и r_2 — остатки измѣренія;

тогда *длина бичевы* между базисными центрами выразится формулами:

по измѣренію 1-мъ жезломъ $L_1 = n_1 l_1 + r_1$

по измѣренію 2-мъ жезломъ $L_2 = n_2 l_2 + r_2$

Длины L_1 и L_2 должны быть почти равны и отличаться не болѣе, какъ на 50 000-ую долю величины L. Въ среднемъ получается

$$L = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

Къ этой средней величинѣ L надо придать поправки:

1) За невѣрность нормали. Нормаль или линейка при компараторѣ должна быть сравнена съ какою нибудь нормальною мѣрою. Пусть извѣстно, что длина нормали между чертами 0 и 42 дюйма составляетъ не ровно 42 дюйма, а 42 д.$+ q$ (гдѣ q, конечно, всегда малая дробь дюйма). Значитъ, къ каждой полсажени, отмѣренной жезлами, надо прибавить величину q, а къ длинѣ L (выраженной въ дюймахъ) величину:

$$+ \frac{L}{42} \cdot q \text{ дюймовъ.}$$

2) За температуру. Деревянные жезлы мало мѣняютъ свою длину отъ перемѣнъ температуры, притомъ же температура жезловъ и не опредѣляется; но мѣняетъ длину нормаль, и температура ея во время сравненія съ жезлами отсчитывается. Какъ выше сказано, нормаль имѣетъ длину 42 д. $+ q$ при нѣкоторой опредѣленной температурѣ t_0; пусть во время сравненій съ жезлами температура нормали была t. Слѣдовательно, нормаль стала длиннѣе на

$$(42 + q) \cdot k \cdot (t - t_0)$$

гдѣ k—коэффиціентъ линейнаго расширенія мѣди, изъ которой сдѣлана нормаль. Раскрывая первую скобку, отбрасывая малый членъ съ произведеніемъ $q \cdot k$ и умножая поправку на $\frac{L}{42}$, т. е. на число нормалей въ базисѣ, получимъ поправку за температуру:

$$+ L \cdot k \cdot (t - t_0)$$

3) За стрѣлки провѣса. Бичева между двумя сосѣдними кольями имѣетъ фигуру цѣпной линіи; однако, по малости стрѣлки провѣса, дугу цѣпной линіи можно принять за дугу круга съ нѣкоторымъ радіусомъ ρ (черт. 113). Назвавъ длину дуги PQ черезъ a, длину хорды PQ черезъ b, а уголъ между радіусами, проведенными отъ центра къ концамъ дуги, черезъ θ, имѣемъ:

$$a = \rho \,.\, \theta$$

$$b = 2\rho \,.\, sin \frac{\theta}{2}$$

По малости угла θ, $sin \frac{\theta}{2}$ можно замѣнить черезъ $\frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{48}$, и потому искомая разность $a - b$ выразится такъ:

$$a - b = \rho \,.\, \frac{\theta^3}{24} \qquad (a)$$

Величины ρ и θ неизвѣстны, но зато непосредственными измѣреніями опредѣляется стрѣлка провѣса h; изъ чертежа видно, что

$$h = \rho - \rho \cos \frac{\theta}{2} = \rho \,.\, 2 \sin^2 \frac{\theta}{4} = \rho \,.\, \frac{\theta^2}{8}$$

или

$$h^2 = \rho^2 \,.\, \frac{\theta^4}{64} = \rho \,.\, \frac{\theta^3}{64} \,.\, \rho\theta = \rho \,.\, \frac{\theta^3}{64} \,.\, a$$

откуда

$$\rho \,.\, \theta^3 = \frac{64 \,.\, h^2}{a}$$

Подставляя въ (a), получаемъ:

$$a - b = \frac{8}{3a} \,.\, h^2$$

Для каждаго промежутка между двумя кольями длина дуги a остается почти постоянною (10 саж.); поэтому, суммируя подобныя же приведенія, для всего базиса получимъ поправку:

$$-\frac{8}{3a} \,.\, \Sigma h^2$$

4) За наклонность. Хорды между отмѣтками на кольяхъ представляютъ не прямую, а ломаную линію, причемъ углы наклоненія отдѣльныхъ участковъ извѣстны изъ непосредственныхъ измѣреній. Назовемъ длину отдѣльнаго прямого участка ломаной черезъ u, а соотвѣтствующій ему уголъ наклоненія черезъ i; тогда приведеніе къ горизонту этого участка выразится черезъ $-2u \,.\, sin^2\frac{i}{2}$, что по малости угла i можно замѣнить черезъ $-\frac{sin^2 1'}{2} \,.\, ui'^2$. Послѣ суммированія такихъ поправокъ для всѣхъ участковъ, поправка базиса выразится черезъ

$$-\frac{sin^2 1'}{2} \,.\, \Sigma\, ui'^2$$

5) За приведеніе къ уровню океана. Эта поправка объяснена уже въ § 77 и равна

$$-\frac{L \,.\, H}{R}$$

гдѣ L — длина базиса, H — среднее изъ абсолютныхъ высотъ его концовъ и R — радіусъ кривизны соотвѣтствующаго нормальнаго сѣченія (форм. 13).

Если собрать вмѣстѣ всѣ поправки, то окончательная длина базиса въ дюймахъ выразится формулою:

$$L_0 = L + \frac{L}{42} \,.\, q + L \,.\, k \,.\, (t - t_0) - \frac{8}{3a} \,.\, \Sigma h^2 - \frac{sin^2 1'}{2} \,.\, \Sigma ui'^2 - \frac{L \,.\, H}{R} \quad \textbf{(51)}$$

Чтобы дать понятіе о величинѣ поправочныхъ членовъ, вотъ величины ихъ для Никопольскаго базиса, измѣреннаго въ сентябрѣ 1877 года.

	Дюймовъ.
Длина бичевы по 1-му измѣренію	132 240.3484
„ „ „ 2-му „	132 242.1078
Въ среднемъ . . . . . . L=	132 241.228
Поправка за невѣрность нормали	+ 15.800
„ „ температуру нормали ($t - t_0 = -3°$ R)	— 5.350
„ „ провѣсъ бичевы	— 2.040
„ „ наклонность	— 0.156
Приведеніе къ уровню океана (H = + 13.6 саж.)	— 0.600

Окончательная длина Никопольскаго базиса L_0 = { 132 248.88 дюйма; 1 574.3914 сажени.

Для измѣренія базиса по бичевѣ, при двухъ жезлахъ, число наблюдателей должно быть не менѣе 5-ти (4 при двухъ жезлахъ и по крайней мѣрѣ одинъ для измѣренія стрѣлокъ провѣса). Прислуги при наблюдателяхъ необходимо имѣть около 30 человѣкъ, бо̀льшая часть которыхъ должна охранять натянутую бичеву отъ неосторожныхъ прохожихъ и злоумышленниковъ.

Точность измѣренія зависитъ главнымъ образомъ отъ неподвижности бичевы и отъ точности, съ которою дѣлаются на ней нарѣзки. Послѣдняя зависитъ отъ такъ называемой личной ошибки и, слѣдовательно, различна для разныхъ наблюдателей. М. Н. Лебедевъ, много занимавшійся этого рода измѣреніями, пришелъ къ заключенію, что при сравненіяхъ жезловъ простымъ штангенъ-циркулемъ ошибка измѣренія оказывается около $^1/_{35000}$ длины, а при сравненіяхъ помощью описаннаго выше компаратора—только $^1/_{50000}$. Отсюда видно, что способъ этотъ не можетъ служить для измѣреній базисовъ первоклассной тріангуляціи, гдѣ углы измѣряются до $0''.5$, что соотвѣтствуетъ линейной ошибкѣ $^1/_{300000}$.

Скорость измѣренія по бичевѣ зависитъ главнымъ образомъ отъ удобства прикладыванія жезловъ; всего удобнѣе работать стоя и когда бичева приходится приблизительно на высотѣ груди человѣка. Если базисъ пересѣкаетъ овражки и горки, то бичева поневолѣ подвѣшивается то выше, то ниже грудной высоты; въ первомъ случаѣ для измѣрителей переносятъ скамейки или табуреты, во второмъ—приходится работать согнувшись, на колѣняхъ и даже лежа. Въ обоихъ случаяхъ работа, конечно, замедляется. Въ среднемъ оказывается, что въ 1 часъ можно отмѣрить до 100 жезловъ, т. е. при полуторасаженныхъ жезлахъ пройти 150 саженъ, а въ одинъ рабочій день измѣрить отъ 3-хъ до 4-хъ верстъ.

Были попытки замѣнить бичеву проволокою, а нарѣзки ножомъ—маленькими скобками, насаживаемыми на проволоку противъ черточекъ жезловъ. Однако проволока представляетъ другія неудобства: самое натягиваніе проволоки труднѣе и идетъ медленнѣе, чѣмъ натягиваніе бичевы; притомъ же прослужившую разъ проволоку очень затруднительно вновь выпрямлять, и погибы ея неравномѣрно растягиваются во время самого измѣренія. Лучшихъ результатовъ можно было бы ожидать отъ замѣны деревянныхъ жезловъ стеклянными трубками съ матовыми частями въ мѣстахъ расположенія поперечныхъ черточекъ, но такихъ опытовъ до сихъ поръ не дѣлалось.

Во всякомъ случаѣ измѣреніе базисовъ по бичевѣ можно съ успѣхомъ примѣнять для второклассныхъ тріангуляцій, въ которыхъ углы измѣряются малыми инструментами съ точностью отсчетовъ въ $10''$ или $20''$. Таковы, напримѣръ, тріангуляціи, производимыя у насъ на восточныхъ окраинахъ Европейской Россіи, въ Туркестанѣ и въ Сибири. Поучительныя подробности о такихъ измѣреніяхъ можно найти въ статьяхъ, напечатанныхъ въ Запискахъ Военно-Топографическаго Отдѣла Главнаго Штаба (часть XXXVIII, стр. 177—199, ч. XLIII, стр. 21—51 и ч. LI, стр. 230—258). Обширная тріангуляція, произведенная русскими топографами въ Болгаріи въ 1877—1880 гг., основана на шести базисахъ, длиною отъ 3 до 5 верстъ, измѣренныхъ по бичевѣ.

O! Messkunst, Zaum der Phantasie,
Wer dir will folgen, irret nie.

Haller.

VII.

Измѣреніе угловъ.

85. Угломѣрные инструменты. До начала XIX вѣка на тріангуляціяхъ измѣрялись углы между самими предметами, и такъ какъ наблюдаемыя точки могутъ лежать, вообще говоря, и выше, и ниже горизонтальной плоскости точки наблюденія, то измѣрялись, очевидно, углы, различно наклоненные къ горизонту. Въ настоящее время этотъ способъ совсѣмъ оставленъ и на тріангуляціяхъ измѣряютъ исключительно: 1) *горизонтальные углы*, т. е. углы между вертикальными плоскостями, проходящими черезъ отвѣсную линію точки наблюденія и каждый изъ наблюдаемыхъ предметовъ, и 2) *вертикальные углы* или *зенитныя разстоянія*, т. е. углы, составляемые отвѣсною линіею точки наблюденія съ направленіями на наблюдаемые предметы. Горизонтальные углы служатъ для послѣдующаго вычисленія положенія проекцій всѣхъ точекъ тріангуляціи на уровенной поверхности, а вертикальные — для вычисленія относительнаго превышенія или разностей высотъ точекъ тріангуляціи.

Ниже, въ § 97 объяснено, почему горизонтальные и вертикальные углы измѣряются не одновременно; тѣмъ не менѣе и тѣ, и другіе измѣряются обыкновенно однимъ инструментомъ, такъ что каждый угломѣрный инструментъ, назначенный для производства наблюденій на тріангуляціяхъ, долженъ позволять измѣрять какъ горизонтальные, такъ и вертикальные углы

Сущность измѣренія угла заключается въ томъ, что визирный приборъ (зрительная труба), соединенный съ подвижною частью инструмента, наводится послѣдовательно по сторонамъ угла и послѣ каждаго наведенія дѣлаются отсчеты по раздѣленному кругу, остающемуся неподвижнымъ. Разность отсчетовъ выражаетъ измѣренный уголъ. Сообразно этому каждый угломѣрный инструментъ, назначенный для тріангуляціи, состоитъ изъ трехъ главныхъ частей: 1) *зрительной трубы* со скрѣпленными съ нею наглухо горизонтальною осью и вертикальнымъ кругомъ, 2) *алидадной части* съ лагерными стойками и вертикальною осью и 3) *горизонтальнаго круга* со втулкою для вертикальной оси и тремя симметрично расположенными ножками съ подъемными винтами. Такъ какъ труба можетъ вращаться около горизонтальной оси, лежащей въ лагерахъ, а самые лагеры — около оси вертикальной, то трубѣ можно придать любое направленіе въ пространствѣ, причемъ положеніе горизонтальной проекціи этого направленія отсчитывается по горизонтальному кругу, а уголъ наклоненія его — по кругу вертикальному.

Земные предметы, наблюдаемые на тріангуляціяхъ, лежатъ обыкновенно весьма незначительно выше или ниже точки наблюденія, и потому нѣтъ никакой надобности устраивать угломѣрные инструменты такъ, чтобы зрительная труба могла принимать всевозможныя направленія въ вертикальной плоскости; совершенно достаточно, если зрительной трубѣ можно придавать углы наклоненія въ предѣлахъ $\pm 10^\circ$. Если же угломѣрный инструментъ назначается для наблюденій не только земныхъ предметовъ, но и небесныхъ свѣтилъ, то зрительная труба должна обращаться около горизонтальной оси такъ же свободно, какъ и около оси вертикальной. Сообразно этому угломѣрные инструменты, употребляемые на тріангуляціяхъ, представляютъ два типа: *теодолиты* *), назначенные только

*) Теодолиты представляютъ усовершенствованіе астролябіи, изобрѣтенныхъ еще *Гиппархомъ* (180—125 до Р. Х.). У грековъ, арабовъ и вообще до временъ *Тихо-Браге* (1546—1601) и *Гевелія* (1611—1687) угломѣрные инструменты дѣлались съ діоптрами; позднѣе ихъ стали дѣлать съ зрительными трубами. Лучшій типъ теодолита выработанъ англійскимъ механикомъ *Рамсденомъ* (1735—1800), и самое слово теодолитъ нѣкоторые производятъ отъ англійскаго „The Alidada“, хотя вѣроятнѣе, что оно произошло отъ греческихъ словъ θεωμαι—вижу и ὁδος—путь, дорога.

для наблюденія земныхъ предметовъ, въ которыхъ зрительной трубѣ можно придавать лишь небольшіе углы наклоненія, и *универсалы* или *универсальные инструменты*, служащіе для наблюденія какъ земныхъ предметовъ, такъ и небесныхъ свѣтилъ, и зрительнымъ трубамъ которыхъ можно придавать любые углы наклоненія.

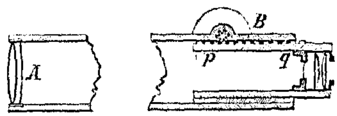
Нѣтъ никакого сомнѣнія, что чѣмъ проще инструментъ, тѣмъ онъ лучше удовлетворяетъ своему назначенію, поэтому теодолиты вообще имѣютъ преимущество передъ универсалами. Лагерныя стойки у первыхъ всегда ниже, чѣмъ у вторыхъ, и потому теодолиты имѣютъ бо̀льшую устойчивость. Тѣмъ не менѣе желаніе имѣть инструментъ, пригодный для всѣхъ родовъ наблюденій на тріангуляціяхъ *), побудило художниковъ XIX вѣка значительно усовершенствовать именно универсалы. Чтобы сдѣлать ихъ болѣе устойчивыми, т. е. укоротить лагерныя стойки и все же позволить зрительной трубѣ принимать всевозможныя положенія по̀ высотѣ, механики прибѣгаютъ къ двумъ средствамъ: располагаютъ прямую зрительную трубу не центрально, а на концѣ горизонтальной оси (черт. 131) или же дѣлаютъ ломаныя трубы, т. е. по серединѣ горизонтальной оси прикрѣпляютъ только одну объективную ея половину, а окуляръ помѣщаютъ въ самой горизонтальной оси (черт. 119); въ послѣднемъ случаѣ для отраженія лучей, вошедшихъ въ трубу черезъ объективъ, къ окуляру, по серединѣ горизонтальной оси располагаютъ прямоугольную стеклянную призму.

Въ настоящее время существуетъ множество системъ устройства угломѣрныхъ инструментовъ. Въ §§ 92, 93 и 94 описаны три типа: *теодолитъ*, *универсалъ съ внѣцентренною трубою* и *универсалъ съ ломаною трубою*. Знакомому съ этими типами не трудно освоиться съ устройствомъ любого угломѣрнаго инструмента, назначеннаго для производства тріангуляцій. Для

*) Астрономическія наблюденія производятся на одной или нѣсколькихъ тригонометрическихъ точкахъ для опредѣленія широтъ, долготъ и азимутовъ. Въ новѣйшихъ тріангуляціяхъ стараются вообще увеличивать число астрономическихъ точекъ, а для систематическаго изученія геоида нелишне, чтобы даже *всѣ* тригонометрическія точки были вмѣстѣ съ тѣмъ и астрономическими.

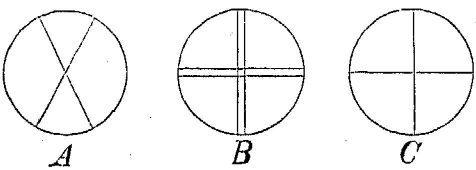
избѣжанія повтореній ниже предпослано описаніе отдѣльныхъ частей, общихъ всѣмъ угломѣрнымъ инструментамъ. Основанія устройства и изслѣдованія зрительныхъ трубъ, уровней, верньеровъ и т. п. предполагаются извѣстными читателю.

86. Зрительныя трубы. Въ угломѣрныхъ инструментахъ пользуются исключительно астрономическими трубами, дающими обратное изображеніе предмета и позволяющими при малой длинѣ получать достаточную ясность и значительное увеличеніе. *Прямая* зрительная труба состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ, вложенныхъ одна въ другую трубокъ или колѣнъ: большого или *объективнаго*, на концѣ котораго ввинчивается въ своей оправѣ ахроматическій объективъ A (черт. 114), и малаго или *окулярнаго*, въ которомъ помѣщена сѣтка нитей и окулярная трубочка съ двумя плоско-выпуклыми стеклами, образующими окуляръ системы *Рамсдена*. Передвиженія окулярнаго колѣна внутри объективнаго производятся помощью зубчатаго колесика, расположеннаго въ тѣлѣ объективнаго колѣна и вращаемаго головкою B. Колесико захватываетъ зубцы полосы pq, припаянной къ окулярному колѣну. Перемѣщенія же окулярной трубочки дѣлаются просто руками, и эта трубочка удерживается въ разъ данномъ ей положеніи или однимъ треніемъ, или же особымъ маленькимъ зажимнымъ винтикомъ. Оптическою осью прямой трубы называется прямая, соединяющая оптическій центръ объектива съ серединою сѣтки нитей въ окулярѣ. Передъ наблюденіями надо установить сперва окулярную трубочку «по глазу», чтобы сѣть нитей была совершенно ясно и отчетливо видна, а потомъ, передвигая взадъ и впередъ окулярное колѣно головкою B, совмѣстить изображеніе предмета съ сѣткою нитей, т. е. достигнуть того, чтобы изображеніе было совершенно отчетливо и чтобы не было параллакса нитей.

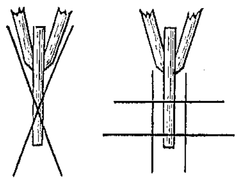


Черт. 114.

Діафрагма съ сѣткою нитей въ окулярномъ колѣнѣ располагается такъ, что при помощи особыхъ исправительныхъ винтовъ ее можно перемѣщать въ вертикальной плоскости вверхъ и внизъ, вправо и влѣво. Устройство самой сѣтки бываетъ весьма разнообразно. Для наблюденія земныхъ предметовъ сѣтка состоитъ изъ двухъ нитей, пересѣкающихся подъ острымъ угломъ (чертежъ 115, *A*), или же изъ креста, составленнаго двойными взаимно-перпендикулярными нитями (*B*). Въ первомъ случаѣ серединою сѣтки, т. е. точкою прицѣла на предметъ, служитъ самое пересѣченіе нитей, во второмъ—центръ квадратика или прямоугольника, образуемыхъ обѣими парами нитей въ серединѣ поля зрѣнія. Навести трубу значитъ поставить изображеніе наблюдаемаго предмета въ середину сѣтки; въ сѣткѣ *A* наблюдатель оцѣниваетъ равенство отрѣзковъ изображенія по бо-



Черт. 115.



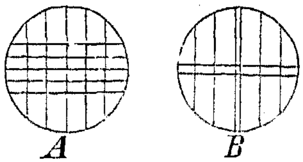
Черт. 116.

камъ, въ сѣткѣ *B* — равенство промежутковъ между краями изображенія и ближайшими краями двухъ параллельныхъ нитей (черт. 116).

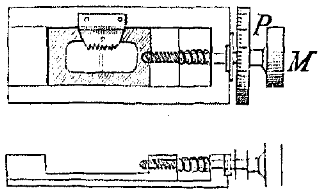
Въ небольшихъ инструментахъ сѣтка нитей дѣлается иногда въ видѣ одиночнаго креста изъ горизонтальной и вертикальной нитей (черт. 115, *C*); опытъ показалъ, что наведеніе точки пересѣченія такихъ нитей не можетъ быть сдѣлано съ большою точностью, притомъ же, если труба наведена на очень удаленный и узкій предметъ (напр. крестъ далекой колокольни), то ширина изображенія бываетъ меньше толщины вертикальной нити, отчего наблюдатель не можетъ имѣть данныхъ для сужденія о точности наведенія трубы: изображеніе предмета совершенно скроется за нитью. Такое простое устройство сѣтки допускается только въ инструментахъ, назначенныхъ для работъ малой точности.

Трубы универсаловъ, назначенныхъ для наблюденія какъ земныхъ предметовъ, такъ и небесныхъ свѣтилъ, снабжаются иногда сѣтками болѣе сложнаго устройства, въ которыхъ имѣется нѣсколько вертикальныхъ нитей или даже цѣлая система горизонтальныхъ и вертикальныхъ взаимно-перпендикулярныхъ нитей (черт. 117). Такое устройство позволяетъ увеличивать точность наблюденій прохожденія Солнца или звѣздъ при неподвижномъ положеніи инструмента, потому что прохожденіе движущагося небеснаго свѣтила наблюдается по каждой нити отдѣльно, а среднее изъ временъ такихъ прохожденій очевидно точнѣе, чѣмъ замѣченное время одиночнаго прохожденія.

Окуляры новѣйшихъ инструментовъ нерѣдко снабжаются микрометрами, устройство которыхъ показано на черт. 118.



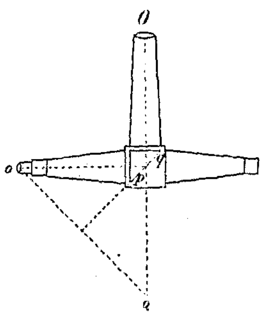
Черт. 117.



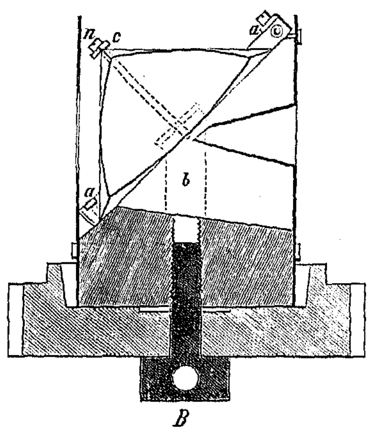
Черт. 118.

Пластинка съ двойною вертикальною нитью движется въ пазахъ весьма близко передъ неподвижными нитями при помощи микрометрическаго винта *M*. Передвиженія нитей отсчитываются: полные обороты микрометрическаго винта на гребенкѣ, разстоянія между зубцами которой равны величинѣ хода винта, а доли оборота на барабанѣ *P*, раздѣленномъ на равныя части. Для уничтоженія мертваго хода винта служитъ особая спиральная пружинка, благодаря которой пластинка съ нитями всегда надавливается въ одну сторону. Цѣна оборота винта, а слѣдовательно и цѣна одного дѣленія барабана микрометра весьма легко опредѣляется непосредственно, изъ наведеній подвижной нити на черточки вспомогательной марки, причемъ, конечно, должны быть измѣрены: разстояніе между черточками марки и разстояніе марки (перпендикулярно установленной) отъ объектива зрительной трубы. Когда окуляръ снабженъ микрометромъ, то одиночное наведеніе трубы можно замѣнять группою изъ нѣсколькихъ наведеній нитями микрометра, отчего среднее изъ наведеній выводится съ бо̀льшею точностью.

Подробности устройства *ломаной* трубы ничѣмъ не отличаются отъ подробностей устройства прямой; разница заключается лишь въ томъ, что приблизительно по серединѣ длины трубы расположена призма. Подъ оптическою осью ломаной трубы разумѣютъ прямую, соединяющую оптическій центръ объектива съ изображеніемъ центра сѣти нитей окуляра въ зеркальной плоскости гипотенузы призмы. Такъ, на черт. 119 оптическая ось трубы есть прямая Oo_1, причемъ точка o_1 построена, какъ изображеніе центра сѣтки o въ плоскомъ зеркалѣ pq. Для



Черт. 119.



Черт. 120.

того, чтобы оптическая ось трубы оставалась неизмѣнною, необходимо, чтобы самая призма была укрѣплена вполнѣ благонадежно. Обыкновенно она привинчена къ такъ называемому *стулу*, составляющему отдѣльную мѣдную часть, скошенную подъ угломъ въ 45° и въ свою очередь привинчиваемую къ мѣдной массивной пластинкѣ, представляющей одно изъ основаній куба горизонтальной оси. Стеклянная призма (черт. 120) лежитъ на скошенной грани стула и касается его своею гипотенузою лишь въ трехъ точкахъ; движеніе призмы вдоль поверхности стула ограничено брускомъ *aa* (двѣ точки опоры) и противолежащею ему пружинною пластинкою *b* (третья точка опоры); къ поверхности же стула призма прижимается полоскою c, черезъ которую пропущены два длинные винта n. Эти винты должны быть хорошо привинчены самимъ механикомъ. Опытъ показалъ, что степень ихъ закрѣпленія имѣетъ большое вліяніе на оптическія качества призмы: если они не вполнѣ довинчены, то призма шатается, если же нажаты слишкомъ сильно, то изображенія дѣлаются дурными. Такимъ образомъ призма должна сохранять на своемъ стулѣ то положеніе, которое разъ навсегда придано ей въ мастерской. Наблюдатель можетъ мѣнять положеніе только самого стула, для чего имѣются особые исправительные винтики и зажимной винтъ B. Ослабивъ этотъ винтъ, можно, ввинчивая одинъ исправительный винтикъ и вывинчивая другой, вращать стулъ, а съ нимъ и призму; такое вращеніе мѣняетъ мѣсто зенита на вертикальномъ кругѣ. Для уничтоженія же коллимаціонной ошибки надо дѣйствовать исправительными винтами при діафрагмѣ окулярной сѣтки.

При дневныхъ наблюденіяхъ поле зрѣнія трубы само собою представляется свѣтлымъ и на немъ рѣзко видны нити сѣтки. При ночныхъ наблюденіяхъ необходимо искусственно освѣщать поле зрѣнія. Это достигается или небольшой пластинкой, располагаемой подъ угломъ въ 45° передъ объективомъ, причемъ во время наблюденій необходимо держать ручной фонарь, или же особыми приспособленіями внутри трубы. Въ ломаныхъ трубахъ лучи свѣта вспомогательной лампочки проникаютъ въ горизонтальную ось со стороны, противоположной окуляру, и для пропуска ихъ черезъ призму къ гипотенузѣ послѣдней приклеивается небольшая контръ-призмочка.

Кромѣ главной трубы, расположенной вверху, угломѣрные инструменты часто имѣютъ еще другую *повѣрительную трубу*, прикрѣпленную тѣмъ или инымъ способомъ къ основанію, такъ что во время наблюденій повѣрительная труба составляетъ одно цѣлое съ горизонтальнымъ лимбомъ. Ее направляютъ на какой нибудь ясно видимый предметъ, и малѣйшее движеніе лимба обнаруживается измѣненіемъ положенія изображенія въ повѣрительной трубѣ. Если изображеніе сдвинулось, то помощью особаго микрометрическаго винта повѣрительную трубу, а слѣдовательно и лимбъ, приводятъ опять въ прежнее положеніе; гдѣ такого винта не имѣется, тамъ въ окулярѣ зрительной трубы располагается микрометръ, нити котораго наводятся на изображеніе при каждомъ наведеніи главной трубы, т. е. замѣченное перемѣщеніе измѣряютъ и принимаютъ въ разсчетъ при вычисленіи. Повѣрительная труба приноситъ большую пользу, особенно при наблюденіяхъ съ высокихъ и не совсѣмъ прочныхъ тригонометрическихъ знаковъ; безъ нея отсчеты на движущемся вмѣстѣ съ основаніемъ лимбѣ никоимъ образомъ не могли бы давать точныхъ результатовъ (см. § 102).

Отъ дорожной тряски, перемѣнъ влажности и просто отъ неосторожнаго обращенія нити окулярной сѣтки иногда лопаются и, слѣдовательно, зрительныя трубы и микрометры становятся негодными для наведеній. Поэтому наблюдатель, отправляющійся въ мѣста, отдаленныя отъ научныхъ центровъ, и не желающій очутиться въ вынужденномъ бездѣйствіи, долженъ умѣть натягивать сѣтки самъ. Лучшія нити получаются не изъ паутины, сплетаемой для ловли мелкихъ насѣкомыхъ, а изъ коконовъ, въ которые пауки заключаютъ свои яички. Побуждаемые инстинктомъ и любовью къ будущему потомству, пауки выдѣляютъ для коконовъ чрезвычайно ровныя, тонкія и крѣпкія нити. Чтобы умертвить зародышей и растворить липкое вещество, препятствующее отдѣленію нитей, коконы кладутъ въ теплую воду и затѣмъ разматываютъ. Запасъ размотанныхъ коконовъ съ мелкими принадлежностями, необходимыми для натягиванія, каждый наблюдатель долженъ конечно, возить съ собою.

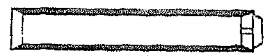
Діафрагму съ сѣткою легко вынуть изъ трубы, ослабивъ винты, которыми она укрѣплена въ окулярномъ колѣнѣ; точно также легко вынуть пластинку съ нитями изъ микрометра. Если сѣть состоитъ изъ многихъ нитей, то хотя оборвана или обвисла только одна, все же надо удалить всѣ нити, такъ какъ натянуть одну новую почти невозможно. Сперва удаляютъ всѣ старыя нити, снимая лакъ, которымъ онѣ были укрѣплены, просто ножемъ. Затѣмъ тщательно очищаютъ нарѣзки, сдѣланныя механикомъ въ мѣстахъ, гдѣ должны быть укрѣплены нити. Отдѣливъ изъ запаса нить, раза въ три длиннѣе, чѣмъ нужно, къ концамъ ея прикрѣпляютъ воскомъ кусочки свинца и погружаютъ ее въ теплую воду. Отъ этого нить вытягивается почти въ $1^1/_2$ раза и, будучи въ такомъ видѣ укрѣплена на мѣсто, не станетъ уже обвисать въ сырую погоду. Заготовляютъ обыкновенно сразу все потребное количество нитей (и даже больше, на случай порчи) и вѣшаютъ ихъ съ грузиками на станочекъ изъ двухъ горизонтальныхъ проволокъ. Затѣмъ, укрѣпивъ діафрагму неподвижно, въ горизонтальномъ положеніи, кладутъ на нее одну нить за другою, вправляя ихъ въ соотвѣтствующія нарѣзки иглой или остріемъ ножа. Когда всѣ нити положены правильно, на края ихъ, прилегающіе къ металлу, капаютъ лакомъ и даютъ высохнуть въ теченіи ночи. На другое утро концы съ грузиками обрѣзаютъ и діафрагму укрѣпляютъ на прежнее мѣсто.

За неимѣніемъ паутинныхъ нитей берутъ иногда тонкіе человѣческіе волосы и даже размотанныя шелковинки, но послѣднія не имѣютъ правильнаго вида, и не позволяютъ производить точныхъ наведеній. Къ тому же только паутинныя нити обладаютъ такою поразительною теплопрозрачностью, что при наведеніи трубы на Солнце, когда въ фокальной плоскости плавятся металлы, онѣ остаются невредимыми.

87. Уровни. Для приведенія отдѣльныхъ частей угломѣрныхъ инструментовъ въ опредѣленное положеніе относительно горизонтальной плоскости въ старину пользовались отвѣсомъ или сообщающимися сосудами съ водою; арабы судили о негоризонтальности астролябій по движенію въ ту или другую сторону воды, налитой на середину инструмента. Нынѣшніе уровни изобрѣтены хранителемъ Парижской библіотеки *Тевено* (1620—1692) около 1660 года; однако первые уровни были весьма несовершенны, дѣлались изъ простой цилиндрической трубки безъ внутренней шлифовки, и «пузырекъ» составляли не пары жидкости, а воздухъ. Только въ началѣ XIX вѣка механики *Репсольдъ*-дѣдъ (1771—1830), *Рейхенбахъ* (1772—1826) и *Эртель* (1778—1858) усовершенствовали изобрѣтеніе Тевено, стали наполнять уровни сѣрнымъ эфиромъ и придумали разные виды оправъ.

Въ настоящее время уровень представляетъ одинъ изъ удивительнѣйшихъ приборовъ, который не только даетъ возможность приводить отдѣльныя части инструментовъ въ горизонтальное или вертикальное положеніе, но служитъ и весьма точнымъ средствомъ для *измѣренія* небольшихъ угловъ наклоненія. Каждый уровень, независимо отъ оправы, есть цилиндрическаго вида стеклянная трубка, внутренній продольный разрѣзъ которой представляетъ дугу круга весьма большого радіуса; трубка наполнена сѣрнымъ эфиромъ, но не вполнѣ, и составляющіе пузырекъ пары жидкости, вслѣдствіе своей легкости, занимаютъ всегда наивысшее положеніе; когда трубка горизонтальна, пузырекъ занимаетъ ея середину.

Существующія въ продажѣ стеклянныя трубки весьма часто имѣютъ въ своихъ стѣнкахъ волосные сосуды, образовавшіеся при вытягиваніи трубки изъ почти неизбѣжныхъ въ стеклѣ пузырьковъ. Поэтому, при выборѣ трубокъ, надо прежде всего обращать вниманіе на чистоту стекла. Послѣ отрѣзки трубокъ требуемой длины, ихъ кладутъ въ воду и кипятятъ въ теченіи нѣсколькихъ часовъ; при этомъ, отъ расширенія газовъ въ упомянутыхъ волосныхъ сосудахъ, многія трубки лопаются. Оставшіяся служатъ для приготовленія уровней, и на наружной ихъ поверхности вырѣзаютъ алмазомъ или вытравляютъ фтористоводородною кислотою (покрывъ трубку предварительно воскомъ и сдѣлавъ на немъ черточки рѣзцомъ) поперечныя равноотстоящія черточки, по которымъ отсчитываютъ впослѣдствіи положеніе пузырька. Далѣе, придаютъ желаемую кривизну внутренней поверхности трубки шлифовкою сперва грубыми желѣзными круглыми напильниками, посыпаемыми наждакомъ, а потомъ стальными стержнями, имѣющими видъ удлиненной сигары съ едва замѣтною кривизною, посыпая ихъ порошкомъ пемзы. Шлифовка производится отъ руки и требуетъ отъ исполнителя большой опытности и терпѣнія. Готовую трубку закрываютъ съ одного конца, наполняютъ эфиромъ, кипятятъ его и, наконецъ, закрываютъ и съ другого конца. Закрытіе концовъ дѣлаютъ или при помощи паяльника, размягчая и вытягивая стекло, или же особыми стеклянными крышечками, затягиваемыми потомъ пузыремъ. Соприкасающіяся части крышечекъ и трубки предварительно вытачиваются по шаровой поверхности; одна крышечка сплошная, а другая имѣетъ по серединѣ отверстіе, закрываемое отдѣльною круглою пластинкою (черт. 121). Послѣдній, болѣе сложный способъ служитъ для большихъ и точныхъ уровней, потому что, при запаиваніи, стекло размягчается довольно далеко отъ концовъ и трубка можетъ получить неправильную кривизну. Однако именно въ уровняхъ съ крышечками эфиръ со временемъ испаряется, и тогда приходится вновь наливать его. Такъ какъ при инструментѣ не всегда имѣются запасные уровни, то наполненіе прежнихъ свѣжимъ эфиромъ долженъ умѣть дѣлать самъ наблюдатель; не лишне привести здѣсь описаніе этой довольно сложной операціи.



Черт. 121.

Сперва осторожно срѣзаютъ ножомъ края стараго пузыря, не стараясь однако отдирать его, и погружаютъ всю трубку въ воду, обыкновенной комнатной температуры. Хотя для новаго наполненія стараго уровня достаточно открыть только одинъ конецъ трубки, но всегда открываютъ оба, потому что неизвѣстно, черезъ который произошло испареніе эфира. По прошествіи сутокъ клей растворится, и стеклянныя крышечки обыкновенно сами выпадутъ изъ трубки, а оставшійся эфиръ выльется и замѣнится водою. Если же крышечки еще держатся, то надо стараться отдѣлить ихъ только давленіемъ пальцевъ, и вотъ почему важенъ упомянутый выше шарообразный видъ краевъ крышечекъ и концовъ трубки. Послѣ удаленія крышечекъ надо опять погрузить трубку въ воду, чтобы засохшій эфиръ не засорилъ стѣнокъ. Затѣмъ очищаютъ трубку отъ клея и грязи порошкомъ пемзы, полученнымъ треніемъ одного куска пемзы о другой; для этого наматываютъ вату на щепочку, смачиваютъ ее водой, валяютъ вату въ порошкѣ пемзы и осторожно водятъ нѣсколько разъ внутри трубки. Далѣе трубку промываютъ теплою водой и вытираютъ на сухо пропущенною винтообразно внутрь льняною тряпкой. Такимъ же образомъ очищаютъ и вытираютъ обѣ крышечки, которыя отнюдь не надо перемѣшать, потому что каждая изъ нихъ пригнана художникомъ къ своему концу трубки.

Рыбій клей, которымъ укрѣпляются крышечки и пузыри, продается въ видѣ неправильныхъ кусковъ, имѣющихъ продольное строеніе волоконъ; для облегченія размачиванія надо нарѣзать его мелкими кусочками поперекъ слоевъ. Такіе кусочки кладутъ въ маленькую чашечку, наливаютъ въ нее немного воды и ставятъ въ теплое мѣсто. Передъ самымъ склеиваніемъ чашечку подогрѣваютъ еще на спиртовой лампочкѣ и, по мѣрѣ надобности, клей берутъ щепочкою, избѣгая брать пѣнки и со дна чашечки, гдѣ скопляется грязь. Самое склеиваніе производится очень просто: по внутреннимъ краямъ концовъ трубки проводятъ щепочкою съ клеемъ, вкладываютъ крышечки и нажимаютъ ихъ непосредственно пальцами. На просыханіе надо тоже не менѣе сутокъ.

Только на третьи сутки можно наполнить трубку сѣрнымъ эфиромъ. Послѣдній наливается при помощи маленькой мѣдной воронки, вставляемой въ дырочку крышечки; наливать надо изъ небольшой стклянки, въ которой эфиръ принялъ комнатную температуру. Когда трубка наполнена почти до верху, дырочку закрываютъ пальцемъ и, положивъ уровень горизонтально, наблюдаютъ длину пузырька: послѣдній долженъ составлять около четверти длины трубки.

Кипяченіе эфира для удаленія изъ него и изъ трубки воздуха составляетъ самую трудную, опасную и непріятную работу. Кипятить нельзя ни въ теплой водѣ, какъ это дѣлается съ запаиваемыми уровнями, потому что тогда отстанетъ крышечка, ни на огнѣ, потому что трубка можетъ лопнуть. Необходимо нагрѣвать трубку просто руками, для чего ее держатъ вертикально поочередно то въ одной, то въ другой рукѣ, а свободную руку въ то же время нагрѣваютъ на пламени спиртовой лампочки. Руки надо мѣнять почаще. Вскорѣ появляются пузырьки, и эфиръ закипаетъ; температура его кипѣнія, какъ извѣстно, равна лишь 35° C. Тогда, не мѣшкая, обводятъ края крышечки клеемъ и щипчиками, а не пальцами (всегда жирными), надвигаютъ круглую пластинку, надавливаютъ ее снаружи и ставятъ приборъ сохнуть въ отвѣсномъ положеніи, прикрывъ сверху грузикомъ или нѣсколькими мѣдными монетами. Необходимо замѣтить, что если эфиръ долго не закипаетъ, то нельзя продолжать нагрѣваніе его, потому что онъ будетъ только расширяться, между тѣмъ какъ для удаленія воздуха нужно именно кипѣніе; тогда лучше наполнить трубку вновь холоднымъ эфиромъ. Въ крайнемъ случаѣ, если руки не даютъ достаточно тепла, приходится ограничиться сплошнымъ нагрѣваніемъ; когда эфиръ подымется отъ расширенія до самой крышечки, дырочку заклеиваютъ пластинкою, какъ объяснено выше, но это только въ крайнемъ случаѣ, т. е. послѣ нѣсколькихъ неудачныхъ попытокъ кипятить эфиръ.

Въ тотъ же день подготовляютъ пузырь для обклейки концовъ трубки. Обыкновенно берутъ рыбій или телячій пузырь, гладкій и безъ дыръ; вырѣзаютъ изъ него два кружка, діаметромъ примѣрно въ 4—5 разъ больше діаметра трубки, и кладутъ ихъ на 24 часа въ холодную воду. Больше сутокъ не слѣдуетъ ихъ держать въ водѣ, такъ какъ въ противномъ случаѣ пузырь сгніетъ.

На слѣдующій, четвертый день работы вымокшіе кружки пузыря вынимаютъ изъ воды и кладутъ между слоями тряпокъ такъ, чтобы кружки были только сыры и мягки. Затѣмъ концы уровня очищаютъ отъ жира наждачной бумагой и на ладонь лѣвой руки кладутъ кружокъ пузыря его наружной шероховатой поверхностью, чтобы его внутренняя гладкая поверхность охватила конецъ трубки. Далѣе, на середину кружка, при помощи щепочки, кладутъ большую каплю клея и, приложивъ конецъ трубки, начинаютъ осторожно притирать кружокъ отъ середины къ краямъ, слѣдя, чтобы между пузыремъ и стекломъ отнюдь не осталось воздуха и жидкаго клея. Это весьма важно, потому что излишняя влага способствуетъ размягченію клея и испаренію эфира. Если послѣ обвязки замѣчены будутъ пузырьки, то давленіемъ пальцевъ ихъ надо свести вмѣстѣ на середину крышечки, гдѣ они окажутся безвредными. Затѣмъ на конецъ трубки, начиная отъ самой крышечки, наматываютъ тонкій, но крѣпкій шнурокъ и при каждомъ его оборотѣ тянутъ пальцами и щипчиками края пузыря изъ подъ шнурка, чтобы пузырь, вытягиваясь, не образовалъ складокъ, а принялъ видъ сплошного колпачка. Наконецъ, шнурокъ накручиваютъ вторично, къ концу трубки и завязываютъ. Сдѣдавъ все это и съ другимъ концомъ трубки, ее опять кладутъ сохнуть на цѣлыя сутки.

На пятый день шнурокъ осторожно разматываютъ и когда убѣдятся, что пузыри пристали и клей высохъ, оставшіеся края пузырей тщательно срѣзаютъ, нажимая ножикъ постоянно отъ концовъ уровня къ его серединѣ. Обрѣзавъ все лишнее, проводятъ ножомъ по краямъ еще разъ, чтобы дать имъ правильную фигуру. Затѣмъ уровень обтираютъ сперва сырою, потомъ сухою тряпкою и покрываютъ части, занятыя пузыремъ, и немного дальше, бѣлымъ лакомъ изъ шеллака и спирта, для предохраненія отъ сырости.

88. Лимбы. Въ горизонтальные и вертикальные круги угломѣрныхъ инструментовъ впаяны лимбы, т. е. тонкія кольцевыя серебряныя пластинки съ черточками, нарѣзанными черезъ равные промежутки на дѣлительной машинѣ.

Дѣлительныя машины бываютъ двухъ системъ. Въ однѣхъ, изобрѣтенныхъ еще *Гукомъ* (1635—1703) въ 1674 г., круглое и вращающееся основаніе съ привинчивающимся къ нему будущимъ лимбомъ инструмента имѣетъ по наружному обводу винтовые зубцы, къ которымъ прилегаетъ тщательно сдѣланный микрометрическій винтъ съ большою головкой, раздѣленной на 100 или болѣе равныхъ частей; зная число зубцовъ на обводѣ основанія и число дѣленій на головкѣ микрометрическаго винта, легко разсчитать, сколькимъ такимъ дѣленіямъ соотвѣтствуетъ поворотъ основанія на извѣстный уголъ, напримѣръ на 1′. Въ другихъ, предложенныхъ герцогомъ *Шольнесъ* (1714—1769) въ 1765 г., самое основаніе машины, къ которому привинчивается будущій лимбъ, имѣетъ образцовый кругъ, раздѣленный, напримѣръ, черезъ 2′, и его черточки просто копируются на вновь приготовляемый; для этого имѣется микроскопъ съ микрометромъ, подъ нити котораго подводятся одна за другою черточки образцоваго круга при помощи винта, подобнаго упомянутому выше, но служащаго здѣсь не для измѣренія угла поворота, а только для вращенія круговъ.

Послѣ каждаго поворота на требуемый уголъ въ машинахъ первой системы, или послѣ подведенія подъ неподвижный микроскопъ требуемой черточки образцоваго круга въ машинахъ второй, художникъ, при помощи особаго механизма съ алмазнымъ концомъ, нарѣзываетъ черточку на изготовляемомъ лимбѣ. Этотъ механизмъ снабженъ автоматическимъ приспособленіемъ, позволяющимъ дѣлать черточки разной длины (черт. 122—124). Вслѣдствіе неизбѣжныхъ, хотя, разумѣется, ничтожныхъ шатаній оси оправы рѣзца и нѣкоторой гибкости механизма, рѣзецъ, идущій впередъ на подобіе плуга, вынимая стружку, подъ вліяніемъ случайныхъ неровностей или просто встрѣчая части металла разной твердости, можетъ уклоняться въ ту или другую сторону. Это обстоятельство, въ связи съ неточностями поворота вращающейся части дѣлительной машины или съ неточностью установки дѣленій образцоваго круга подъ нитями микроскопа, порождаетъ *случайныя ошибки* черточекъ, совершенно независимыя отъ ихъ взаимнаго разстоянія. Поперечный разрѣзъ черточекъ большихъ лимбовъ, вышедшихъ изъ мастерской знаменитаго механика *Репсольда*, обнаруживаетъ, что рѣзецъ не имѣетъ симметрическаго вида, а представляетъ фигуру неравнобедреннаго треугольника, такъ что всякое препятствіе въ металлѣ лимба уклоняетъ его постоянно въ одну сторону, отчего случайныя ошибки черточекъ должны быть конечно меньше, чѣмъ если бы рѣзецъ имѣлъ симметрическій видъ и могъ бы безразлично уклоняться и въ ту, и въ другую сторону; извѣстно, что случайныя ошибки черточекъ лимбовъ Репсольда рѣдко превосходятъ $0''.2$, что при діаметрѣ лимба въ 4 фута составляетъ линейную ошибку около $^1/_{40000}$ дюйма. Самъ Репсольдъ отрицаетъ впрочемъ намѣренную несимметрію своихъ рѣзцовъ и увѣряетъ, что малыя ошибки его лимбовъ происходятъ отъ совершенства его дѣлительной машины; однако алмазные рѣзцы, замѣнившіе прежніе стальные, по свойству кристалловъ этого вещества, имѣютъ всегда несимметрическія грани.

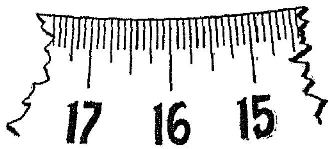
Кромѣ случайныхъ ошибокъ черточки лимба имѣютъ еще *ошибки систематическія*: начиная отъ первой, онѣ уклоняются отъ истиннаго положенія сперва въ одну, потомъ въ другую сторону по нѣкоторому закону. Систематическія ошибки черточекъ происходятъ отъ ошибокъ самого образцоваго круга, отъ несовпаденія центровъ раздѣляемаго и образцоваго круговъ, отъ постепеннаго притупленія рѣзца, отъ перемѣнъ температуры и другихъ обстоятельствъ, сопровождающихъ процессъ нарѣзки и могущихъ, не смотря на всѣ предосторожности, измѣнять взаимное положеніе частей всего механизма; необходимо знать, что процессъ нарѣзки продолжается дни и недѣли. Иные механики нарѣзаютъ сперва только главныя, градусныя черточки, а потомъ рѣжутъ промежуточныя, но такой порядокъ представляетъ свои неудобства и, какъ показываетъ опытъ, не уменьшаетъ ошибокъ. Систематическія ошибки черточекъ вообще больше случайныхъ и у Репсольда достигаютъ $2''$; замѣчено, что лимбы, изготовленные на той же дѣлительной машинѣ, имѣютъ почти одинаковыя систематическія ошибки.

Смотря по размѣрамъ круговъ и требуемой точности отсчетовъ, черточки на лимбахъ нарѣзаются черезъ 1°, черезъ $^1/_2{}^\circ$, черезъ $10'$, $5'$ и т. д. Круги самыхъ большихъ инструментовъ нарѣзаются даже черезъ $2'$, такъ что на ихъ окружности имѣется 10 800 черточекъ.

Послѣ черточекъ нарѣзаютъ цифры. На лимбахъ, отсчитываемыхъ микроскопами, надо имѣть подписи по чаще, такъ какъ въ ограниченномъ полѣ зрѣнія микроскопа видно лишь небольшое число черточекъ. Однако вслѣдствіе близости сосѣднихъ черточекъ нѣтъ никакой возможности вырѣзать соотвѣтствующее число подлѣ каждой; обыкновенно подписи рѣжутся только у черточекъ, представляющихъ полные градусы, черезъ 5° и даже черезъ 10°; значеніе всѣхъ прочихъ черточекъ узнается по ихъ длинѣ и по положенію относительно черточекъ, снабженныхъ подписями. На чертежѣ 122 изображена часть лимба, раздѣленнаго черезъ $4'$, причемъ подписанныя черточки представляютъ градусы, а длинныя не подписанныя $20'$ и $40'$. На чертежѣ 123 изображена часть лимба, раздѣленнаго черезъ $5'$, причемъ подписанныя черточки представляютъ опять градусы, самыя длинныя изъ неподписанныхъ $30'$, а слѣдующія $15'$ и $45'$. Наконецъ чертежъ 124 изображаетъ часть лимба, раздѣленнаго черезъ $10'$; здѣсь подписи имѣются только у десятковъ градусовъ; у черточекъ, соотвѣтствующихъ полнымъ пяткамъ, поставлены точки; длинныя черточки представляютъ градусы, среднія—полуградусы, а короткія—промежуточные десятки минутъ. Всегда легко сообразить названіе отдѣльной черточки; такъ, на черт. 124, черточка *a* есть 243°20′, а черточка *b* — 241°0′.

Подписи на лимбахъ гравируются обыкновенно отъ руки, но тогда онѣ выходятъ не совсѣмъ одинаковыми и въ микроскопы кажутся безобразными. Въ настоящее время начали пользоваться особымъ приборомъ, состоящимъ изъ стержня, вращающагося около шаровой насадки, располагаемой болѣе или менѣе близко къ изготовляемому лимбу; конецъ длиннаго плеча стержня водится по шаблонамъ съ вырѣзанными въ нихъ

Черт. 122.



Черт. 123.

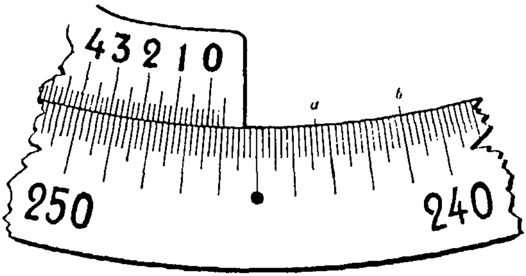
цифрами, а конецъ короткаго плеча, со вставленнымъ алмазомъ, рѣжетъ тѣ же цифры въ уменьшенномъ видѣ на лимбѣ, противъ соотвѣтствующей черточки: цифры получаются мелкія, однообразныя и красивыя.

Края вновь нарѣзанныхъ черточекъ и цифръ сглаживаются кусочкомъ угля грушеваго дерева, а въ самыя нарѣзки втирается черная краска изъ сажи и льняного масла.

89. Верньеры. Если бы на алидадномъ кругѣ имѣлась только одна черточка (индексъ или указатель), то наблюдатель, отсчитавъ ближайшую къ ней младшую черточку лимба, дробную часть промежутка долженъ бы былъ оцѣнить на глазъ, и такая оцѣнка, конечно, не могла бы дѣлаться съ достаточною точностью. Для достиженія большей точности отсчетовъ, по окружности алидаднаго круга, вмѣсто одиночныхъ, располагаютъ ряды черточекъ, называемые *верньерами*, по имени ихъ изобрѣтателя

Верньє (1580 — 1626) *). Для удобства отсчитыванія и для устраненія взаимнаго соприкосновенія, алидадный кругъ имѣетъ діаметръ нѣсколько меньшій внутренняго діаметра лимба, и притомъ оба круга лежатъ въ одной плоскости.

Теорія верньеровъ, какъ извѣстно, основана на свойствѣ глаза легко замѣчать совпаденіе или же относительное положеніе двухъ черточекъ, когда онѣ находятся почти на продолженіи одна другой и концы ихъ прикасаются. Разсмотримъ устройство



Черт. 124.

верньера для лимба, раздѣленнаго черезъ 10′ и съ точностью отсчетовъ въ 10″ (черт. 124). Число черточекъ n на верньерѣ опредѣляется по формулѣ

$$n = \frac{T}{T-t}$$

гдѣ T и t — промежутки между черточками на лимбѣ и на верньерѣ, такъ что $T-t$ есть точность верньера. Въ данномъ случаѣ $T = 10' = 600''$, а $T - t = 10''$, слѣдовательно $n = 60$, и потому дуга на верньерѣ, обнимающая 60 черточекъ, должна равняться промежутку въ 59 черточекъ лимба. Чтобы не утомлять наблюдателя счетомъ черточекъ, онѣ на верньерѣ сдѣланы разной длины, подобно тому, какъ и на лимбѣ, причемъ у 6-ой, 12-ой и пр. вырѣзано не $6.10'' = 60''$, $12.10'' = 120''$ и пр., а просто 1, 2 и т. д. На чертежѣ 124-омъ черточка верньера, совпадающая съ черточкою лимба, есть первая послѣ подписанной 1, поэтому, согласно теоріи верньера, нужно бы сосчи-

*) *Vernier*.—La construction, l'usage et les propriétés du quadrant nouveau de mathématiques. Bruxelles, 1631.

тать, которая это черточка отъ нуля верньера, полученное число умножить на $10''$ (точность верньера) и произведеніе прибавить къ $246^\circ 20'$, т. е. къ *наименованію ближайшей къ нулю верньера* младшей черточки лимба. Въ данномъ случаѣ совпадающая черточка на верньерѣ есть 7-я, и потому отсчетъ равенъ $246^\circ 20' + 7.10'' = 246^\circ 21' 10''$. Изъ расположенія подписей на верньерѣ видно, что такого вычисленія дѣлать не нужно, такъ какъ на верньерѣ совпадающая черточка есть $1'10''$, которыя и надо прибавить къ $246^\circ 20'$.

Вообще для отсчета верньера надо сперва замѣтить, между какими черточками лимба стоитъ нулевая черточка верньера (его нульпунктъ); затѣмъ должно слѣдовать глазомъ по направленію возрастающихъ подписей верньера и найти ту его черточку, которая лучше всѣхъ другихъ кажется совпадающею съ одною изъ черточекъ лимба. Отсчетъ равенъ наименованію ближайшей къ нульпункту младшей черточки лимба, сложенному съ наименованіемъ совпадающей черточки верньера.

Разность между промежутками черточекъ на лимбѣ и на верньерѣ такъ мала, что весьма часто наблюдатель затрудняется опредѣлить сразу, которая изъ черточекъ есть совпадающая; ему кажется, что двѣ или даже три рядомъ лежащія черточки одинаково хорошо совпадаютъ. Въ такихъ случаяхъ надо разсматривать сосѣднія черточки вправо и влѣво: совпадающею будетъ та, отъ которой расхожденія другихъ, въ обѣ стороны, идутъ симметрично. Если же расхожденія идутъ симметрично отъ двухъ одинаково хорошо совпадающихъ черточекъ, то берутъ ихъ среднее ариѳметическое. Такъ, если бы наблюдателю показалось, что черточки $40''$ и $50''$ одинаково хорошо совпадаютъ, то отсчетъ равенъ $45''$. Чтобы имѣть черточки по бокамъ даже тогда, когда совпадающія суть конечныя, на верньерѣ нарѣзаются двѣ или три черточки до первой и послѣ послѣдней. О существованіи этихъ *дополнительныхъ* черточекъ надо помнить: вмѣсто ближайшей младшей къ 0 верньера иногда ошибочно берутъ ближайшую младшую къ первой черточкѣ верньера.

Дѣленія лимба и верньера такъ мелки, что различать ихъ невооруженнымъ глазомъ почти невозможно, поэтому надъ верньерами располагаются *лупы*, держащіяся треніемъ въ оправахъ подвижныхъ ножекъ. Для усиленія освѣщенія къ алидадамъ, у самыхъ верньеровъ, придѣлываются *иллюминаторы*, въ видѣ наклонно поставленныхъ пластинокъ матоваго стекла. Передъ отсчетомъ необходимо поставить лупу «по глазу», вдвигая или выдвигая ее въ ея оправѣ. Лупа нетолько облегчаетъ отсчеты, но даетъ еще возможность производить ихъ съ бо́льшею точностью, потому что невольно заставляетъ наблюдателя смотрѣть на черточки всегда при одинаковомъ положеніи глаза, именно по перпендикуляру къ поверхности лимба. Это особенно важно, когда верньеры и лимбъ не составляютъ одной плоскости; при косвенномъ разсматриваніи совпадающими черточками кажутся не тѣ, что при нормальномъ, и отсчетъ будетъ ошибоченъ.

До наблюденій необходимо убѣдиться въ вѣрности верньеровъ, т. е. узнать, дѣйствительно ли n дѣленій каждаго изъ нихъ равно $n-1$ дѣленіямъ лимба. Для этого алидадный кругъ, при помощи микрометрическаго винта, ставятъ такъ, чтобы нулевая черточка изслѣдуемаго верньера совпала съ какою нибудь градусною черточкою лимба, и смотрятъ затѣмъ, совпадаетъ ли его n-ая черточка съ $n-1$-ой черточкой лимба (считая отъ стоящей противъ нулевой черточки верньера). Если такого совпаденія нѣтъ, то дѣлаютъ отсчетъ по верньеру и повторяютъ изслѣдованіе на разныхъ другихъ мѣстахъ лимба. Пусть, при десятисекундномъ верньерѣ, сдѣланные такимъ образомъ отсчеты были:

$$9^\circ 40'', \ 9^\circ 45'', \ 9^\circ 30'' \text{ и } 9' 45''$$

Въ среднемъ, вмѣсто $10'$, оказывается по верньеру только $9'45''$; слѣдовательно, къ каждому отсчету a надо прибавлять величину $\frac{a'}{10'} \cdot 15''$. Чтобы избѣжать вычисленій, составляютъ для даннаго случая слѣдующую табличку поправокъ отсчетовъ:

Отсчеты по верньеру	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′
Поправки	2″	3″	5″	6″	8″	9″	11″	12″	14″	15″

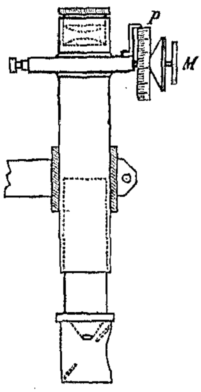
Напримѣръ, къ отсчету $4'30''$ надо придать $7''$, и исправленный отсчетъ будетъ $4'37''$.

90. Микроскопы. Для наблюденій большой точности вмѣсто верньеровъ располагаютъ микроскопы съ микрометрами. Повидимому, для увеличенія точности отсчетовъ слѣдовало бы только увеличить длину верньера, но тогда совпадающими казался бы цѣлый рядъ смежныхъ черточекъ верньера и лимба, и опредѣлить, какія именно суть наиболѣе совпадающія, было бы затруднительно; кромѣ того извѣстно, что и на самой лучшей дѣлительной машинѣ черточки не могутъ быть нарѣзаны черезъ совершенно равные промежутки, поэтому, при малой разности промежутковъ на верньерѣ и на лимбѣ, могло бы случиться, что совпадающими представились бы нѣсколько черточекъ, между которыми оказались бы черточки, расходящіяся въ ту или другую сторону. Наконецъ верньеры представляютъ еще одно чисто практическое неудобство. При каждомъ лимбѣ имѣется обыкновенно не одинъ, а два и болѣе верньеровъ; если при отсчетѣ перваго сдѣланъ промахъ, положимъ въ 10′, то наблюдатель почти всегда дѣлаетъ тотъ же промахъ при отсчетѣ другихъ; вообще, наблюдатель склоненъ повторять на другихъ верньерахъ отсчетъ, сдѣланный по первому. Эти неудобства устраняются при отсчитываніи лимба помощью микроскоповъ съ микрометрами. Ими давно пользуются для отсчитыванія лимбовъ большихъ астрономическихъ приборовъ, но съ середины XIX вѣка лучшіе механики нашли возможнымъ примѣнить ихъ и къ самымъ малымъ переноснымъ инструментамъ.

Микрометры для измѣренія малыхъ промежутковъ въ полѣ зрительныхъ трубъ изобрѣтены независимо въ Англіи *Гаскойномъ* (1621—1644) и во Франціи *Озу* (1640—1691); польза же соединенія ихъ съ микроскопами для отсчитыванія лимбовъ хотя и была указана еще знаменитымъ датскимъ астрономомъ *Рёмеромъ* (1644—1710), но самое соединеніе осуществлено было впервые лишь въ концѣ XVIII вѣка *Рамсденомъ*.

Въ инструментахъ, снабженныхъ микроскопами, вовсе нѣтъ алидаднаго круга, треніе котораго о лимбъ, при вращеніи алидады, увлекаетъ за собою и самый лимбъ. Микроскопы привинчиваются къ особымъ выступамъ, составляющимъ одно цѣлое съ лагерными стойками, причемъ оптическія оси микроскоповъ должны быть, конечно, перпендикулярны къ плоскости лимба.

На чертежѣ 125 изображенъ общій видъ микроскопа, а на черт. 118—подробности устройства микрометра. Внутри микроскопа въ общемъ фокусѣ объектива и окуляра получается обратное и увеличенное изображеніе нѣсколькихъ черточекъ лимба. Въ этомъ же мѣстѣ, перпендикулярно къ оси микроскопа, движется пара нитей, укрѣпленныхъ на рамочкѣ микрометра. Рамочка передвигается при вращеніи микрометрическаго винта M, причемъ положеніе нитей отсчитывается: полное число оборотовъ винта по зубцамъ неподвижной гребенки, а части оборота на барабанѣ P, по особому указателю. Чтобы ослабить вредное вліяніе мертваго хода винта, внутри коробки микрометра расположена пружинка. Для сосредоточенія свѣта на разсматриваемыя черточки лимба, къ нижней, объективной части микроскопа (черт. 125) придѣланъ иллюминаторъ въ видѣ кольцеобразной бѣлой гипсовой пластинки, наклоненной къ оси микроскопа подъ угломъ въ 45°; трубочка иллюминатора свободно вращается, и окно ея, при наведеніи микрометра, надо поворачивать къ свѣту. Передъ наблюденіемъ необходимо поставить окулярную трубочку микроскопа «по глазу», чтобы нити были рѣзко видны.



Черт. 125.

Размѣры и увеличеніе микроскопа, а также величина хода микрометрическаго винта разсчитаны такъ, что для передвиженія рамочки съ нитями отъ изображенія одной черточки лимба къ изображенію смежной, микрометрическій винтъ надо повернуть на полное число оборотовъ; при этомъ, когда 0 барабана стоитъ противъ указателя, то нити располагаются противъ острія зубца гребенки. Средній зубецъ гребенки означенъ дырочкою (черт. 118) или другимъ образомъ и называется *нульпунктомъ микрометра;* этотъ зубецъ указываетъ положеніе нитей, когда онѣ находятся въ оптической оси микроскопа. Дѣленія на барабанѣ означены такъ, что когда, при вращеніи винта, подъ указатель подходятъ дѣленія съ постепенно возрастающими подписями, то нити микрометра передвигаются отъ старшихъ черточекъ лимба къ младшимъ, какъ онѣ кажутся въ микроскопѣ, т. е. въ обратномъ видѣ. Поэтому, когда нити микрометра наведены на ближайшую къ нульпункту младшую черточку лимба, то отсчетъ гребенки по зубцамъ и барабана по указателю представляетъ угловое разстояніе нульпункта отъ этой черточки, выраженное въ дѣленіяхъ барабана.

Такимъ образомъ, отсчитать лимбъ микроскопомъ значитъ навести нити микрометра на ближайшую къ нульпункту младшую черточку лимба и къ названію этой черточки придать отсчетъ по гребенкѣ и по барабану. Пусть, напримѣръ, лимбъ раздѣленъ черезъ $10'$, зубцы гребенки расположены черезъ $5'$, барабанъ раздѣленъ на 30 частей и нити микрометра наведены на черточку $247°20'$; если при этомъ нити стоятъ между первымъ и вторымъ зубцами гребенки, а отсчетъ по барабану равенъ 22.3, то полный отсчетъ будетъ $247°20' + 1$ оборотъ $+ 22\overset{c}{.}3$. Но одинъ оборотъ равенъ $5'$, а $22\overset{c}{.}3$ есть $223''$ $\left(\text{ибо } \frac{5'}{30} = 10''\right)$, слѣдовательно отсчетъ будетъ $227°28'43''$. Чтобы не дѣлать каждый разъ перемноженій, дѣленія на барабанѣ (для даннаго устройства лимба и микрометра) означены соотвѣтствующими цифрами и, для облегченія отсчетовъ, черточки имѣютъ различную длину. Повторяя наведенія на ту же черточку или на сосѣднюю, можно, не утомляя глазъ, увеличивать точность отсчетовъ. Когда наблюдатель наводитъ нити микрометра на черточки лимба, то онъ, конечно, не видитъ дѣленій барабана; поэтому послѣдующій отсчетъ по барабану дѣлается вполнѣ безпристрастно, и ошибка по одному микроскопу не можетъ повлечь за собою подобной же ошибки по другимъ.

Прежде чѣмъ пользоваться инструментомъ съ микроскопами, необходимо опредѣлить цѣну дѣленій барабана микрометра. Для этого нужно навести нити послѣдовательно на двѣ смежныя черточки лимба и, помимо соотвѣтствующихъ отсчетовъ по барабану, замѣтить, сколько оборотовъ сдѣлано винтомъ. Цѣна дѣленія равняется частному отъ раздѣленія углового промежутка между смежными черточками лимба на число оборотовъ и дѣленій барабана. Пусть, напримѣръ, лимбъ раздѣленъ черезъ $10'$; при наведеніи нитей на одну, а потомъ на другую смежную ей черточку лимба барабанъ сдѣлалъ два полныхъ оборота; самъ онъ раздѣленъ на 30 частей. Цѣна одного дѣленія барабана (τ) равна въ данномъ случаѣ:

$$\tau = \frac{10'}{2.30} = \frac{600''}{60} = 10''$$

Въ разныхъ инструментахъ цѣна дѣленія барабана бываетъ весьма разнообразна. Если лимбъ раздѣленъ черезъ $4'$, а для передвиженія нитей съ одной черточки на другую надо сдѣлать 4 полныхъ оборота микрометра, причемъ барабанъ раздѣленъ на 60 частей, то $\tau = \frac{4'}{4.60} = 1''$. Если оцѣнивать на глазъ десятыя доли дѣленій барабана, то такимъ микроскопомъ можно отсчитывать углы до $0''.1$. Иногда для такихъ же лимбовъ, т. е. дѣленныхъ черезъ $4'$, микрометрическіе винты микроскоповъ устроены такъ, что одинъ оборотъ винта соотвѣтствуетъ не $1'$, а $2'$, и, слѣдовательно, если барабанъ раздѣленъ на 60 частей, то τ составляетъ не $1''$, а $2''$. Если лимбъ отсчитывается по двумъ противолежащимъ микроскопамъ, то такая система имѣетъ извѣстныя преимущества, потому что для полученія средняго изъ отсчетовъ по двумъ микрометрамъ нужно брать потомъ не полусумму, а просто сумму отсчетовъ.

Выше сказано, что для перевода отсчетовъ на барабанѣ микрометра въ угловую величину, т. е. въ минуты и секунды, необходимо знать цѣну дѣленія барабана, т. е. угловую величину перемѣщенія нитей микрометра при поворотѣ микрометрическаго винта на одно дѣленіе его барабана. Тутъ, конечно, предполагается, что черточки на лимбѣ нарѣзаны такъ часто, что двѣ сосѣднія, безъ чувствительной погрѣшности, можно считать параллельными. Для полученія цѣны дѣленія барабана наводятъ нити микрометра нѣсколько разъ послѣдовательно на двѣ сосѣднія черточки, видимыя въ серединѣ поля зрѣнія микроскопа, и производятъ отсчеты по барабану. Механики устанавливаютъ микроскопы и разсчитываютъ величину хода винта такъ, чтобы при этомъ отсчеты были одинаковы, т. е. чтобы, при передвиженіи нитей отъ одной черточки къ сосѣдней, микрометрическій винтъ сдѣлалъ полное число оборотовъ. Какъ бы тщательно инструментъ ни былъ сдѣланъ, однако вслѣдствіе неполной перпендикулярности вертикальной оси вращенія къ плоскости лимба, отъ существованія эксцентриситета *), отъ ошибокъ черточекъ, отъ перемѣнъ температуры, разстройства инструмента отъ неизбѣжныхъ при перевозкѣ сотрясеній, наконецъ просто отъ ошибокъ отсчетовъ, отсчеты микрометра, при наведеніи на двѣ сосѣднія черточки лимба, вообще говоря, не будутъ одинаковы, и потому, для достиженія наибольшей точности, наблюдатель долженъ 1) самъ опредѣлять время отъ времени цѣну дѣленія микрометра и исправлять ее, или же 2) вводить въ отсчеты соотвѣтствующія поправки.

1) Для измѣненія цѣны дѣленій барабана нужно ослабить винты, которыми укрѣпленъ микроскопъ, и двигать его въ направленіи оси. Послѣ каждаго такого передвиженія утрачивается ясность изображенія черточекъ; поэтому затѣмъ надо еще отдѣльно вдвигать или выдвигать объективную трубочку микроскопа. Если разстояніе между изображеніями двухъ смежныхъ черточекъ оказывается бо̀льшимъ, чѣмъ нужно, т. е. если при послѣдовательномъ наведеніи нитей на двѣ сосѣднія черточки барабанъ поворачивается больше, чѣмъ слѣдуетъ ($b < a$, смотри ниже), то надо весь микроскопъ передвинуть къ лимбу, а самый объективъ отъ него отодвинуть (вдвинуть въ трубку микроскопа); въ противномъ случаѣ, т. е. если разстояніе между изображеніями двухъ смежныхъ черточекъ слишкомъ мало ($b > a$), весь микроскопъ слѣдуетъ отодвинуть отъ лимба, а объективъ его, наоборотъ, придвинуть къ нему (выдвинуть изъ трубки). Такъ какъ достигнуть сразу точной установки невозможно, то слѣдуетъ отмѣчать положенія трубочекъ микроскопа нарѣзками ножомъ; послѣ изслѣдованія цѣны при двухъ положеніяхъ, величину слѣдующаго передвиженія легко вычислить по пропорціи. Передвиженія надо дѣлать съ крайнею осторожностью и понемногу; послѣ окончательной установки

*) Эти двѣ причины, измѣняя отсчеты по каждому микроскопу отдѣльно, не вліяютъ на среднее изъ отсчетовъ по всѣмъ микроскопамъ.

необходимо убѣдиться въ отсутствіи параллакса питей и повѣрить, остались ли нити микрометра параллельными изображеніямъ черточекъ. Непараллельность исправляется вращеніемъ всей трубки микроскопа около его оси, ослабивъ вновь винты обоймицъ.

2) Пусть ходъ винта почти равенъ разстоянію между изображеніями двухъ сосѣднихъ черточекъ лимба, и, при наведеніи нитей на ближайшую къ нульпункту младшую черту лимба, получился на барабанѣ отсчетъ a, а при наведеніи на ближайшую старшую—отсчетъ b, близкій, но не равный a. Если промежутокъ, въ секундахъ, между двумя сосѣдними черточками на лимбѣ равенъ m'', а число дѣленій барабана n, то при передвиженіи нитей на m'', барабанъ, очевидно, повернется на $(a+n)-b$ дѣленій, такъ что цѣна одного дѣленія барабана τ (въ секундахъ) выразится дробью:

$$\tau = \frac{m}{a+n-b} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{b-a}{n}}$$

Ограничиваясь, по малости дроби $\frac{b-a}{n}$, первымъ членомъ разложенія по биному Ньютона, можно положить

$$\tau = \frac{m}{n}\left(1+\frac{b-a}{n}\right)$$

или, называя для краткости $\frac{m}{n}$ черезъ τ_0,

$$\tau = \tau_0\left(1+\frac{b-a}{n}\right) \tag{52}$$

Одна пара наведеній, вслѣдствіе неизбѣжныхъ ошибокъ наведеній, не дастъ, конечно, величину τ съ достаточною точностью; для этого необходимо произвести много наблюденій на различныхъ мѣстахъ лимба. Въ среднемъ выводѣ величина τ получится, конечно, точнѣе.

Итакъ, величина τ получается по формулѣ (52). Каждый отсчетъ a по одной нити слѣдуетъ умножать на величину τ и потому:

$$a\tau = a\tau_0\left(1+\frac{b-a}{n}\right)$$

Необходимо однако замѣтить, что спеціальное изслѣдованіе цѣны дѣленій барабана дѣлается только для неподвижныхъ инструментовъ постоянныхъ обсерваторій; въ переносныхъ же инструментахъ, назначаемыхъ для тріангуляцій, опредѣленіе цѣны дѣленій разъ навсегда не можетъ улучшать отсчетовъ, и именно потому, что, въ сущности говоря, на разныхъ мѣстахъ лимба величина τ различна и кромѣ того она можетъ измѣняться со временемъ отъ тряски при перевозкахъ инструмента. Гораздо цѣлесообразнѣе, для увеличенія точности наблюденій и отчасти просто для повѣрки, при каждомъ отсчитываніи микрометра наводить его нити не на одну черточку (ближайшую младшую), а на двѣ смежныя (младшую и старшую). Отъ этого каждая пара отсчетовъ дастъ свою величину цѣны деленія барабана, и ею надо затѣмъ исправлять каждое среднее изъ отсчетовъ по обѣимъ черточкамъ.

Такимъ образомъ, среднее изъ отсчетовъ при наведеніи нитей на двѣ сосѣднія черточки лимба выразится формулою:

$$\frac{a+b}{2}\tau_0\left(1+\frac{b-a}{n}\right)$$

Примѣры: 1) Лимбъ раздѣленъ черезъ 10′, и для перехода съ одной черточки на другую микрометрическій винтъ дѣлаетъ 2 оборота; барабанъ раздѣленъ на 30 частей.

Здѣсь стало быть $m''=600''$, $n=60$ и $\tau_0=10''$

Отсчеты были:

		δ
на черточку	15° 20′	0 + 20.5
„ „	15° 30′	20.9
	въ среднемъ . . .	20.7

Исправленное среднее равно $20.7\times 10''\left(1+\frac{0.4}{60}\right)=208''.4$

и окончательный отсчетъ равенъ $15°\,23'\,28''.4$

2) Лимбъ раздѣленъ на 4′, и для перехода отъ одной черточки къ другой винтъ дѣлаетъ 2 оборота; барабанъ раздѣленъ на 60 частей. Здѣсь $m''=240''$, $n=120$ и $\tau_0=2''$

		∂
Отсчетъ на черточку	$227°24'$ былъ . . .	$1 + 43.7$
» » »	$227°28'$ » . . .	$1 + 41.3$
	Въ среднемъ . .	$1 + 42.5$

Исправленное среднее есть $102.5 \times 2'' \left(1 - \frac{2.4}{120}\right) = 200''.9$

и окончательный отсчетъ равенъ $227°27'20''.9$

Нѣкоторые наблюдатели справедливо считаютъ, что цѣну дѣленія барабана надо выводить не изъ каждой пары отсчетовъ отдѣльно, а однажды, какъ среднее изъ совокупности всѣхъ отсчетовъ на данной тригонометрической точкѣ. Въ такомъ случаѣ вычисленіе по формулѣ (52) оказывается проще, и для опредѣленія поправокъ можно составить удобную табличку *).

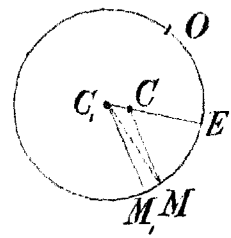
Отсчеты микрометра подвержены еще ошибкамъ отъ эксцентриситета барабана и отъ неправильностей нарѣзки винта. Для исключенія эксцентриситета барабана микрометры нѣкоторыхъ инструментовъ снабжаются двумя парами нитей, расположенными на разстояніи $1^1/_2$ или $2^1/_2$ оборотовъ винта, причемъ, конечно, отсчеты по второй парѣ нитей должно уменьшать на половину числа дѣленій на барабанѣ. Изслѣдованіе же поступательныхъ и періодическихъ ошибокъ микрометрическаго винта, требуя много времени и даже особыхъ приспособленій, не приноситъ обыкновенно ожидаемой пользы; введеніе поправокъ усложняетъ вычисленіе, а самыя поправки въ винтахъ, выходящихъ изъ рукъ лучшихъ механиковъ, оказываются почти всегда меньше случайныхъ ошибокъ наведеній.

91. Эксцентриситетъ алидады. Отсчетъ верньера или микрометра микроскопа указалъ бы истинное направленіе визирной линіи лишь въ томъ случаѣ, если бы вертикальная ось инструмента проходила точно черезъ центръ лимба; на самомъ дѣлѣ, при всемъ искусствѣ механиковъ, вертикальная ось имѣетъ обыкновенно эксцентрическое положеніе, и потому одиночный отсчетъ по лимбу не совсѣмъ вѣренъ.

---

*) См. *Витрамъ*. Объ отсчетахъ круговъ помощью микроскоповъ (Зап. В. Т. О. Главнаго Штаба, Часть LIV, 1897).

Пусть C (черт. 126) изображаетъ центръ вращенія алидады, т. е. пересѣченіе вертикальной оси инструмента съ плоскостью лимба, а C_1 — центръ самого лимба, дѣленія котораго возрастаютъ по направленію движенія часовой стрѣлки и на которомъ черточка $0°$ расположена въ O. Назовемъ линейную величину эксцентриситета, т. е. разстояніе CC_1 черезъ e, радіусъ лимба черезъ R, отсчетъ по лимбу, при наведеніи трубы на нѣкоторый предметъ, черезъ M, а отсчетъ, соотвѣтствующій направленію съ C_1 на C—черезъ E. Величина эксцентриситета e обыкновенно столь незначительна (не болѣе 0,001 дюйма), а разстояніе до наблюдаемыхъ предметовъ такъ велико, что если совмѣстить C съ C_1, то истинный отсчетъ былъ бы M_1, причемъ C_1M_1 параллельно CM. Дуга MM_1 или уголъ MC_1M_1, который назовемъ черезъ ΔM, представитъ поправку отсчета отъ вліянія эксцентриситета. Въ треугольникѣ MCC_1 имѣемъ:



Черт. 126.

$$\frac{\sin CMC_1}{\sin MCE} = \frac{CC_1}{MC_1} = \frac{e}{R}$$

но уголъ $CMC_1 = \angle MC_1M_1 = \Delta M$, а замѣняя по малости его $\sin \Delta M$ черезъ $\frac{\Delta M''}{\varkappa}$, получимъ

$$\Delta M'' = \varkappa \cdot \frac{e}{R} \cdot \sin (M - E) \tag{53}$$

Если бы величины e и E были извѣстны, то поправку $\Delta M''$ каждаго отсчета M легко было бы вычислить; но названныя величины во первыхъ неизвѣстны, а во вторыхъ могутъ мѣняться отъ неизбѣжнаго шатанія вертикальной оси. Однако ошибка каждаго отсчета вовсе исключается тѣмъ, что отсчеты дѣлаются не по одному верньеру или микроскопу, а по двумъ или нѣсколькимъ, расположеннымъ на равныхъ промежуткахъ. Когда имѣется только два верньера или микроскопа, то они располагаются по концамъ одного діаметра, т. е. на разстояніи 180°; когда имѣется три, то черезъ 120°, четыре—черезъ 90° и т. д.

Въ случаѣ двухъ верньеровъ или микроскоповъ исправленные отсчеты будутъ:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{по I-му} & M + \varkappa \cdot \frac{e}{R} \sin (M - E) \\ \text{по II-му} & M_1 + \varkappa \cdot \frac{e}{R} \sin (M_1 - E) \end{array}\right\} \qquad (53^*)$$

среднее изъ двухъ равно

$$\frac{M + M_1}{2} + \varkappa \frac{e}{2R} \left\{ \sin (M - E) + \sin (M_1 - E) \right\}$$

но такъ какъ $M_1 = M + 180^\circ$, то второй членъ равенъ нулю, и, слѣдовательно, среднее изъ двухъ отсчетовъ свободно отъ ошибки за эксцентриситетъ алидады.

Вообще при n верньерахъ или микроскопахъ, расположенныхъ черезъ $\frac{360^\circ}{n}$, исправленные отсчеты будутъ:

по I-му . . . . $M + \varkappa \cdot \frac{e}{R} \sin (M - E)$

по II-му. . . . $M_1 + \varkappa \cdot \frac{e}{R} \sin \left(1 \cdot \frac{360}{n} + M - E\right)$

по III-му . . . $M_{11} + \varkappa \cdot \frac{e}{R} \sin \left(2 \cdot \frac{360}{n} + M - E\right)$

. . . .

по n-му . . . $M_{n-1} + \varkappa \cdot \frac{e}{R} \sin \left((n - 1) \cdot \frac{360}{n} + M - E\right)$

и среднее изъ нихъ равно:

$$\frac{M + M_1 + M_{11} + \ldots + M_{n-1}}{n} + \varkappa \frac{e}{nR} \sum \sin \left(k \cdot \frac{360}{n} + M - E\right)$$

Но сумма синусовъ кратныхъ дугъ равна нулю *), слѣдовательно, когда отсчеты сдѣланы по нѣсколькимъ верньерамъ

---

*) Для доказательства вообразимъ правильный многоугольникъ съ n сторонами (черт. 127); каждый внѣшній уголъ этого многоугольника равенъ $\frac{360^\circ}{n}$. Если проектировать всѣ стороны многоугольника на ось X-овъ и назвать уголъ, составленный какою нибудь стороною съ осью $У$-овъ,

или микроскопамъ, симметрично расположеннымъ по окружности лимба, то среднее изъ всѣхъ отсчетовъ свободно отъ ошибокъ за эксцентриситетъ алидады.

При выводѣ средняго изъ отсчетовъ по нѣсколькимъ верньерамъ или микроскопамъ берутъ обыкновенно среднее только изъ минутъ и секундъ, градусы же пишутъ лишь по первому.

Примѣры: 1) отсчитано I . . . . $37°\,27'\,40''$
„ II . . . . $217°\,27'\,30'' - 180°$

среднее $= 37°\,27'\,35''$

2) отсчитано I . . . . $25°\,37'\,42.''3$
„ II . . . . $145°\,37'\,31.''5 - 120°$
„ III . . . . $265°\,37'\,35.''4 - 240°$

среднее $= 25°\,37'\,36.''4$

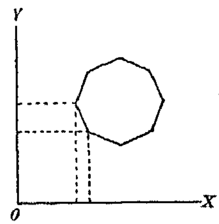
Въ полевыхъ журналахъ градусы отсчетовъ записываются только по I-му верньеру или микроскопу, по прочимъ же записываются однѣ минуты и секунды.

черезъ α, то углы, составленные всѣми прочими, будутъ $1 \cdot \frac{360}{n} + \alpha$, $2 \cdot \frac{360}{n} + \alpha \ldots$, вообще $k \cdot \frac{360}{n} + \alpha$. Но сумма проекцій замкнутаго многоугольника на любую ось равна нулю, слѣдовательно, по равенству сторонъ правильнаго многоугольника, получимъ:

$$\sum sin\left(k \cdot \frac{360}{n} + \alpha\right) = 0$$

Точно также, проектируя всѣ стороны многоугольника на ось Y-овъ, получимъ:

$$\sum cos\left(k \cdot \frac{360}{n} + \alpha\right) = 0$$



Черт. 127.

Соединивъ вершины многоугольника черезъ одну, легко показать, что

$$\frac{1}{2}\sum sin\, 2\, k\, \frac{360}{n} = \sum cos\, k\, \frac{360}{n} \cdot cos\, k\, \frac{360}{n} = 0$$

Кромѣ того, такъ какъ вообще

$$sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\, 2\, x) \text{ и } cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\, 2\, x)$$

то

$$\sum sin^2\, k\, \frac{360}{n} = \sum cos^2\, k\, \frac{360}{n} = \frac{n}{2}$$

Устройство нѣсколькихъ верньеровъ или микроскоповъ, расположенныхъ симметрично по окружности лимба, помимо только что объясненнаго исключенія ошибокъ отъ эксцентриситета, имѣетъ еще и другую цѣль—ослабить вліяніе ошибокъ черточекъ лимба и ошибокъ самихъ отсчетовъ: среднее изъ двухъ или многихъ независимыхъ отсчетовъ всегда точнѣе одиночнаго отсчета, а такъ какъ отсчеты производятся на разныхъ черточкахъ лимба, то, очевидно, при этомъ уменьшается и вліяніе ошибокъ черточекъ. Въ большинствѣ угломѣрныхъ инструментовъ, вышедшихъ изъ рукъ русскихъ и нѣмецкихъ механиковъ, имѣется два или четыре верньера или микроскопа; въ первомъ случаѣ они расположены черезъ 180°; во второмъ черезъ 90°. Въ инструментахъ же англійскихъ и американскихъ механиковъ дѣлаютъ три микроскопа, расположенные черезъ 120°, и такое расположеніе имѣетъ существенное преимущество: среднее изъ отсчетовъ по тремъ микроскопамъ точнѣе средняго изъ отсчетовъ по четыремъ. Это объясняется тѣмъ обстоятельствомъ, что каждый пріемъ наблюденій (см. § 98) состоитъ изъ наблюденій при двухъ положеніяхъ верхней части инструмента: при кругѣ право и кругѣ лѣво. Въ второмъ положеніи каждый микроскопъ оказывается надъ черточкою, діаметрально противоположною той, надъ которой онъ стоялъ въ первомъ положеніи. Поэтому при четырехъ микроскопахъ, расположенныхъ черезъ 90°, всѣ восемь отсчетовъ полнаго пріема, при наведеніяхъ на какой нибудь предметъ, основываются только на четырехъ черточкахъ лимба; при трехъ же микроскопахъ, расположенныхъ черезъ 120°, отсчеты при второмъ положеніи производятся на другихъ черточкахъ, и всѣ шесть отсчетовъ дѣлаются на шести различныхъ черточкахъ. Такимъ образомъ, въ смыслѣ ослабленія вліянія ошибокъ черточекъ лимба, среднее изъ такихъ шести отсчетовъ оказывается точнѣе, чѣмъ среднее изъ восьми отсчетовъ по четыремъ микроскопамъ, а шесть отсчетовъ конечно требуютъ меньше времени, чѣмъ восемь.

Если наблюдатель беретъ новый, не бывшій еще въ употребленіи инструментъ, то полезно произвести опредѣленіе эксцентриситета алидады, а равно опредѣлить, дѣйствительно ли верньеры или микроскопы установлены почти на равныхъ промежуткахъ. Такое изслѣдованіе производится при помощи ряда отсчетовъ, между которыми алидада поворачивается послѣдовательно на кратные углы. Положимъ, что инструментъ снабженъ двумя верньерами. Отсчеты ихъ представляются выраженіями (53*), разность которыхъ заключаетъ три неизвѣстныя: разстояніе между верньерами и упомянутыя выше двѣ величины e и E. Называя разность отсчетовъ по двумъ діаметрально-противоположнымъ верньерамъ черезъ m, а величину $M_1 - M$, т. е. угловое разстояніе между верньерами, черезъ k, изъ каждой пары отсчетовъ получимъ уравненіе

$$m = k + \varkappa\frac{e}{R}\{sin(M_1 - E) - sin(M - E)\}$$

но такъ какъ M_1 почти равно $M + 180^\circ$, то, по малости второго члена, это уравненіе можно замѣнить черезъ

$$m = k - 2\varkappa\frac{e}{R}sin(M - E)$$

или

$$m = k - 2\varkappa\frac{e}{R}sin\,M\,cos\,E + 2\varkappa\frac{e}{R}\cdot cos\,M\,sin\,E$$

Полагая для краткости

$$\left.\begin{aligned} 2\varkappa\frac{e}{R}\cdot cos\,E &= x \\ 2\varkappa\frac{e}{R}\cdot sin\,E &= y \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

получимъ наконецъ:

$$m = k - x.\,sin\,M + y.\,cos\,M \qquad (55)$$

Если сдѣланъ цѣлый рядъ отсчетовъ по обоимъ верньерамъ, причемъ они переставлялись приблизительно на кратныя части окружности лимба, то рѣшеніе группы уравненій вида (55) по способу наименьшихъ квадратовъ не представляетъ затрудненій, а когда найдены величины k, x и y, то изъ уравненій (54) легко вычислить и остальныя искомыя величины e и E.

Въ первыхъ двухъ столбцахъ нижеслѣдующей таблицы приведены отсчеты по двумъ верньерамъ малаго универсала работы *Брауера* (1816 — 1882); третій столбецъ представляетъ разность двухъ первыхъ, т. е. величины m.

I	II	m
$0^\circ 3' 50''$	$180^\circ 3' 55''$	$180^\circ + 5''$
30 2 20	210 2 30	+ 10
60 6 35	240 6 45	+ 10
90 3 0	270 2 50	— 10
120 5 25	300 5 0	— 25
150 1 5	330 0 30	— 35
180 5 0	0 4 20	— 40
210 2 15	30 1 30	— 45
240 8 10	60 7 40	— 30
270 6 5	90 5 30	— 35
300 1 40	120 1 30	— 10
330 0 55	150 1 5	+ 10

Составивъ уравненія вида (55) для всѣхъ 12-ти группъ отсчетовъ и сложивъ ихъ, получимъ

$$\Sigma m = 12\,k - x.\,\Sigma \sin M + y.\,\Sigma \cos M$$

а умноживъ ихъ сперва на коэффиціенты у x, а потомъ на коэффиціенты у y и сложивъ, получимъ

$$\Sigma m \sin M = k.\,\Sigma \sin M - x.\,\Sigma \sin^2 M + y.\,\Sigma \sin M.\cos M$$

$$\Sigma m \cos M = k.\,\Sigma \cos M - x.\,\Sigma \sin M.\cos M + y.\,\Sigma \cos^2 M$$

Эти формулы, на основаніи выраженій, доказанныхъ въ выноскѣ на стр. 295, обращаются въ

$$\Sigma m = n\,.\,k$$

$$\Sigma m \sin M = -\frac{n}{2}\cdot x$$

$$\Sigma m \cos M = +\frac{n}{2}\cdot y$$

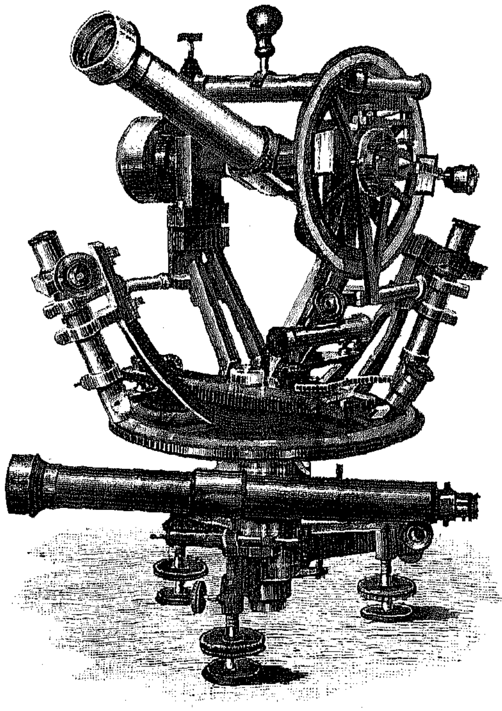
Подставляя сюда числовыя значенія изъ предъидущей таблицы, получаемъ:

$$k = 180^\circ - 16''.3 \qquad x = -8''.61 \qquad y = +26''.52$$

$$E = 108^\circ \qquad \frac{e}{R} = 0.00007$$

и такъ какъ радіусъ лимба разсматриваемаго инструмента равенъ 3^d, то величина e оказывается всего около 0.0002 дюйма.

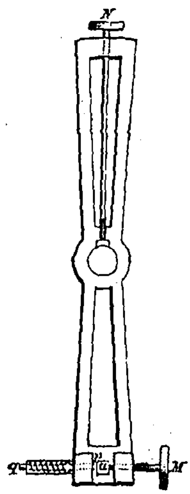
92. Теодолитъ. На чертежѣ 128 изображенъ общій видъ теодолита съ микроскопами. Главная прямая зрительная труба укрѣплена по серединѣ горизонтальной оси, которая по концамъ представляетъ цилиндрическія части изъ закаленной стали, называемыя *цапфами*. Этими цапфами ось кладется въ лагерныя гнѣзда или *лагеры*. По сторонамъ трубы къ горизонтальной оси придѣланы: вертикальный кругъ съ лимбомъ и массивный дискъ, представляющій противовѣсъ. Горизонтальная ось съ придѣланными къ ней частями такъ уравновѣшена, что когда крышка съ объектива трубы снята, центръ тяжести всей системы находится въ пересѣченіи горизонтальной и оптической осей трубы, и, слѣдовательно, труба, во всѣхъ положеніяхъ, находится въ равновѣсіи.



Черт. 128.

Лагерныя гнѣзда имѣютъ слегка выпуклыя поверхности, сходящіяся подъ угломъ въ 90° (черт. 137). Обѣ лагерныя подставки съ гнѣздами представляютъ одно цѣлое, привинченное къ вертикальной оси инструмента, вложенной во втулку основанія съ горизонтальнымъ лимбомъ и съ тремя подъемными винтами. Горизонтальный лимбъ отсчитывается двумя микроскопами съ микрометрами. Микроскопы привинчены къ выступающимъ частямъ особой оправы.

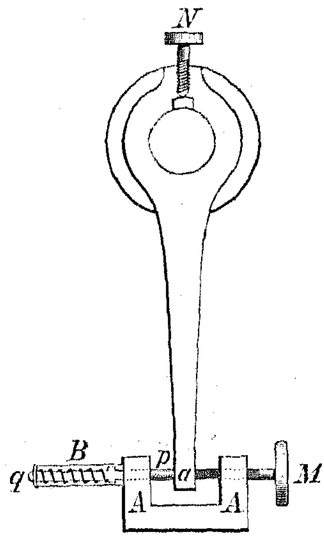
Непосредственно руками можно придавать трубѣ лишь грубыя движенія: по высотѣ — взявшись просто за противовѣсъ трубы (по отнюдь не за окулярную выдвижную трубку), а по азимуту — взявшись за клещи зажимного винта. Для окончательнаго плавнаго и медленнаго передвиженія трубы имѣются микрометрическіе винты. На чертежѣ 129 показаны подробности расположенія зажимного и микрометрическаго винтовъ азимутальныхъ. На основную втулку инструмента надѣто кольцо съ длинными выступающими частями; на одной изъ этихъ частей имѣются двѣ стоечки, между которыми располагается столбикъ a, составляющій одно цѣлое съ верхнею частью инструмента. Черезъ одну стоечку проходитъ микрометрическій винтъ M, а черезъ другую стержень qp съ насаженною на него и скрытою въ трубочкѣ спиральною противодѣйствующею пружиною. Зажимной же винтъ N расположенъ съ противоположной стороны кольца и упирается въ основную втулку. Если ослабить зажимной винтъ N, то все кольцо можетъ свободно вращаться по азимуту, причемъ, благодаря столбику a, одновременно будетъ вращаться и вся верхняя часть инструмента. Когда же винтъ N зажатъ, то свободное вращеніе верхней части инструмента прекращается, но при ввинчиваніи микрометрическаго винта M онъ упирается въ столбикъ a и, толкая его впередъ, заставляетъ медленно и плавно вращаться верхнюю часть инструмента; при вывинчиваніи же винта M столбикъ a, подъ дѣйствіемъ спиральной пружины, двигается въ противоположную сторону. Совершенно подобнымъ же образомъ устроены зажимной и микрометрическій винты для измѣненія положенія трубы по высотѣ; они показаны на черт. 130, на которомъ кругъ вверху представляетъ разрѣзъ горизонтальной оси въ томъ ея мѣстѣ, гдѣ на нее надѣто кольцо съ



Черт. 129.

длиннымъ приливомъ *a*, помѣщающимся между стойками *A*, придѣланными къ основанію лагеровъ. Черезъ эти стойки пропущены микрометрическій винтъ *M* и стержень *qp*. Такъ какъ труба можетъ имѣть два положенія (кругъ право и кругъ лѣво), то къ основанію лагеровъ придѣланы двѣ пары стоекъ, по обѣимъ сторонамъ.

Когда перекладываютъ трубу въ лагерахъ, то при поднятіи горизонтальной оси поднимается и кольцо съ приливомъ, вслѣдствіе чего стержень *qp* ударялся бы, отъ дѣйствія своей пружинки, въ конецъ микрометрическаго винта. Помимо вреднаго дѣйствія такихъ толчковъ, закрылся бы промежутокъ, куда надо вложить приливъ *a*; поэтому каждый стержень имѣетъ гаечку, при поворачиваніи которой онъ отходитъ назадъ, и между концами стержня и микрометрическаго винта образуется промежутокъ, достаточный для свободнаго прохожденія прилива *a*; передъ наблюденіями гайку соотвѣтствующаго стержня надо конечно повернуть, чтобы дать спиральной пружинкѣ возможность дѣйствовать на приливъ.



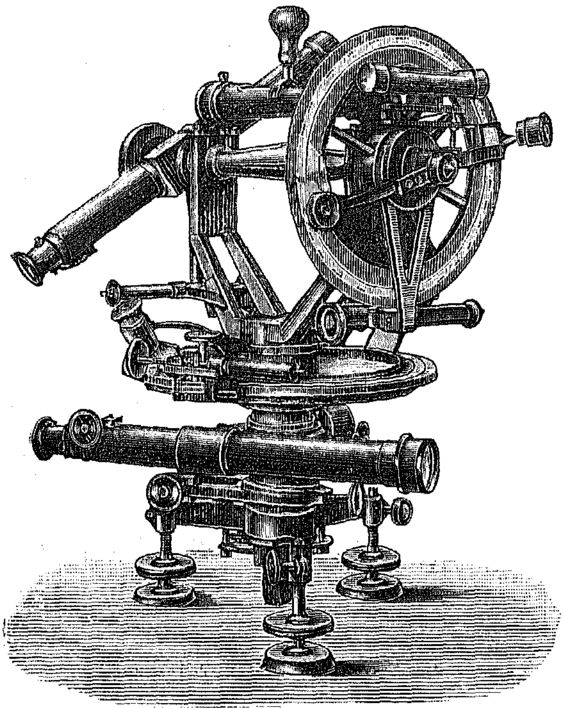
Черт. 130.

Необходимо еще замѣтить, что зажимные винты *N* (черт. 129 и 130) упираются не прямо въ соотвѣтствующія мѣста осей, а въ небольшія тщательно отшлифованныя со стороны осей пластинки. Эти пластинки предохраняютъ оси отъ порчи и, прилегая большими поверхностями, лучше обезпечиваютъ неподвижное соединеніе частей зажимными винтами.

Къ одной изъ ножекъ основанія привинчивается повѣрительная труба съ микрометромъ въ окулярѣ.

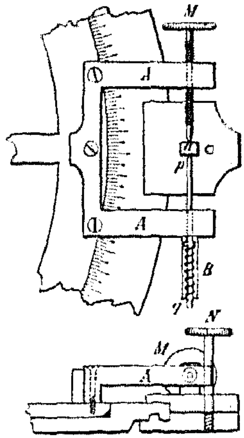
Во время наблюденій на горизонтальную ось инструмента ставится уровень. Къ инструменту принадлежитъ деревянная тренога. Подъемные винты ставятся не просто на головку треноги, а на небольшія мѣдныя плашки съ коническими углубленіями, чтобы распредѣлить давленіе на бóльшую поверхность.

93. Универсалъ съ внѣцентренною трубою. Хотя теодолиты представляютъ неоспоримо наилучшій типъ угломѣрнаго инструмента для производства наблюденій на тріангуляціяхъ, тѣмъ не менѣе весьма часто употребляются и универсалы, причемъ универсалы съ внѣцентренными прямыми трубами имѣютъ преимущество передъ инструментами съ ломаными трубами, потому что возможное шатаніе призмы вредно отзывается на точности наблюденій, и вообще обращеніе съ ломаными трубами требуетъ бóльшаго вниманія. На чертежѣ 131 изображенъ универсалъ *Керна*, нашедшій обширное примѣненіе на второклассныхъ тріангуляціяхъ у насъ въ Россіи. Подобные же инструменты изготовлялись и въ Россіи извѣстнымъ механикомъ *Брауеромъ*. Стальная горизонтальная ось инструмента имѣетъ по концамъ съ одной стороны прямую зрительную трубу, а съ другой вертикальный кругъ. Оптическія качества зрительныхъ трубъ универсаловъ обыкновенно ниже оптическихъ качествъ трубъ теодолитовъ. Въ малыхъ инструментахъ Керна зрительныя трубы



Черт. 131.

имѣютъ объективъ въ 1 дюймъ въ діаметрѣ при фокусномъ разстояніи 10 дюймовъ и увеличеніи 20. Горизонтальный и вертикальный лимбы раздѣлены черезъ 10′ и отсчитываются двумя верньерами съ точностью до 10″. Лагерныя стойки соединены по серединѣ съ вертикальною осью инструмента, вставляемою въ цилиндро-коническое отверстіе трубки горизонтальнаго круга. При инструментѣ имѣется два уровня: большой, накладываемый на горизонтальную ось трубы, и малый, при алидадѣ вертикальнаго круга.

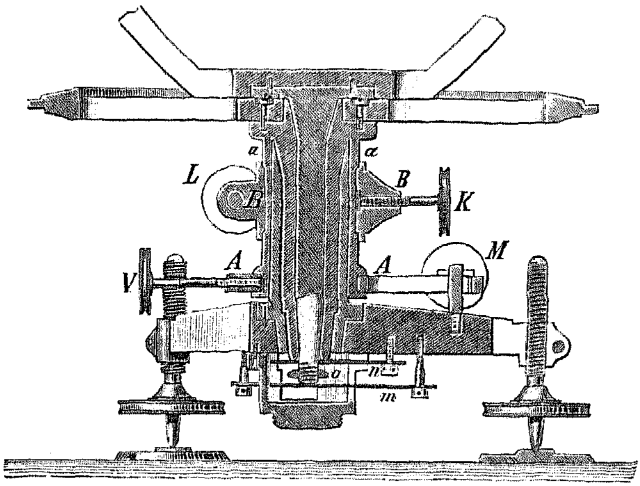


Черт. 132.

Горизонтальный кругъ сдѣланъ очень прочнымъ, потому что онъ представляетъ мѣсто прикрѣпленія клещей, служащихъ для придаванія алидадному кругу, а, слѣдовательно, и всей верхней части инструмента, медленнаго микрометрическаго движенія по азимуту. Связь алидады съ горизонтальнымъ кругомъ показана сверху и въ разрѣзѣ на черт. 132. Къ алидадѣ привинчена вилка A съ двумя выступами, изъ которыхъ въ одномъ вращается алидадный микрометрическій винтъ M, а къ другому привинчена трубочка B со стержнемъ pq и спиральною пружиною. На наружный край горизонтальнаго круга надѣты клещи изъ двухъ пластинокъ, сжимаемыхъ вмѣстѣ *алидаднымъ зажимнымъ винтомъ* N. Къ верхней пластинкѣ клещей придѣланъ столбикъ a, всегда находящійся между концами микрометрическаго винта M и стержня pq, надавливаемаго спиральною пружиною. Если ослабить зажимной винтъ N, то клещи свободно скользятъ по краю горизонтальнаго круга и, взявшись рукою за выступы вилки, можно направить зрительную трубу на любую точку горизонта. Для окончательнаго же и точнаго наведенія по азимуту клещи сжимаются винтомъ N, и дальнѣйшее движеніе алидады возможно лишь при помощи вращенія микрометрическаго винта M, который, упираясь въ столбикъ a клещей, медленно и плавно поворачиваетъ вилку, а, слѣдовательно, и всю верхнюю часть инструмента.

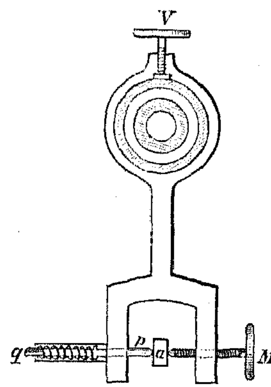
Приспособленіе для микрометрическаго вращенія трубы по высотѣ устроено въ описываемомъ инструментѣ точно такъ же, какъ въ предъидущемъ и изображено на черт. 130. По обѣимъ сторонамъ лагерныхъ стоекъ устроены два одинаковые пріемника *AA*: въ одинъ входитъ приливъ отъ кольца съ зажимнымъ винтомъ, а въ другой—приливъ отъ оправы съ уровнемъ при вертикальномъ кругѣ. Такъ какъ оба пріемника одинаковы, то, казалось бы, совершенно безразлично, въ который изъ нихъ попадетъ приливъ отъ кольца съ зажимнымъ винтомъ и въ который — приливъ оправы уровня при вертикальномъ кругѣ, т. е., другими словами, безразлично, какими концами класть въ лагеры горизонтальную ось съ трубою. Однако на самомъ дѣлѣ нужно класть ось однообразно и именно такъ, чтобы приливъ отъ кольца съ зажимнымъ винтомъ опускался въ пріемникъ, ближайшій къ клещамъ. Такое правило имѣетъ двоякую цѣль: во первыхъ, оба микрометрическіе винта для медленнаго вращенія трубы по азимуту и по высотѣ будутъ рядомъ, одинъ подлѣ другого, что весьма удобно при наблюденіяхъ, а во вторыхъ, каждая цапфа горизонтальной оси будетъ ложиться всегда въ одинъ и тотъ же лагеръ. Отъ долговременной службы цапфа разрабатываетъ въ лагерахъ едва замѣтныя углубленія, лежитъ въ нихъ прочно, и дальнѣйшая разработка углубленій идетъ весьма медленно; обѣ цапфы навѣрно не вполнѣ одинаковы, поэтому если ось окажется въ новомъ положеніи, то цапфы лягутъ не плотно, а на края сдѣланныхъ раньше углубленій, и при вращеніи будутъ портиться какъ цапфы, такъ и лагеры.

Черт. 133 и 134 представляютъ вертикальный и горизонтальный разрѣзы нижней части универсала. Къ горизонтальному кругу привинчена двойная трубка *aa*, насаживаемая на полый цилиндръ, составляющій одно цѣлое съ треножнымъ основаніемъ инструмента. На нижнюю часть этой трубки насажено кольцо *AA* съ зажимнымъ винтомъ *V* (называемымъ *нижнимъ зажимнымъ винтомъ*) и приливомъ съ вилкою и микрометрическимъ винтомъ *M*. Этотъ послѣдній упирается своимъ концомъ въ столбикъ *a*, привинченный къ одной изъ ножекъ подставки. Открѣпивъ зажимной винтъ *V*, можно сво-



Черт. 133.

бодно вращать горизонтальный кругъ, а съ нимъ и всю алидадную часть инструмента; когда же винтъ *V* зажать, то микрометрическимъ винтомъ *M* можно поворачивать инструментъ лишь въ небольшихъ предѣлахъ.



Черт. 134.

На верхнюю часть трубки *aa* надѣта муфта *BB*, къ которой придѣлана повѣрительная труба. Черезъ эту муфту проходитъ еще одинъ зажимной винтъ *K*—*зажимной винтъ повѣрительной трубы*; когда онъ не зажатъ, то муфта *BB*, а съ нею и повѣрительная труба можетъ свободно вращаться по азимуту, независимо отъ горизонтальнаго круга и ножекъ инструмента; когда же онъ закрѣпленъ, то повѣрительная труба составляетъ какъ бы одно цѣлое съ горизонтальнымъ лимбомъ, и вращеніе ея по азимуту возможно лишь при помощи нижняго микрометрическаго винта. Для приданія повѣрительной трубѣ требуемаго угла наклоненія она можетъ, въ небольшихъ предѣлахъ, вращаться около своей горизонтальной оси, снабженной зажимнымъ винтомъ L.

Чтобы вертикальныя оси алидады и горизонтальнаго круга вращались плавно и достаточно легко, ихъ концы поддерживаются пружинными пластинками m и n, имѣющими видъ трехконечныхъ звѣздчатокъ; эти пружинныя пластинки подвѣшены винтами къ нижней поверхности треножнаго основанія инструмента. Если наблюдатель замѣчаетъ, что алидадный кругъ вращается слишкомъ туго или, наоборотъ, слишкомъ свободно, почти качается, то нужно ввинчивать или вывинчивать винты пластинки m; если то же замѣчается по отношенію къ горизонтальному лимбу инструмента, то нужно подтянуть или ослабить винты пластинки n. Гайка o, навинченная на конецъ вертикальной оси алидады, связываетъ верхнюю часть инструмента съ нижнею; безъ нея при укладкѣ, когда наблюдатель берется руками за основаніе лагерныхъ стоекъ, алидада отдѣлилась бы отъ горизонтальнаго круга и треножнаго основанія. Но необходимо слѣдить, чтобы гайка o не была завинчена вплотную до пружинной пластинки n, ибо въ этомъ случаѣ вертикальная ось алидады оказалась бы сжатою, не могла бы свободно вращаться, а подтягиваніе или ослабленіе винтовъ пластинки m не производило бы желаемаго дѣйствія.

Изъ предъидущаго описанія ясно, что при неподвижномъ положеніи треножнаго основанія наблюдатель можетъ легко и удобно вращать по азимуту не только верхнюю часть инструмента (для наведенія трубы на данный предметъ), но и самый горизонтальный лимбъ. Цѣль вращенія горизонтальнаго лимба заключается въ томъ, чтобы отсчеты каждаго отдѣльнаго пріема наблюденій производились на разныхъ частяхъ лимба; это ослабляетъ вліяніе случайныхъ и систематическихъ ошибокъ черточекъ. Преслѣдуя эту же цѣль, слѣдовало бы имѣть возможность переставлять и вертикальный лимбъ, но онъ обыкновенно скрѣпляется съ трубою неподвижно: во первыхъ, существуютъ механическія затрудненія устроить свободное вращеніе вертикальнаго лимба, а во вторыхъ, вертикальные углы на тріангуляціяхъ измѣряются всегда съ меньшею точностью, и потому погрѣшности черточекъ вертикальнаго лимба не имѣютъ практическаго значенія. Однако, такъ какъ перестановка лимба, помимо ослабленія вліянія ошибокъ черточекъ, позволяетъ отсчитывать другія числа, и этимъ получается хорошая повѣрка наблюденій, то иногда и вертикальный лимбъ можетъ переставляться. Въ описываемомъ универсалѣ Керна дѣлается перестановка не самого вертикальнаго круга, а его алидады, для чего служатъ особые винтики, скрѣпляющіе алидаду съ оправою уровня; если ихъ ослабить, то эти части разобщаются, и алидаду можно свободно вращать просто руками за спицы. Не смотря на полную свободу вращенія, алидаду можно переставлять только на ограниченное число градусовъ, иначе верньеры закроются уровнемъ или его оправою и отсчеты ихъ сдѣлаются невозможными (см. черт. 131).

Для установки универсала служитъ обыкновенная деревянная тренога съ головкою, имѣющею по срединѣ отверстіе, черезъ которое проходитъ стержень съ навинтованною чашечкою. Чашечка эта, составляющая отдѣльно хранимую въ ящикѣ часть, навинчивается на оконечность треножнаго основанія инструмента; на стержень же надѣвается особая трехконечная пружинная скобка и навинчивается гайка, такъ что, во время наблюденій, инструментъ и его тренога составляютъ какъ бы одно цѣлое. Необходимо однако помнить, что когда нижняя гайка плотно привинчена къ скобкѣ, то нельзя дѣйствовать подъемными винтами (для измѣненія наклонности) или, по крайней мѣрѣ, нельзя поднимать инструментъ. Можно посовѣтовать даже, во время наблюденій ослаблять нижнюю гайку. Ее необходимо закрѣплять лишь въ случаѣ переноса инструмента вмѣстѣ съ треногою на небольшія разстоянія.

Универсалы Керна укладываются обыкновенно въ одинъ ящикъ, причемъ въ нижнюю его часть ставится горизонтальный кругъ съ лагерами и треножнымъ основаніемъ, а въ верхнюю—зрительная труба съ горизонтальной осью и уровень.

94. Универсалъ съ ломаною трубою. Если въ универсалѣ, описанномъ въ предъидущемъ § 93, замѣнить прямую зрительную трубу ломаною, то получился бы универсалъ съ ломаною трубою, причемъ всѣ прочія части инструмента могли бы остаться безъ измѣненія. Желаніе описать нѣсколько иное устройство отдѣльныхъ частей побуждаетъ выбрать типомъ универсала съ ломаною трубою универсалъ *Репсольда*, много лѣтъ употреблявшійся на русскихъ тріангуляціяхъ *).

Горизонтальная ось инструмента имѣетъ по серединѣ кубъ, къ одной изъ граней котораго привинчена объективная часть зрительной трубы; окулярная же ея часть помѣщена въ самой горизонтальной оси. Внутри упомянутаго куба расположена стеклянная равнобедренная и прямоугольная призма, изображенная на черт. 120.

Къ окулярной грани куба горизонтальной оси привинченъ большой вертикальный кругъ, нарѣзанный черезъ 4$'$ и отсчитываемый двумя горизонтальными микроскопами съ микрометрами съ точностью до 2$''$ (для передвиженія нитей микрометра съ изображенія одной черточки лимба на изображеніе другой необходимо повернуть барабанъ на два оборота, а самый барабанъ раздѣленъ на 60 частей). Оба микроскопа придѣланы къ горизонтальному коромыслу, на которомъ имѣется чувствительный уровень, защищенный стеклянной коробкой и снабженный плоскимъ зеркаломъ, наклоненнымъ подъ угломъ въ 45° къ горизонту, такъ что наблюдатель, при отсчетѣ микрометровъ, можетъ, не измѣняя положенія головы, отсчитать и показаніе уровня.

Лагерныя стойки придѣланы къ центральной колоннѣ въ видѣ усѣченнаго конуса, свободно вращающагося около вертикальной оси инструмента. Къ основанію центральной колонны придѣланъ горизонтальный кругъ 13-ти дюймовъ въ діаметрѣ, съ лимбомъ, раздѣленнымъ, какъ и вертикальный, черезъ 4$'$; въ отличіе отъ вышеописанныхъ инструментовъ, въ универсалѣ Репсольда горизонтальный кругъ составляетъ не неподвижную часть, а вращается вмѣстѣ со всею верхнею частью

---

*) Одинъ изъ совершеннѣйшихъ типовъ угломѣрнаго инструмента для тріангуляцій выработанъ бывшимъ пулковскимъ астрономомъ *Делленомъ* (1820—1897) и осуществленъ русскимъ механикомъ *Гербстомъ*. См. *Витковскій* — Пулковскій горизонтальный кругъ (Записки В. Т. О. Гл. Штаба, Часть XL, 1885).

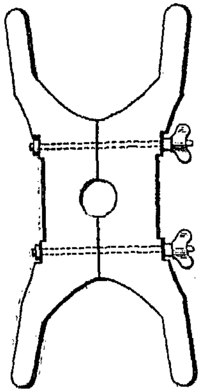
инструмента. Неподвижною частью является здѣсь массивное основаніе инструмента въ видѣ горизонтальнаго кольца, покоющагося на трехъ ножкахъ, причемъ подъемные винты устроены только въ двухъ ножкахъ, а третья ножка, безъ подъемнаго винта, имѣетъ отверстіе, внутри котораго расположена ось съ ручкою и эксцентрикомъ, при помощи котораго подымаются особыя стойки съ роликами, подпирающими горизонтальную ось. Это приспособленіе служитъ для перекладки горизонтальной оси въ лагерахъ. Когда ручка повернута, то стойки съ роликами подымаются, и горизонтальная ось съ зрительною трубою, вертикальнымъ кругомъ и его микроскопами можетъ свободно обращаться около вертикальной оси. Этимъ же приспособленіемъ необходимо пользоваться при укладкѣ инструмента въ ящикъ и установкѣ его на штативъ.

Микроскопы для отсчитыванія горизонтальнаго лимба привинчены къ основанію инструмента и, въ случаѣ надобности, ихъ можно переставлять и закрѣплять въ новомъ положеніи. Микрометры этихъ микроскоповъ устроены точно такъ же, какъ микрометры микроскоповъ для вертикальнаго лимба, и даютъ отсчеты до $2''$ непосредственно и до $0''.2$ при оцѣнкѣ на глазъ десятыхъ долей дѣленій барабановъ.

Приспособленія для медленнаго передвиженія трубы по азимуту и по высотѣ устроены подобно описаннымъ уже въ § 92 для теодолита. Неподвижная часть микрометрическаго приспособленія для горизонтальнаго круга привинчена къ основанію инструмента; къ этому же основанію привинчивается помощью двухъ стоекъ повѣрительная труба, снабженная микрометромъ въ окулярѣ.

Для приведенія инструмента въ горизонтальное положеніе и для измѣренія наклонности его горизонтальной оси служитъ большой накладной уровень, ставящійся своими ножками на цапфы горизонтальной оси, причемъ, для правильности расположенія, на оправѣ большого имѣется еще маленькій, поперечный уровень.

Инструментъ ставится на прочную деревянную треногу съ чугунною головкою въ видѣ треугольной доски съ тремя радіальными желобками. Вслѣдствіе большого вѣса инструмента, онъ ничѣмъ не привинчивается къ треногѣ. Для установки на треногу и снятія съ нея для укладки въ ящикъ имѣются особыя деревянныя носилки, состоящія изъ двухъ половинокъ съ центральнымъ прорѣзомъ и двумя желѣзными винтами съ гайками (черт. 135); этими половинками вертикальная колонна инструмента подхватывается въ своей шейкѣ подъ лагерными стойками; когда гайки винтовъ закрѣплены, инструментъ легко переносится двумя рабочими.



Черт. 135.

Не смотря на свою тяжесть (около 3-хъ пудовъ), этотъ инструментъ укладывается въ одинъ большой, кубическаго вида ящикъ безъ разборки частей; предварительно только подъ цапфы горизонтальной оси подкладываются металлическіе, обшитые замшею наугольники. Кожаный чехолъ ящика имѣетъ ременныя петли, черезъ которыя пропускаются двѣ палки, для носки инструмента четырьмя рабочими.

95. Повѣрки угломѣрныхъ инструментовъ. Передъ наблюденіями каждый угломѣрный инструментъ долженъ быть повѣренъ, т. е. необходимо убѣдиться, не выходятъ ли его погрѣшности изъ предѣловъ, допустимыхъ на практикѣ, и, если выходятъ, то исправить положеніе извѣстныхъ частей инструмента. Повѣрка теодолита и универсала начинается съ повѣрки его накладного уровня, потому что при помощи этого уровня инструментъ устанавливается въ надлежащее положеніе, и двѣ изъ нижеописанныхъ повѣрокъ самого инструмента требуютъ, чтобы имѣлся уже вывѣренный уровень.

Ось накладного уровня должна быть параллельна горизонтальной оси инструмента; только въ такомъ случаѣ, приведя пузырекъ уровня на середину, можно быть увѣреннымъ, что горизонтальная ось инструмента дѣйствительно горизонтальна. Повѣрка уровня производится простою его перекладкою. Когда уровень поставленъ на ось, то вращеніемъ подъемныхъ винтовъ инструмента приводятъ его пузырекъ на середину трубки; затѣмъ уровень перекладывается, и наблюдатель смотритъ на пузырекъ: если пузырекъ, въ этомъ новомъ положеніи, тоже стоитъ по серединѣ трубки, то уровень вѣренъ, если же отошелъ въ ту или другую сторону, то невѣренъ, и передвиженіе пузырька, выраженное въ угловой мѣрѣ, представитъ двойную величину его погрѣшности. Положеніе оси уровня измѣняется при помощи вертикальныхъ исправительныхъ винтовъ. Кромѣ нихъ, въ оправахъ уровней хорошихъ угломѣрныхъ инструментовъ имѣются еще и горизонтальные исправительные винтики, служащіе для установки уровня въ такое положеніе, чтобы при покачиваніи его впередъ и назадъ пузырекъ оставался неподвижнымъ. Тогда ось уровня будетъ не только въ плоскости, параллельной горизонтальной оси инструмента, но будетъ дѣйствительно параллельна ей. Несоблюденіе этого условія узнается именно покачиваніемъ уровня: если пузырекъ остается неподвижнымъ, то условіе выполнено, въ противномъ случаѣ вращаютъ упомянутые горизонтальные исправительные винтики. Послѣ повѣрки всѣ исправительные винтики должны быть туго закрѣплены, иначе уровень будетъ шататься въ своей оправѣ, а это шатаніе хуже, чѣмъ если бы уровень былъ вовсе не повѣренъ.

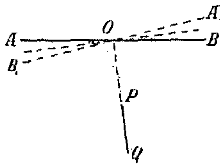
Въ каждомъ угломѣрномъ инструментѣ: 1) *горизонтальная ось должна быть перпендикулярна вертикальной оси вращенія*, 2) *оптическая ось зрительной трубы должна быть перпендикулярна горизонтальной оси* и 3) *нити въ окулярѣ должны быть поставлены правильно*.

1) Чтобы сдѣлать первую повѣрку, ставятъ на горизонтальную ось инструмента *вывѣренный* уже уровень и вращеніемъ подъемныхъ винтовъ приводятъ его пузырекъ на середину, т. е. приводятъ ось AB (черт. 136) въ горизонтальное положеніе. Пусть ось AB не перпендикулярна вертикальной оси вращенія PQ. Тогда, послѣ поворота алидадной части инструмента на 180°, горизонтальная ось приметъ положеніе A_1B_1, причемъ $\angle QOB = \angle QOB_1$. Такъ какъ по предположенію эти углы не равны 90°, то новое положеніе A_1B_1 горизонтальной оси составитъ съ прежнимъ ея положеніемъ AB

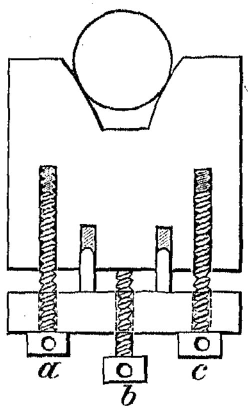
уголъ AOB_1, равный двойной погрѣшности. Дѣйствительно, если $\angle QOB = \angle QOB_1 = 90° - \delta$, то

$$\angle AOB_1 = 180° - 2\ (90° - \delta) = 2\,\delta$$

Такимъ образомъ, въ новомъ положеніи, пузырекъ уровня не будетъ уже по серединѣ трубки, а отойдетъ отъ нея на угловую величину $2\,\delta$. Для исправленія погрѣшности, т. е. для установки горизонтальной оси въ положеніе, перпендикулярное PQ, необходимо поднять или опустить ту лагерную стойку, которая имѣетъ исправительные винты, какъ показано на черт. 137. Чтобы ее поднять, надо, отвинтивъ крайніе винты a и c, ввинчивать средній b; если же ее нужно опустить, то, наоборотъ, сперва надо вывинтить немного средній винтъ b,



Черт. 136.



Черт. 137.

а затѣмъ ввинтить крайніе a и c. Само собою разумѣется, что, закрѣпивъ винты, надо повторить повѣрку еще разъ съ начала, и если передвиженія пузырька уровня покажутъ, что погрѣшность хотя и уменьшилась, но осталась въ томъ же смыслѣ, надо еще вращать исправительные винты въ прежнемъ направленіи; если же пузырекъ уровня передвинулся теперь въ обратную сторону, то винты передвинуты больше, чѣмъ слѣдуетъ и ихъ надо вращать назадъ. Замѣчая величины передвиженія пузырька и поворотовъ винтовъ, можно даже впередъ разсчитать по пропорціи, насколько именно надо повернуть вновь винты, чтобы совершенно уничтожить погрѣшность.

2) Способъ производства второй повѣрки зависитъ отъ расположенія трубы угломѣрнаго инструмента, т. е. расположена

ли она центрально или внѣцентренно, и, притомъ, можно ли ея ось перекладывать въ лагерахъ или нельзя.

Въ теодолитѣ, гдѣ трубу можно перекладывать въ лагерахъ, *инструментъ ставятъ на прочное основаніе, приводятъ* въ горизонтальное положеніе и трубу направляютъ на какой нибудь отдаленный, ясно видимый предметъ, причемъ алидадный кругъ закрѣпляется и предметъ вводится точно въ середину между вертикальными нитями въ окулярѣ при помощи микрометрическаго винта. Послѣ этого трубу вмѣстѣ съ ея горизонтальною осью вынимаютъ и перекладываютъ такъ, чтобы цапфы опустились въ противоположные лагеры, а труба была направлена въ ту же сторону; т. е. изъ положенія AB и Oo перекладываютъ въ положеніе A_1B_1 и O_1o_1 (черт. 138). Если уголъ ACO между осями оптическою Oo и горизонтальною AB не равенъ $90°$, а напримѣръ $90°—c$, то труба не будетъ теперь направлена точно на предметъ, и онъ усмотрится правѣе или лѣвѣе нитей, на угловую величину $2c$; на чертежѣ уголъ $ACO < 90°$, и потому уклоненіе будетъ вправо на величину $2c = \angle o_1O_1o_{11}$. Чтобы сдѣлать уголъ между оптическою и горизонтальною осями равнымъ $90°$, надо передвинуть центръ сѣтки въ o, на угловую величину oo_{11}, т. е. на половину величины замѣченнаго уклоненія.

Черт. 138.

Если труба расположена на концѣ горизонтальной оси, то слѣдуетъ выбирать весьма удаленный предметъ *), чтобы направленія O_1o_{11} и Oo (черт. 139) можно было считать параллельными; въ противномъ случаѣ, т. е. если нѣтъ достаточно удаленнаго предмета, надо изготовить доску съ двумя мар-

---

*) Выраженіе „весьма удаленный предметъ" надо понимать въ томъ смыслѣ, что предметъ долженъ быть въ разстояніи, съ котораго уголъ зрѣнія на концы горизонтальной оси инструмента меньше точности отсчета по горизонтальному кругу; такъ, для универсала съ внѣцентренною трубою, длина горизонтальной оси котораго равна 1 футу, а точность отсчета $10''$, предметъ долженъ быть избранъ на разстояніи не менѣе 6 верстъ, ибо съ этого лишь разстоянія прямая, длиною въ 1 футъ, представляется подъ угломъ въ $10''$. Для такихъ соображеній полезно помнить, что 1 футъ на разстояніи одной версты представляется подъ угломъ въ $1'$.

ками, сдѣланными на разстояніи, равномъ длинѣ горизонтальной оси, и, наведя трубу при положеніи кругъ право на лѣвую марку, смотрѣть послѣ перекладки на изображеніе правой, или наоборотъ.

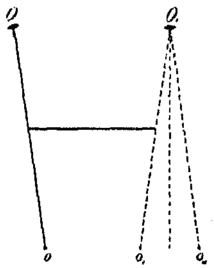
Въ универсалахъ, допускающихъ свободное переведеніе трубы черезъ зенитъ, эта же повѣрка производится иначе, безъ перекладки горизонтальной оси. Именно, наведя, какъ было объяснено выше, трубу на удаленный предметъ, производятъ отсчетъ по горизонтальному лимбу (не по одному, а по всѣмъ верньерамъ или микроскопамъ). Затѣмъ переводятъ трубу черезъ зенитъ, такъ что оптическая ось изъ положенія Oo (черт. 140) переходитъ въ положеніе O_1o_1, потому что при существованіи коллимаціонной ошибки, при переводѣ черезъ зенитъ, слѣдъ движенія оптической оси будетъ не плоскость, а коническая поверхность. Послѣ этого открѣпляютъ алидадный кругъ, поворачиваютъ верхнюю часть инструмента приблизительно на 180° и наводятъ трубу на прежній предметъ, причемъ оптическая ось O_1o_1, чтобы придти въ первоначальное положеніе Oo, повернется на уголъ O_1CO, равный $180°—2c$ (уголъ $ACO=90°—c$). Горизонтальная же ось AB приметъ теперь положеніе A_1B_1, и потому новый средній отсчетъ по лимбу будетъ отличаться отъ первоначальнаго не на 180°, а на $180°—2c$. Сѣтку нитей нужно переставить на угловую величину c.

Если труба имѣетъ внѣцентренное положеніе, то и при изслѣдованіи коллимаціонной погрѣшности помощью отсчетовъ горизонтальнаго круга надо выбирать весьма удаленный предметъ, чтобы новое положеніе оптической оси $O_{11}o_{11}$ можно было принять параллельнымъ первоначальному Oo (черт. 141), или же запастись доскою съ двумя марками *).

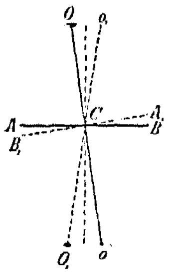
Когда коллимаціонная ошибка изслѣдуется при помощи перекладки оси въ лагерахъ, безъ отсчетовъ по горизонтальному лимбу, то не можетъ быть сомнѣнія, въ какую сторону

*) Коллимаціонную ошибку можно, конечно, опредѣлить и по наблюденіямъ при кругѣ право и кругѣ лѣво любого предмета, но тогда необходимо принять въ разсчетъ внѣцентренное положеніе трубы, введя въ вычисленіе удвоенный уголъ ω, получаемый по формулѣ (63).

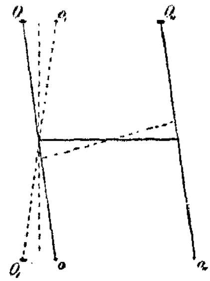
нужно передвинуть сѣтку нитей: ее, очевидно, надо передвинуть *къ изображенію* предмета при второмъ положеніи трубы. Когда же коллимаціонная ошибка изслѣдуется переводомъ трубы черезъ зенитъ и отсчетами по горизонтальному лимбу, то направленіе передвиженія сѣтки зависитъ отъ того, возрастаютъ ли подписи на лимбѣ по направленію движенія часовой стрѣлки, или въ обратномъ направленіи. Чтобы не затруднять себя соображеніями, которыя въ полѣ легко могутъ оказаться ошибочными, можно посовѣтовать передвинуть сперва сѣтку въ какомъ угодно направленіи и повторить изслѣдованіе: если



Черт. 139.



Черт. 140.



Черт. 141.

разногласіе отсчетовъ увеличилось, то, очевидно, сѣтка передвинута не туда, куда нужно, и ее надо передвинуть въ обратномъ направленіи; если разногласіе только уменьшилось, то передвиженіе сѣтки сдѣлано въ должномъ направленіи, но не на достаточную величину, и ее нужно передвинуть еще; наконецъ, если разногласіе перемѣнило знакъ, то сѣтка передвинута въ вѣрномъ направленіи, но болѣе, чѣмъ требовалось, и ее надо передвинуть немного назадъ.

3) Чтобы убѣдиться въ вѣрности расположенія нитей въ окулярной сѣткѣ, приводятъ ось трубы въ горизонтальное положеніе, закрѣпляютъ зажимные винты по азимуту и по высотѣ и, наведя центръ сѣтки на ясно видимую точку отдаленнаго предмета, вращаютъ поочередно микрометрическіе винты. При вращеніи азимутальнаго микрометрическаго винта изображеніе не должно сходить съ горизонтальной нити сѣтки, а при вра-

щенiи микрометрическаго винта по высотѣ — съ нити вертикальной. Если этого нѣтъ, и изображенiе движется въ косвенномъ направленiи, то дiафрагму съ сѣткою необходимо повернуть въ ту или другую сторону, просто руками или при помощи особыхъ исправительныхъ винтиковъ.

Производя описанныя повѣрки угломѣрныхъ инструментовъ, не надо стремиться достигнуть полнаго уничтоженiя ошибокъ: такое стремленiе требовало бы много времени и на практикѣ въ сущности неисполнимо. Достаточно довести ихъ до незначительной величины. Это узнается тѣмъ, что пузырекъ уровня въ разныхъ положенiяхъ горизонтальной оси хоть и не остается на мѣстѣ, но однако не доходитъ своими концами до оправы (уровень играетъ); коллимацiонная же ошибка должна быть доведена до такой величины, чтобы послѣ перекладки трубы изображенiе предмета не выходило изъ предѣла двухъ среднихъ вертикальныхъ нитей, или, чтобы разногласiе отсчетовъ при кругѣ право и кругѣ лѣво не превосходило 2′ (слѣдовательно коллимацiонная ошибка будетъ меньше 1′). Когда разсмотрѣнныя ошибки невелики, то влiянiе ихъ на отсчеты лимба весьма незначительно (см. § 103, п. 6, 7 и 8).

96. Уходъ за инструментами. Угломѣрные инструменты, изготовляемые лучшими механиками, представляютъ весьма нѣжные и чувствительные измѣрительные приборы; высокая точность результатовъ достигается ими лишь при бережномъ, осторожномъ и внимательномъ обращенiи какъ во время наблюденiй, такъ и при укладкѣ въ ящики и перевозкѣ.

Передъ наблюденiями, кромѣ описанныхъ выше повѣрокъ, нужно удостовѣриться, что всѣ движенiя отдѣльныхъ частей инструмента совершаются легко и плавно, т. е. безъ сильнаго тренiя и безъ шатанiй осей въ ихъ втулкахъ. Тугое или слишкомъ легкое вращенiе устраняется подыманiемъ или опусканiемъ осей, т. е. ввинчиванiемъ или вывинчиванiемъ соотвѣтствующихъ исправительныхъ винтовъ. Если этого мало, то наблюдатель долженъ разобрать нижнюю часть инструмента, тщательно обтереть оси и втулки сухою тряпкою и тряпкою, смоченною керосиномъ, и смазать ихъ костянымъ масломъ или вазелиномъ *).

Передъ укладкою въ ящикъ, особенно для предстоящей дальней перевозки, пружины, поддерживающія вертикальныя оси, должны быть подтянуты, чтобы, отъ нажатія упаковочныхъ винтовъ, оси не заклинились до полнаго сцѣпленія. Во время перевозки нечего опасаться шатанія осей, если только упаковочные винты завинчены съ достаточною силою. Послѣ распаковки необходимо конечно опять опустить поддерживающія пружины. Передъ каждою укладкою въ ящикъ надо ослабить всѣ зажимные винты и тогда, положивъ инструментъ въ соотвѣтствующія гнѣзда, закрѣпить упаковочные винты; послѣ этого надо закрѣпить и всѣ зажимные винты самого инструмента. Если при закрѣпленіи упаковочныхъ винтовъ зажимные винты были плотно привинчены, то можетъ произойти гнутіе отдѣльныхъ частей инструмента; если же, послѣ закрѣпленія упаковочныхъ винтовъ, оставить зажимные винты не плотно завинченными, то отъ тряски въ дорогѣ они могли бы вовсе вывинтиться и, болтаясь на свободѣ, попортить лимбы и другія нѣжныя части инструмента. Когда отправляютъ инструментъ на далекое разстояніе, то кромѣ упомянутыхъ предосторожностей полезно клещи и вообще части съ микрометрическими и зажимными винтами обернуть мягкою бумагой и перевязать ниточками; бумага предохранитъ ихъ отъ пыли, а случайно вывинтившаяся часть не будетъ свободно болтаться въ ящикѣ.

Для разныхъ винтовъ и гаекъ въ инструментальномъ ящикѣ помѣщаются, въ соотвѣтствующихъ имъ гнѣздахъ, отвертки, ключи и шпильки. Кромѣ того, тамъ имѣются кисточки изъ мягкой барсуковой шерсти, для очистки лимбовъ и верньеровъ

---

*) Невозможность повернуть алидаду не разъ приводила въ отчаяніе. Астрономъ *Саблеръ* (1810—1865), установивъ инструментъ на островѣ Гохландѣ, былъ поставленъ, казалось, въ безвыходное положеніе: отъ давленія упаковочныхъ винтовъ и мороза алидадная часть не двигалась, а слѣдовало немедленно приступить къ наблюденіямъ. Схвативъ за спицы, онъ рванулъ алидаду и все пришло въ полный порядокъ. При умѣломъ приложеніи пары силъ такой пріемъ не можетъ повредить инструменту.

отъ пыли. Лимбы и верньеры отнюдь не слѣдуетъ трогать пальцами или чистить тряпками: вмѣстѣ съ пылью и грязью онѣ вытрутъ краску изъ черточекъ и отсчитываніе будетъ затруднительно. Для чистки лимбовъ и верньеровъ надо пользоваться только кисточками, а для чистки стеколъ зрительныхъ трубъ, въ случаѣ значительнаго ихъ загрязненія, кромѣ кисточекъ берутъ чистую замшу или старую, но чистую тряпочку, слегка смоченную спиртомъ.

Укладку въ ящикъ и выемку изъ него долженъ дѣлать непремѣнно *самъ наблюдатель*, а отнюдь не поручать этого кому нибудь изъ рабочихъ. Послѣдніе при всемъ желаніи быть осторожными, по невѣжеству и вслѣдствіе непривычки къ обращенію съ точными инструментами, могутъ однимъ нечаяннымъ движеніемъ испортить дорогой инструментъ, напримѣръ, погнуть лимбъ, тронуть микроскопы и т. п. Точно также наблюдатель обязанъ лично присутствовать при установкѣ инструментальныхъ ящиковъ на подводы, въ вагоны желѣзныхъ дорогъ, при подъемѣ на платформы тригонометрическихъ знаковъ и при спускѣ съ нихъ. Ящики должны всегда находиться въ своемъ обычномъ положеніи, на которое и разсчитаны упаковочные винты и ящичныя переборки; въ лежачемъ или опрокинутомъ положеніи эти винты и переборки могутъ не выдержать, и если нѣкоторыя части инструмента и не освободятся совсѣмъ, то могутъ изогнуться.

При поднятіи на высокіе тригонометрическіе знаки, на колокольни и т. п. пользуются крѣпкими канатами и блоками, причемъ конецъ каната долженъ быть обвязанъ вокругъ всего ящика, а не привязанъ лишь къ ручкамъ, которыя легко могутъ оторваться. Чтобы при подъемѣ или спускѣ ящикъ не стукался о столбы сигнала или стѣну зданія, къ нему, кромѣ подъемнаго, надо привязать сбоку еще оттяжной канатъ, конецъ котораго долженъ быть если не въ рукахъ самого наблюдателя, то въ рукахъ опытнаго рабочаго.

Для дальнихъ перевозокъ ящики съ угломѣрными инструментами обкладываются соломою и обшиваются холстомъ или рогожами, причемъ необходимо дѣлать снаружи надписи: «верхъ» и «осторожно». Ключи отъ ящиковъ должны всегда находиться при нихъ на прочныхъ бичевкахъ, привязанныхъ къ петлямъ или скобкамъ. Бывали случаи, что потеря ключа или просто оставленіе его дома, вдали отъ мѣста наблюденій, принуждала ломать ящикъ, исправленіе котораго не всегда возможно мѣстными средствами. Опасеніе, что ключъ при ящикѣ введетъ кого нибудь въ соблазнъ, не должно имѣть мѣста тамъ, гдѣ инструментъ, въ промежуткахъ между наблюденіями, не бросается на произволъ судьбы, а стоитъ подлѣ постели наблюдателя; для дальнихъ же перевозокъ, какъ упомянуто выше, инструментальный ящикъ обшивается, и потому ключъ не можетъ ни пропасть, ни побудить кого либо имъ воспользоваться. *Гербстъ*, бывшій механикъ Пулковской обсерваторіи, принялъ за правило снабжать всѣ ящики двумя одинаковыми ключами, изъ которыхъ второй, запасный, хранится въ особомъ углубленіи въ нижней наружной планкѣ ящика; въ случаѣ потери перваго ключа, надо лишь отвинтить или просто отбить указанную планку и воспользоваться запаснымъ ключемъ.

Въ ясную погоду необходимо предохранять инструментъ во время наблюденія отъ прямыхъ лучей Солнца; если не имѣется особой палатки или передвижныхъ щитовъ, то надо держать надъ инструментомъ раскрытый зонтикъ. Прямые солнечные лучи производятъ неравномѣрное нагрѣваніе отдѣльныхъ частей инструмента, а безпокойное движеніе уровня и блескъ полированныхъ частей инструмента мѣшаютъ производить точныя наведенія и отсчеты и ослѣпляютъ наблюдателя. Зонтикъ необходимъ также въ случаѣ внезапнаго наступленія дождя, чтобы успѣть уложить инструментъ въ ящикъ или переждать проносящуюся тучу. Если на инструментъ попадетъ нѣсколько капель дождя, то ихъ отнюдь не слѣдуетъ вытирать: по минованіи дождя или послѣ приноса инструмента въ комнату эти капли испарятся сами, не оставивъ никакихъ слѣдовъ. Для предохраненія отъ ржавчины надо вытирать только стальныя, не защищенныя части инструмента, именно цапфы горизонтальной оси. Цапфы и лагерныя гнѣзда слѣдуетъ иногда смазывать костянымъ масломъ или вазелиномъ.

97. Время наблюденій. Если въ ясный лѣтній день направить трубу на весьма отдаленный земной предметъ и держать ее закрѣпленною неподвижно, то замѣчаются слѣдующія перемѣны въ положеніи и видѣ изображенія. Тотчасъ послѣ восхода Солнца *обратное* изображеніе предмета занимаетъ нижнюю часть поля зрѣнія и представляется неяснымъ, расплывчатымъ и колеблющимся; спустя часъ или полтора послѣ восхода Солнца изображеніе значительно повышается и пріобрѣтаетъ отчетливый и спокойный видъ, весьма удобный для производства точнаго наведенія; однако въ такомъ положеніи изображеніе остается весьма короткое время, нѣсколько минутъ и рѣдко болѣе получаса; затѣмъ изображеніе начинаетъ опять колебаться, теряетъ отчетливость и вмѣстѣ съ тѣмъ постепенно подымается; около полудня изображеніе занимаетъ высшую точку своего суточнаго видимаго перемѣщенія, и дѣлается столь безпокойнымъ, что точное наведеніе становится совершенно невозможнымъ: изображеніе то останавливается, то дѣлаетъ скачекъ въ ту или другую сторону, то непрерывно дрожитъ и какъ бы прыгаетъ въ трубѣ; однако въ общемъ изображеніе предмета держится около одного мѣста въ теченіи довольно продолжительнаго времени, примѣрно часа два. Послѣ этого колебанія затихаютъ, изображеніе дѣлается все отчетливѣе и рѣзче и около 3—4 часовъ пополудни пріобрѣтаетъ то же спокойствіе, которое было утромъ, съ тою однако существенною разницею, что это спокойствіе продолжается не нѣсколько минутъ, а часа два и даже три. При этомъ, не смотря на кажущуюся неподвижность, изображеніе, не мѣняя азимута, постепенно опускается въ полѣ зрѣнія. Передъ вечеромъ изображеніе предмета, продолжая опускаться, вновь начинаетъ приходить въ безпокойство, и его очертанія расплываются и теряютъ рѣзкость. Только передъ самымъ закатомъ Солнца изображеніе, дойдя до низшаго своего мѣста, дѣлается еще разъ спокойнымъ, но быстро наступающая темнота принуждаетъ вовсе прекратить наблюденія.

Такія явленія замѣчаются, какъ упомянуто выше, въ ясные лѣтніе дни; въ пасмурную или облачную погоду общій характеръ явленій хотя и остается тотъ же, но какъ постепенныя передвиженія изображенія по высотѣ, такъ и колебанія бываютъ значительно меньше. Зато въ указанныя времена спокойныхъ изображеній, самыя изображенія далеко не пріобрѣтаютъ той отчетливости и изящества, какъ въ ясную погоду.

Всѣ описанныя явленія вполнѣ объясняются тѣмъ обстоятельствомъ, что свѣтовые лучи отъ отдаленнаго земного предмета, прежде чѣмъ попасть въ трубу наблюдателя, проходятъ черезъ нижніе, самые плотные слои земной атмосферы, которые днемъ подъ дѣйствіемъ нагрѣванія Солнцемъ непрерывно перемѣщаются и перемѣшиваются.

Ночью устанавливается извѣстное равновѣсіе слоевъ атмосферы, причемъ плотность ихъ непрерывно убываетъ отъ поверхности Земли вверхъ, и, вслѣдствіе низкой температуры, атмосфера имѣетъ вообще наибольшую плотность и наибольшій показатель преломленія. Послѣ разсвѣта утренній туманъ не позволяетъ отчетливо видѣть отдаленные предметы, но когда туманъ разсѣется, а нагрѣваніе почвы весьма косвенно падающими лучами Солнца еще незначительно, атмосферные слои разной плотности сохраняютъ равновѣсіе, установившееся ночью, и потому изображенія предметовъ ясны и отчетливы (утренній короткій періодъ спокойныхъ изображеній). Но равновѣсіе сохраняется не долго: благодаря своей теплопрозрачности, воздухъ нагрѣвается не столько прямыми лучами Солнца, сколько тепловыми лучами, отражаемыми поверхностью Земли, поэтому, когда Солнце достигнетъ извѣстной высоты надъ горизонтомъ, нижніе, ближайшіе къ почвѣ слои воздуха нагрѣваются раньше верхнихъ и начинаютъ перемѣщаться: потоки нагрѣтаго воздуха устремляются вверхъ и замѣняются холоднымъ воздухомъ, спускающимся изъ высшихъ слоевъ. Такое перемѣщеніе продолжается часовъ до 3-хъ и даже до 4-хъ, и все это время изображенія получаются безпокойныя и неясныя, хотя, благодаря непрерывной смѣнѣ однихъ слоевъ другими, средняя плотность каждаго слоя остается почти постоянною, и средняя величина преломленія тоже одинакова, такъ что, не смотря на колебанія и скачки, положеніе изображенія въ полѣ зрѣнія почти не измѣняется. Вскорѣ послѣ времени наибольшей дневной температуры, т. е. около 4-хъ часовъ дня, перемѣщенія слоевъ прекращаются, и наступаетъ временное равновѣсіе (вечерній періодъ спокойныхъ изображеній). Передъ вечеромъ верхніе слои атмосферы, постепенно охлаждаясь, опускаются, перемѣшиваются съ нижними, и начинается опять безпокойство изображеній, прекращающееся иногда лишь передъ самымъ закатомъ Солнца.

Такъ какъ спокойствіе и безпокойство изображеній есть прямое слѣдствіе постепеннаго усиленія и ослабленія нагрѣванія атмосферы, то легко объяснить, почему въ пасмурную погоду, когда нижніе слои атмосферы защищены толщею облаковъ, нагрѣваніе и перемѣщеніе слоевъ несравненно меньше, чѣмъ въ ясную; зато въ пасмурную погоду атмосфера бываетъ болѣе насыщена водяными парами, и потому, хотя въ эти дни изображенія оказываются достаточно спокойными въ теченіи цѣлаго дня, но они не имѣютъ той отчетливости, которая замѣчается въ погоду ясную. Въ полуоблачную погоду замѣчаются нерѣдко престранныя перемѣны въ изображеніяхъ отдаленныхъ предметовъ: когда Солнце скрыто облакомъ, изображеніе бываетъ спокойное и отчетливое, но чуть лишь солнечные лучи прорвутся между облаками, нагрѣвающіеся и перемѣщающіеся вслѣдъ за симъ слои воздуха тотчасъ производятъ безпокойство изображеній, такъ что возможность производить точныя наблюденія на извѣстное время прекращается.

Кромѣ времени дня на качество изображеній имѣютъ большое вліяніе мѣстныя условія. Описанный порядокъ смѣны спокойныхъ и безпокойныхъ изображеній происходитъ въ открытыхъ равнинахъ. Въ гористыхъ странахъ, гдѣ точки наблюденій суть выдающіяся вершины, лучи свѣта съ одной точки на другую проходятъ обыкновенно высоко надъ почвою промежуточныхъ долинъ, и время дня оказываетъ малое вліяніе на качество изображеній, которыя бываютъ весьма удовлетворительны съ утра до вечера. Въ болотистыхъ низменностяхъ, наоборотъ, сильныя испаренія и недостаточное нагрѣваніе нижнихъ слоевъ атмосферы не позволяютъ отчетливо видѣть удаленные предметы даже во времена спокойныхъ изображеній.

Вѣтренная погода, какъ это, повидимому, ни странно, отнюдь не портитъ изображеній: при сильномъ вѣтрѣ отчетливость изображеній бываетъ превосходная, и если бы не дрожаніе штативовъ и платформъ высокихъ сигналовъ, то въ вѣтренную погоду наблюденія имѣли бы наибольшую точность.

Необходимо замѣтить, что время дня и состояніе погоды имѣютъ существенное значеніе только для наблюденій на перво-классныхъ тріангуляціяхъ, т. е. при длинныхъ линіяхъ визированія (удаленные предметы); при короткихъ линіяхъ визированія качества изображеній вообще лучше, и только въ серединѣ дня можно замѣтить колебанія изображеній даже на весьма близкихъ разстояніяхъ.

Перемѣны качества изображеній, замѣчаемыя при благопріятной погодѣ, указываютъ, въ какіе именно часы дня надо производить наблюденія, чтобы они имѣли наибольшую точность. Казалось бы, всего лучше наблюдать всегда во время спокойныхъ изображеній, причемъ, когда изображеніе наблюдаемой точки предмета введено въ центръ окулярной сѣтки, отсчеты верньеровъ или микроскоповъ по горизонтальному и по вертикальному лимбамъ дадутъ какъ горизонтальное направленіе, такъ и его уголъ наклоненія. Однако, на самомъ дѣлѣ, горизонтальные и вертикальные углы измѣряются всегда отдѣльно, въ разные часы дня. При спокойныхъ изображеніяхъ наведеніе можетъ быть сдѣлано, конечно, съ наибольшею точностью, но отъ этого выигрываютъ качества опредѣленія только горизонтальныхъ направленій. Выше было упомянуто, что тогда изображеніе предмета, не мѣняя азимута, довольно быстро перемѣщается по высотѣ, и притомъ положеніе изображенія по высотѣ различно въ разные дни; отсюда и слѣдуетъ, что время спокойныхъ изображеній наиболѣе благопріятно только для измѣренія горизонтальныхъ угловъ; что же касается до угловъ вертикальныхъ, то хотя изображенія въ это время и хороши, но результаты будутъ различны, смотря по часу дня и разнымъ метеорологическимъ условіямъ, которыя, вообще говоря, весьма разнообразны и не могутъ быть съ точностью опредѣлены, если бы даже наблюдатель сопровождалъ свои отсчеты записями показаній хронометра, барометра и термометра. Уголъ наклоненія визирной линіи къ горизонту мѣняется въ теченіе сутокъ весьма значительно, и, главное, законы этихъ перемѣнъ до сихъ поръ еще мало изслѣдованы. Отсюда понятно, что вертикальные углы всего лучше наблюдать около полудня, во время наименьшей величины земного преломленія, когда изображенія хотя и колеблются, но въ среднемъ, довольно долго остаются почти неизмѣнными по высотѣ.

Совершенное раздѣленіе наблюденій горизонтальныхъ и вертикальныхъ угловъ имѣетъ еще и другое преимущество. Какъ бы ни была прочна установка, наблюдатель никогда не долженъ считать, что инструментъ его остается совершенно неподвижнымъ; поэтому, чѣмъ скорѣе произведенъ полный рядъ измѣреній всѣхъ окружающихъ направленій, тѣмъ болѣе вѣроятности, что они удовлетворительны; отсчеты направленій на перемѣщающемся лимбѣ не могутъ дать точныхъ результатовъ. Рядъ наблюденій съ отсчетами только по горизонтальному лимбу потребуетъ, конечно, почти вдвое меньше времени, чѣмъ тотъ же рядъ наблюденій, сопровождаемыхъ одновременно отсчетами и по горизонтальному, и по вертикальному лимбамъ.

Изъ всего сказаннаго понятно, почему геодезисты-практики приняли за правило наблюдать *горизонтальныя направленія во время спокойныхъ изображеній*, т. е. отъ 4 до 7 часовъ пополудни, или вообще около времени, составляющаго $^2/_3$ промежутка отъ полудня до заката Солнца; *вертикальные же углы* наблюдать *во время наименьшей величины земного преломленія*, т. е. отъ 12 до 2 часовъ дня. Это относится, конечно, къ дневнымъ наблюденіямъ. Ночью, пользуясь лампами и другими свѣтовыми сигналами, можно наблюдать съ одинаковымъ успѣхомъ отъ заката Солнца до его восхода.

Для увеличенія точности, какъ горизонтальные, такъ и вертикальные углы измѣряются по нѣсколько разъ; теорія и опытъ показываютъ, что ошибка результата, т. е. ошибка средняго вывода изъ многихъ измѣреній уменьшается пропорціонально корню квадратному изъ числа измѣреній. Однако извѣстно также, что небольшое число хорошихъ, точныхъ наблюденій даетъ въ среднемъ лучшій выводъ, чѣмъ большое число плохихъ, неточныхъ наблюденій. Необходимо помнить, что приведенные часы спокойныхъ изображеній представляютъ лишь общія указанія и относятся къ яснымъ лѣтнимъ днямъ и открытой равнинной странѣ. Въ зависимости отъ условій погоды и мѣстности спокойныя изображенія случаются въ различные часы дня. Изображенія бываютъ иногда замѣчательно хороши вскорѣ послѣ сильнаго дождя. Одного взгляда въ трубу, наведенную на отдаленный земной предметъ, достаточно, чтобы видѣть, хороши ли изображенія или дурны. Если они хороши, то наблюдатель, не теряя времени, долженъ приступить къ работѣ, если же они дурны, то лучше переждать нѣсколько часовъ и даже дней: длинные ряды наблюденій при дурныхъ, безпокойныхъ изображеніяхъ дадутъ результаты, не стоящіе одного ряда измѣреній, произведенныхъ при благопріятныхъ условіяхъ во время спокойныхъ изображеній *).

98. Подготовка къ наблюденіямъ. Имѣя въ виду краткость промежутка времени, наиболѣе благопріятнаго для производства наблюденій, особенно для измѣренія горизонтальныхъ направленій днемъ, необходимо заранѣе разыскать на горизонтѣ всѣ предметы, подлежащіе наблюденію съ данной точки, выписать приближенные углы между ними и составить программу наблюденій.

Разыскиваніе окружающихъ предметовъ производится или трубою самого угломѣрнаго инструмента, причемъ одновременно записываются и показанія верньеровъ или микроскоповъ съ точностью до $1'$, или же ручною зрительною трубою съ меньшимъ увеличеніемъ, но большимъ полемъ зрѣнія; въ послѣднемъ случаѣ, послѣ разысканія требуемаго предмета, должно тотчасъ навести на него трубу угломѣрнаго инструмента и сдѣлать отсчетъ по горизонтальному лимбу, дабы не пришлось потомъ терять времени на вторичное его разыскиваніе. Приближенное направленіе на предметъ берется транспортиромъ съ существующей карты, на которой тригонометрическія точки отмѣчены еще во время рекогносцировки (см. § 52). Въ такомъ случаѣ придется искать предметъ не ощупью, а лишь на небольшомъ, ограниченномъ пространствѣ горизонта. Если рекогносцировку и постройку знаковъ производилъ не самъ наблюдатель, а другое лицо, то полезно пользоваться его замѣтками о видимости точекъ и имѣющимися рисунками, изображающими контуръ горизонтовъ, наблюдаемыхъ съ данной точки на всѣ окружающія. Наконецъ, прибѣгаютъ иногда къ выводу третьяго угла

---

*) Опытъ показываетъ, что удовольствіе, испытываемое наблюдателемъ при хорошихъ изображеніяхъ, увеличиваетъ точность результатовъ. При дурныхъ изображеніяхъ настроеніе духа наблюдателя дѣлается мрачнымъ, отчего результаты всегда ухудшаются.

треугольника, какъ дополненія до 180° суммы двухъ другихъ, если, конечно, послѣдніе были уже измѣрены раньше.

Программа наблюденій составляется въ зависимости отъ способа измѣреній. У насъ въ Россіи примѣняютъ два способа: *круговые пріемы* и *измѣреніе отдѣльныхъ угловъ.*

Способъ круговыхъ пріемовъ, введенный *В. Я. Струве*, заключается въ слѣдующемъ. При данномъ положеніи горизонтальнаго лимба инструмента и его трубы (кругъ право — *П* или кругъ лѣво—*Л*) послѣдняя направляется и верньеры или микроскопы отсчитываются послѣдовательно на *всѣ* окружающіе предметы, начиная съ какого нибудь одного начальнаго, въ порядкѣ возрастанія ихъ азимутовъ (по направленію движенія часовой стрѣлки); затѣмъ труба направляется (вращая ее въ ту же сторону) вторично на первый предметъ, чтобы, по согласію отсчетовъ въ началѣ и концѣ, убѣдиться въ неизмѣнности положенія лимба. Эти дѣйствія составляютъ *первый полупріемъ.* Далѣе труба перекладывается въ лагерахъ или переводится черезъ зенитъ, т. е. изъ положенія кругъ лѣво ставится въ положеніе кругъ право (или наоборотъ), и тѣ же наблюденія повторяются въ обратномъ порядкѣ, въ порядкѣ уменьшенія азимутовъ (противъ стрѣлокъ часовъ), т. е. наводятъ трубу сперва на начальный предметъ, потомъ на послѣдній, на предпослѣдній и т. д. и оканчиваютъ опять на начальный. Эта вторая половина наблюденій называется *вторымъ полупріемомъ*, а совокупность обоихъ полупріемовъ при кругѣ право и при кругѣ лѣво составляетъ *полный пріемъ.* Среднее изъ отсчетовъ въ обоихъ полупріемахъ, т. е. среднее изъ отсчетовъ *Л* и *П*—180° будетъ, очевидно, освобождено отъ коллимаціонной ошибки, а разность *Л* — (*П* — 180°) покажетъ точность наблюденій и отсчетовъ, ибо эта разность, равная двойной коллимаціонной ошибкѣ, должна быть почти одинакова для всѣхъ предметовъ.

По окончаніи перваго пріема горизонтальный лимбъ переставляется на извѣстное число градусовъ (см. формулу 56) и наблюденія производятся опять на тѣ же предметы; чтобы не дѣлать лишнихъ перекладокъ горизонтальной оси или переводовъ трубы черезъ зенитъ, второй и вообще каждый послѣдующій пріемъ начинается при томъ положеніи круга, при которомъ былъ законченъ первый или предъидущій. Такимъ же порядкомъ производятся третій, четвертый и всѣ остальные пріемы.

Для простоты соображеній объ установкѣ лимба и для возможно полнаго исключенія случайныхъ и систематическихъ ошибокъ его черточекъ, первый пріемъ начинается въ положеніи, когда отсчетъ по первому верньеру или микроскопу равенъ приблизительно 0°. Число пріемовъ зависитъ отъ точности производимой тріангуляціи и достоинства инструмента. При измѣреніяхъ на первоклассныхъ тріангуляціяхъ дѣлаютъ обыкновенно 12 полныхъ пріемовъ, на второклассныхъ 6, а для точекъ 3-го класса довольствуются тремя пріемами. Если, напримѣръ, инструментъ имѣетъ два верньера или микроскопа и требуется произвести 12 пріемовъ, то установка лимба по начальному предмету и положеніе трубы въ пріемахъ и полупріемахъ могутъ быть представлены слѣдующею таблицею:

Пріемы.	Отсчеты на начальный предметъ.	Положенія трубы: Въ 1-мъ полупріемѣ.	Во 2-мъ полупріемѣ.	Классы наблюдаемыхъ точекъ.
I	0°	*Л*	*П*	1, 2 и 3
II	15	*П*	*Л*	1
III	30	*Л*	*П*	1 и 2
IV	45	*П*	*Л*	1
V	60	*Л*	*П*	1, 2 и 3
VI	75	*П*	*Л*	1
VII	90	*Л*	*П*	1 и 2
VIII	105	*П*	*Л*	1
IX	120	*Л*	*П*	1, 2 и 3
X	135	*П*	*Л*	1
XI	150	*Л*	*П*	1 и 2
XII	165	*П*	*Л*	1

Вообще при четномъ числѣ m верньеровъ или микроскоповъ и n пріемахъ наблюденій уголъ A, на который надо поворачивать лимбъ между послѣдовательными пріемами, вычисляется по формулѣ:

$$A = \frac{360^\circ}{m.n} \tag{56}$$

Выше было упомянуто, что одинъ изъ наблюдаемыхъ предметовъ принимается начальнымъ, и каждый полупріемъ начинается и оканчивается наведеніями на него. Если всѣ предметы одинаково хорошо видны, то за начальный избирается любой изъ нихъ; если же видимость различныхъ предметовъ не одинакова, то за начальный берется видимый хуже всѣхъ прочихъ (обыкновенно таковымъ оказывается наиболѣе удаленный или проектирующійся на темный фонъ): такъ какъ на него будетъ сдѣлано двойное число наведеній, то большее число наблюденій вознаградитъ плохую видимость, и, въ общемъ, наблюденія всѣхъ предметовъ въ пріемѣ окажутся приблизительно одинаковаго достоинства.

Нѣкоторые теоретики совѣтуютъ мѣнять начальный предметъ наблюденій послѣ каждаго пріема, справедливо замѣчая, что, при равенствѣ видимостей, такой порядокъ уравняетъ точность наблюденій всѣхъ предметовъ, но, во первыхъ, весьма рѣдко число предметовъ равно числу пріемовъ наблюденій, а, во вторыхъ, наблюдатель легко можетъ сбиться въ правильности перестановокъ лимба, и отсчеты на каждый предметъ не будутъ систематически распредѣлены по всему лимбу, черезъ кратныя дуги *).

Если инструментъ имѣетъ повѣрительную трубу, то ее надо, передъ началомъ наблюденій, направить на одинъ изъ окружающихъ предметовъ и именно на такой, который видимъ съ наибольшею отчетливостью: на посторонній ясно очерченный предметъ, напр. переплетъ рамы окна удаленнаго дома, или, наконецъ, выставить для наведенія повѣрительной трубы вспомогательную марку, прибивъ къ прочно забитому колу дощечку, выкрашенную въ бѣлый цвѣтъ съ рѣзкою черною полосою по серединѣ. Тутъ все дѣло въ томъ, чтобы направленіе визирной линіи повѣрительной трубы въ теченіе цѣлаго пріема оставалось неизмѣннымъ; поэтому если избранный для нея предметъ оказался не-

---

*) Занимательная система перестановки лимба, разсчитанная на правильное распредѣленіе измѣреній отдѣльныхъ направленій и угловъ, разработана прусскимъ геодезистомъ *Шрейберомъ*; она неоднократно примѣнялась въ Германіи и въ Америкѣ. См. *Schreiber*—Zeitschrift für Vermessungswesen, 1879, и *Витковскій* — Замѣтки о тріангуляціи штата Нью-Іоркъ (Записки В. Т. О. Главнаго Штаба, 1889).

удачнымъ, то въ первый же промежутокъ между пріемами цѣль для повѣрительной трубы должно перемѣнить.

Иногда случается, что въ общее число предметовъ, наблюдаемыхъ на данной тригонометрической точкѣ, входятъ точки разныхъ классовъ, число наведеній на которыя бываетъ различно. Тогда, для исключенія систематическихъ ошибокъ черточекъ лимба, наблюдатель, составляя программу, долженъ заранѣе разсчитать предметы по пріемамъ такъ, чтобы отсчеты при наведеніяхъ на каждый предметъ распредѣлились равномѣрно по всему лимбу. Въ послѣднемъ столбцѣ предъидущей таблицы перечислены классы точекъ, наблюдаемыхъ въ такомъ случаѣ въ каждомъ пріемѣ: точки перваго класса наблюдаются во всѣхъ 12-ти пріемахъ, и отсчеты при наведеніи на нихъ распредѣляются по лимбу черезъ 15°, точки второклассныя наблюдаются 6-ью пріемами съ отсчетами черезъ 30° и, наконецъ, точки третьеклассныя только 3-мя пріемами съ отсчетами черезъ 60°.

При наблюденіяхъ точекъ 2-го и 3-го классовъ не слѣдуетъ добиваться выполненія составленной программы во всей строгости. Часто случается, что въ данномъ пріемѣ какой нибудь предметъ виденъ не достаточно ясно или даже вовсе скрылся; его можно пропустить и пронаблюдать вновь въ одномъ изъ слѣдующихъ пріемовъ, въ которыхъ наблюдать его по программѣ не полагалось. Продолжительное выжиданіе видимости предмета не только сопровождается напрасною потерею времени спокойныхъ изображеній (и безъ того весьма непродолжительнаго), но, что еще хуже, вредитъ точности измѣренія угловъ, потому что считать лимбъ неподвижнымъ можно лишь въ теченіе небольшого промежутка времени и чѣмъ продолжительность пріема меньше, тѣмъ наблюденія выходятъ точнѣе.

Имѣя въ виду послѣднее обстоятельство, можно пропускать дурно видимые и почему либо вовсе не видимые предметы даже изъ числа точекъ 1-го класса, но съ тѣмъ, конечно, чтобы наблюдать ихъ потомъ въ особыхъ *дополнительныхъ пріемахъ*. Понятно, что въ такихъ пріемахъ надо ставить лимбъ въ то самое положеніе, которое онъ имѣлъ во время неполнаго пріема, и наблюдать не только пропущенные предметы, но и одну изъ ранѣе видѣнныхъ уже точекъ 1-го класса.

Иные предлагаютъ выставлять особую марку и наблюдать ее главною трубою во всѣхъ пріемахъ, замѣчая, что наблюденія будутъ возможны и въ томъ случаѣ, когда видна только одна изъ окружающихъ тригонометрическихъ точекъ. Но наблюденія марки въ сущности безполезны, на нихъ время теряется напрасно; притомъ же, если виденъ только одинъ изъ окружающихъ предметовъ, то, вѣроятно, погода очень неблагопріятна для наблюденій, и лучше прекратить ихъ вовсе.

Способъ измѣренія отдѣльныхъ угловъ отличается отъ способа круговыхъ пріемовъ только тѣмъ, что въ каждомъ положеніи инструмента наблюдаютъ не всѣ окружающіе предметы, а только *два*, такъ какъ уголъ есть разность отсчетовъ при наведеніи трубы послѣдовательно на два предмета (см. § 101).

Измѣреніе вертикальныхъ угловъ (зенитныхъ разстояній) производится обыкновенно круговыми пріемами, хотя здѣсь можно примѣнять способъ наблюденія отдѣльныхъ предметовъ.

Приступая къ наблюденіямъ, не мѣшаетъ повторить повѣрки, описанныя въ § 95, или убѣдиться по крайней мѣрѣ, что уровень инструмента вѣренъ, а горизонтальная его ось перпендикулярна къ вертикальной. Затѣмъ надо привести инструментъ въ горизонтальное положеніе. Для этого горизонтальную ось располагаютъ по направленію двухъ подъемныхъ винтовъ и, если пузырекъ верхняго уровня не стоитъ по серединѣ трубки, вращаютъ эти винты въ противоположныя стороны, пока пузырекъ не станетъ по серединѣ. Послѣ этого алидадную часть инструмента поворачиваютъ на 90° и, вращеніемъ третьяго подъемнаго винта, приводятъ пузырекъ уровня на середину трубки и въ этомъ положеніи, перпендикулярномъ къ первому. Дѣйствія эти повторяютъ нѣсколько разъ, мѣняя выборъ подъемныхъ винтовъ. Инструментъ считается установленнымъ правильно лишь тогда, когда пузырекъ уровня на горизонтальной оси, при любомъ положеніи верхней части, будетъ если и не всегда по серединѣ трубки, то близко къ ней, и во всякомъ случаѣ ни одинъ изъ концовъ пузырька не скрывается за оправою (когда судить о наклонности оси невозможно). Чтобы не вращать напрасно подъемные винты, необходимо помнить, что пузырекъ приближается къ подъемному винту, если послѣдній ввинчиваютъ, т. е., смотря сверху, головку его поворачиваютъ по направленію движенія стрѣлокъ часовъ.

Самое производство наблюденій на тригонометрическихъ точкахъ различно, смотря по тому, измѣряютъ-ли горизонтальные или вертикальные углы, и въ первомъ случаѣ имѣется-ли при инструментѣ повѣрительная труба или не имѣется, а также одинъ-ли наблюдатель или ихъ двое (наблюдатель и помощникъ). Въ послѣдующихъ §§ изложены правила наблюденій во всѣхъ этихъ частныхъ случаяхъ, причемъ имъ преднославъ еще § 99, въ которомъ объяснены общія основанія всякаго рода наблюденій на тригонометрическихъ точкахъ.

99. Производство наблюденій. Измѣреніе горизонтальныхъ и вертикальныхъ угловъ на тріангуляціяхъ представляетъ едва-ли не простѣйшій видъ наблюденій въ полѣ; однако, чтобы достигать точнѣйшихъ результатовъ съ даннымъ инструментомъ, наблюдатель долженъ умѣть установить свой инструментъ и выучиться извѣстнымъ образомъ дѣлать самыя наведенія.

Само собою разумѣется, что инструментъ долженъ стоять по возможности прочно. Если наблюденія производятся съ земли, подъ простою пирамидою, то ножки штатива должны быть надежно воткнуты въ землю дюймовъ на 5—6; въ мѣстахъ, гдѣ выросла трава, верхній слой дерна нужно снять, иначе ножки штатива будутъ, какъ говорится, пружинить. Когда грунтъ болотистый или песчаный, то весьма полезно вокругъ штатива положить нѣсколько досокъ, и наблюдатель долженъ при ходьбѣ около инструмента становиться только на эти доски, и во всякомъ случаѣ избѣгать становиться на землю подлѣ самыхъ ножекъ штатива. Временную досчатую настилку хорошо дѣлать также на колокольняхъ, и вообще когда наблюденія производятся съ постояннаго мѣстнаго предмета. Платформы двойныхъ пирамидъ и сигналовъ устраиваются такъ, чтобы доски настилки отнюдь не касались столика подъ инструментъ, но передъ наблюденіями необходимо внимательно осмотрѣть устройство пола и убѣдиться, что при прогибѣ досокъ подъ тяжестью наблюдателей онѣ не могутъ касаться ножекъ штатива или столика. Самъ наблюдатель отнюдь не должен задѣвать за инструментъ рукавами и т. п. Чтобы не толкнуть трубы козырькомъ фуражки или полями шляпы, надо для наблюденій надѣвать мягкую дорожную шапку безъ полей.

Для защиты инструмента отъ непосредственнаго дѣйствія солнечныхъ лучей и вѣтра, у насъ довольствуются большимъ зонтикомъ, который держится поочереди рабочими; но неопытный и мало заинтересованный наблюденіями рабочій можетъ нечаянно толкнуть инструментъ локтемъ или ручкою зонтика, поэтому лучше имѣть переносную палатку, въ родѣ тѣхъ, какими пользуются американскіе геодезисты *). Это обыкновенная холщевая палатка съ высокою коническою крышею; во время наблюденій полы палатки нѣсколько опускаются, такъ что подъ обручемъ крыши образуется, на высотѣ трубы инструмента, щель для наблюденія окружающихъ предметовъ. На ночь и вообще на время перерыва наблюденій крыша опускается до самой земли или до пола платформы и отлично защищаетъ инструментъ отъ дождя и вѣтра. Необходимо замѣтить, что во все время работы на одной точкѣ американцы оставляютъ инструментъ подъ палаткою на его штативѣ, при наблюденіяхъ же только подъ зонтикомъ поневолѣ приходится каждый день, а то и по нѣсколько разъ въ день убирать инструментъ въ ящикъ; частая же разборка и укладка большихъ и тяжелыхъ инструментовъ едва ли способствуетъ ихъ сохраненію.

Наблюденіямъ съ высокихъ платформъ весьма часто вредятъ гнутіе и крученіе столбовъ отъ нагрѣванія Солнцемъ и дрожаніе ихъ отъ вѣтра; при сильномъ вѣтрѣ въ такихъ случаяхъ весьма часто вовсе нельзя дѣлать точныхъ наведеній. Для предохраненія внутренней пирамиды отъ дѣйствія лучей Солнца и отъ вѣтра можно посовѣтовать привѣшивать къ наружной пирамидѣ съ солнечной или навѣтренной стороны парусинные брезенты.

Каждое наблюденіе заключается въ наведеніи трубы на

---

*) См. *Витковскій* — О геодезическихъ работахъ въ Соединенныхъ Штатахъ Сѣверной Америки (Извѣстія Императорскаго Русскаго Географическаго Общества, т. XXIX, 1893).

предметъ и въ отсчитываніи верньеровъ или микроскоповъ. Казалось бы, что при наведеніи слѣдуетъ вводить изображеніе наблюдаемой части предмета (визирнаго цилиндра тригонометрическаго знака или креста колокольни) строго въ середину прямоугольника, образуемаго взаимнымъ пересѣченіемъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ нитей окулярной сѣтки, т. е. такъ, какъ изображено на черт. 116. Однако подобное наведеніе возможно лишь при весьма рѣзкихъ и хорошо освѣщенныхъ предметахъ или же при наблюденіи геліотроповъ и ночныхъ сигналовъ. Въ большинствѣ же случаевъ, при наблюденіи отдаленныхъ и слабо освѣщенныхъ тригонометрическихъ знаковъ, изображенія ихъ, хорошо видимыя въ боковыхъ частяхъ поля зрѣнія, становятся неясными и почти исчезаютъ, чуть только наблюдатель введетъ ихъ въ центръ упомянутаго прямоугольника. Это явленіе, вѣроятно, происходитъ оттого, что, не взирая на установки окуляра по глазу и по фокусу и уничтоженіе параллакса нитей, дѣйствительное изображеніе предмета все же не находится строго въ плоскости сѣтки нитей, такъ что мнимыя изображенія предмета и сѣтки оказываются не на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ глаза, и послѣдній, для ясности видѣнія, долженъ приспособляться къ нимъ порознь. Пока изображеніе предмета находится въ боковыхъ частяхъ поля зрѣнія, глазъ легко можетъ отдѣльно приспособляться къ такимъ различнымъ разстояніямъ, но чуть изображеніе введено между близкими другъ къ другу нитями центральнаго прямоугольника, рѣзкія и отчетливыя изображенія нитей настолько приковываютъ къ себѣ вниманіе глаза, что онъ остается приспособленнымъ только на ихъ разстояніе, и никакія усилія воли не могутъ заставить его въ то же время отчетливо видѣть слабое изображеніе земного предмета. Къ счастью, строгое введеніе въ центръ сѣтки необходимо только въ томъ случаѣ, если бы одновременно измѣрялись и горизонтальное направленіе, и его уголъ наклоненія, т. е. если бы вслѣдъ за наведеніемъ отсчитывались бы и горизонтальный, и вертикальный лимбы. На самомъ же дѣлѣ измѣренія горизонтальныхъ и вертикальныхъ угловъ производятся въ разное время, и потому вводить изображеніе предмета внутрь самаго прямоугольника сѣтки нѣтъ существенной надобности. Достаточно, если при измѣреніи горизонтальныхъ угловъ изображеніе предмета вводится только вообще въ середину между вертикальными нитями, выше или ниже горизонтальныхъ *), а при измѣреніи вертикальныхъ угловъ — вообще въ середину между горизонтальными нитями, правѣе или лѣвѣе вертикальныхъ.

Во всякомъ случаѣ надо слѣдить, чтобы всѣ наблюдаемые предметы вводились однообразно, не очень далеко отъ середины поля зрѣнія и по возможности въ то же мѣсто сѣтки, потому что при нѣкоторой неправильности въ установкѣ сѣтки, т. е. когда нити ея не вполнѣ горизонтальны и вертикальны, наведенія въ разныхъ мѣстахъ сѣтки будутъ вредить точности результатовъ наблюденій.

Все сказанное относится къ сѣткамъ въ видѣ системы двойныхъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ нитей (черт. 115, *B*), которыми снабжены почти всѣ угломѣрные инструменты, употребляемые на тріангуляціяхъ въ Россіи. При сѣткахъ съ равно наклоненными нитями (черт. 115, *A*) изображеніе предмета, при измѣреніи какъ горизонтальныхъ, такъ и вертикальныхъ угловъ, надо вводить въ самый центръ сѣтки и, какъ показываетъ опытъ, наведенія отъ этого дѣлаются точнѣе.

При наблюденіи земныхъ предметовъ на тріангуляціяхъ труба направляется сперва приблизительно, для чего верхнюю часть инструмента или самую трубу вращаютъ просто рукою; затѣмъ зажимной винтъ закрѣпляется, и окончательное наведеніе производится уже плавнымъ и медленнымъ вращеніемъ микрометрическаго винта. Алидада съ лагерными стойками, при измѣреніи горизонтальныхъ угловъ, и горизонтальная ось инструмента, при измѣреніи угловъ вертикальныхъ, вращаются микрометрическими винтами только въ томъ случаѣ, когда послѣдніе ввинчиваются, т. е. когда ихъ головки, смотря спа-

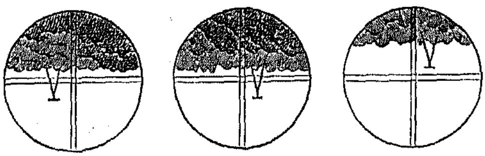
---

*) При измѣреніи горизонтальныхъ угловъ изображенія предметовъ, проектирующіяся на небо, выгоднѣе вводить нѣсколько ниже горизонтальныхъ нитей: въ этомъ случаѣ яркость поля зрѣнія ослабляется, и изображеніе слабо освѣщеннаго земного предмета выдѣляется отчетливѣе (въ трубѣ получается обратное изображеніе, и небо занимаетъ нижнюю часть поля зрѣнія).

ружи, вращаются по направленію движенія часовой стрѣлки; при обратномъ вращеніи микрометрическіе винты только отступаютъ отъ соотвѣтствующихъ частей (столбиковъ клещей и приливовъ колецъ), а алидада и горизонтальная ось вращаются лишь отъ упругости противодѣйствующихъ спиральныхъ пружинъ, выталкивающихъ стержни изъ ихъ трубочекъ (черт. 129, 130, 132 и 134). Отсюда понятно, что плавное и медленное наведеніе трубы возможно только при ввинчиваніи микрометрическихъ винтовъ; при вывинчиваніи ихъ труба хотя и будетъ вращаться, но уже не по волѣ наблюдателя и потому, вообще говоря, не совсѣмъ плавно. Когда масло, которымъ смазываютъ стержни въ трубочкахъ, сгустится (отъ времени или отъ низкой температуры), или когда пружины ослабнутъ, то обратное движеніе будетъ происходить толчками или даже вовсе прекратится. Вотъ почему, при окончательномъ наведеніи трубы, какъ для измѣренія горизонтальныхъ, такъ и для измѣренія вертикальныхъ угловъ, принято непремѣннымъ правиломъ *ввинчивать микрометрическіе винты*, т. е. вращать ихъ головки, смотря снаружи, по направленію движенія стрѣлокъ часовъ. Такое вращеніе называется *положительнымъ*, потому что при немъ алидадные круги вращаются обыкновенно въ сторону возрастающихъ дѣленій лимбовъ и по направленію движенія стрѣлокъ часовъ. Если наблюдатель замѣтилъ, что труба переведена, такъ что для введенія изображенія предмета въ середину сѣтки слѣдуетъ вращать микрометрическій винтъ въ обратную сторону, то онъ долженъ сперва повернуть винтъ значительно назадъ, чтобы труба была опять недоведена, и окончательное наведеніе сдѣлать вновь положительнымъ вращеніемъ микрометрическаго винта. При вращеніи микрометрическихъ винтовъ надо брать головку *двумя пальцами* по концамъ одного діаметра, а отнюдь не нажимать однимъ пальцемъ; въ послѣднемъ случаѣ винтъ можетъ погнуться, да и наведеніе не можетъ быть сдѣлано съ возможною точностью.

Итакъ, для устраненія мертваго хода и несовершенства противодѣйствующихъ пружинъ нужно строго держаться правила: каждое наведеніе *оканчивать положительнымъ вращеніемъ* микрометрическаго винта. Для сбереженія времени надо избѣгать лишней работы и потому, зная впередъ, въ какую сторону передвигается изображеніе предмета въ трубѣ при положительномъ вращеніи микрометрическаго винта, наблюдатель, устанавливая трубу рукою, закрѣпляетъ ее уже сразу такъ, чтобы, для окончательнаго наведенія, пришлось потомъ сдѣлать лишь небольшое положительное вращеніе микрометрическимъ винтомъ. Если, напримѣръ, въ данномъ инструментѣ при положительномъ вращеніи микрометрическаго винта изображеніе предмета передвигается въ полѣ зрѣнія слѣва направо, то надо закрѣплять клещи въ то мгновеніе, когда изображеніе предмета находится немного лѣвѣе нитей (черт. 142).

При измѣреніи горизонтальныхъ угловъ предварительное положеніе изображенія для даннаго инструмента будетъ всегда



Черт. 142. Черт. 143. Черт. 144.

одинаково. При измѣреніи же угловъ вертикальныхъ оно зависитъ отъ положенія трубы. Если, напримѣръ, при кругѣ лѣво надо предварительно ставить изображеніе предмета ниже нитей (черт. 143), то при кругѣ право надо ставить его выше ихъ (черт. 144) и наоборотъ. Словомъ, нужно, чтобы окончательное введеніе въ середину между горизонтальными нитями производилось положительнымъ вращеніемъ микрометрическаго винта при обоихъ положеніяхъ трубы *).

Пока пальцы касаются микрометрическаго винта, нельзя поручиться, чтобы они не повернули его еще, поэтому, послѣ окончательнаго наведенія, наблюдатель долженъ совсѣмъ убрать

---

*) Отъ постояннаго вращенія микрометрическихъ винтовъ въ одну сторону (положительную) они ввинтятся, наконецъ, такъ, что дальнѣйшее вращеніе въ положительную сторону будетъ невозможно; чтобы не доводить до этого, слѣдуетъ, въ промежуткахъ между наведеніями, отводить микрометрическіе винты назадъ, вращая ихъ въ обратную сторону.

руку, вообще нигдѣ и ничѣмъ не касаться инструмента и штатива, а только смотрѣть въ трубу и тогда еще разъ удостовѣриться, что наведеніе сдѣлано правильно.

По привычкѣ, а можетъ быть и по аналогіи съ большимъ развитіемъ правой руки, наблюдатели смотрятъ въ трубу обыкновенно правымъ глазомъ. Однако продолжительное напряженіе одного глаза не можетъ не отразиться впослѣдствіи на силѣ зрѣнія. Большинство людей пользуется для работъ, требующихъ вниманія, правою рукою, при актѣ же зрѣнія, кромѣ случаевъ наблюденій въ монокулярныя зрительныя трубы и микроскопы, человѣкъ пользуется всегда обоими глазами въ равной степени, и ослабленіе остроты зрѣнія одного изъ глазъ сопряжено съ извѣстными неудобствами для обыденныхъ занятій. Между тѣмъ лица, наблюдающія всегда однимъ глазомъ, настолько изощряютъ его, что другой глазъ дѣлается потомъ плохимъ помощникомъ своего товарища. Поэтому всего умнѣе пользоваться при наблюденіяхъ поочередно обоими глазами; но такъ какъ у большинства людей они не одинаковы, и, слѣдовательно, по каждому глазу надо отдѣльно устанавливать окулярную трубочку, да притомъ каждый глазъ можетъ имѣть свою личную ошибку, то надо цѣлый рядъ наблюденій (пріемъ) производить однимъ какимъ нибудь глазомъ и чередовать глаза для разныхъ рядовъ (пріемовъ). Не наблюдающій глазъ не слѣдуетъ щурить, а надо держать открытымъ; для защиты же его отъ дневного разсѣяннаго свѣта можно прикрѣплять къ окулярному колѣну трубы легкій деревянный или картонный зачерненный и переворачивающійся щитокъ.

100. Измѣреніе горизонтальныхъ направленій. Когда программа наблюденій готова, а инструментъ установленъ и вывѣренъ, то, при благопріятной погодѣ и спокойныхъ изображеніяхъ, можно начать самыя наблюденія. Положимъ сперва, что наблюдателей двое, причемъ, для краткости, будемъ называть наблюдателя при главной трубѣ просто *наблюдателемъ*, а наблюдателя при повѣрительной трубѣ — *помощникомъ*. Для удобнаго сидѣнія послѣдняго подлѣ штатива ставится табуретъ или инструментальный ящикъ.

Наблюдатель закрѣпляетъ алидадный кругъ такъ, чтобы нуль 1-го верньера или микроскопа сталъ приблизительно на 0° по лимбу, и, открѣпивъ нижній зажимной винтъ, вращаетъ горизонтальный лимбъ и всю верхнюю часть инструмента *) до тѣхъ поръ, пока главная труба не будетъ направлена приблизительно на предметъ, избранный начальнымъ, т. е. пока этотъ предметъ не окажется въ полѣ зрѣнія, вблизи вертикальныхъ нитей окуляра. Одновременно съ этимъ помощникъ направляетъ повѣрительную трубу на избранный для нея предметъ или марку и закрѣпляетъ ее по азимуту и по высотѣ въ положеніи, когда изображеніе марки окажется вблизи вертикальныхъ нитей ея окуляра. Когда наблюдатель, установивъ изображеніе предмета въ положеніе, показанное на черт. 142, скажетъ «готово», тогда помощникъ вводитъ изображеніе марки точно въ середину между нитями окуляра повѣрительной трубы и, произнеся «есть», *продолжаетъ смотрѣть въ трубу*, пока наблюдатель не сдѣлаетъ точнаго наведенія (оканчивая вращеніе микрометрическаго винта положительнымъ движеніемъ). Въ моментъ точнаго наведенія (черт. 116) наблюдатель тоже произноситъ «есть», а помощникъ повторяетъ это слово, давая знать, что и повѣрительная труба (а значитъ и лимбъ) стоитъ правильно; послѣ этого наблюдатель приступаетъ къ отсчетамъ верньеровъ или микроскоповъ, начиная съ перваго, въ послѣдовательномъ ихъ порядкѣ, а помощникъ записываетъ отсчеты въ журналъ. Если въ промежутокъ времени, покуда наблюдатель дѣлаетъ окончательное наведеніе, изображеніе марки въ повѣрительной трубѣ отошло отъ середины нитей, то помощникъ произноситъ «сошло», и наведенія повторяются въ прежнемъ порядкѣ, т. е. помощникъ опять наводитъ свою трубу, говоритъ «есть» и выжидаетъ, пока и наблюдатель скажетъ «есть».

Окончивъ отсчеты и записи перваго предмета, наблюдатель открѣпляетъ зажимной винтъ алидады и направляетъ главную

*) Въ инструментахъ со свободнымъ лимбомъ и съ микроскопами, напр. въ инструментахъ Репсольда, Бамберга и другихъ, наблюдатель сперва направляетъ трубу на избранный начальный предметъ и затѣмъ уже подводитъ 0° лимба подъ 1-ый микроскопъ.

трубу на второй; закрѣпивъ снова алидаду въ моментъ, когда изображеніе этого второго предмета будетъ въ полѣ зрѣнія и вблизи вертикальныхъ нитей, онъ произноситъ «готово». Помощникъ смотритъ въ повѣрительную трубу, наводитъ ее вновь точно на марку, произноситъ «есть» и дожидается, пока и наблюдатель скажетъ «есть»; затѣмъ производятся отсчеты и записи, наблюдатель переводитъ главную трубу на третій предметъ и т. д. на всѣ послѣдующіе, кончая вновь начальнымъ. Послѣ этого главная труба переводится черезъ зенитъ или перекладывается въ лагерахъ, а алидада поворачивается на 180°, и наблюденія на тѣ же предметы повторяются въ обратномъ порядкѣ.

Тотчасъ по окончаніи перваго пріема наблюдатель приступаетъ ко второму. Для этого онъ открѣпляетъ зажимной винтъ алидады, поворачиваетъ ее на извѣстный уголъ (опредѣляемый формулою 56-ою), взглядывая по верньерамъ или микроскопамъ, и вновь закрѣпляетъ алидадный зажимной винтъ. Затѣмъ онъ открѣпляетъ нижній зажимной винтъ и поворачиваетъ всю верхнюю часть инструмента до тѣхъ поръ, пока въ полѣ главной зрительной трубы не покажется начальный предметъ, и опять закрѣпляетъ нижній зажимной винтъ. Очевидно, лимбъ инструмента повернется при этомъ на тотъ именно уголъ, на который была повернута алидада. Тогда помощникъ открѣпляетъ азимутальный зажимной винтъ повѣрительной трубы, поворачиваетъ ее такъ, чтобы вновь увидѣть въ нее марку, и опять закрѣпляетъ этотъ винтъ. Выше было объяснено, что помощникъ можетъ теперь навести повѣрительную трубу и на другую цѣль.

Подобнымъ же образомъ совершаются переходы къ третьему и всѣмъ слѣдующимъ пріемамъ, а самыя наблюденія производятся, какъ въ первомъ, т. е. въ теченіе перваго полупріема каждаго пріема алидада и главная труба поворачиваются въ одномъ, а въ теченіе второго—въ обратномъ направленіяхъ.

Въ случаѣ наступленія ненастной погоды или дурныхъ изображеній наблюденія прерываются, но это дѣлается обыкновенно только послѣ окончанія полнаго пріема. Если же приходится прервать наблюденія до окончанія пріема, то съ наступленіемъ благопріятныхъ обстоятельствъ надо произвести наблюденія прерваннаго пріема съ начала. Такъ какъ каждый пріемъ представляетъ самостоятельное цѣлое, то отдѣльные пріемы можно производить даже въ разные дни.

Въ полевой журналъ, кромѣ отсчетовъ наблюдателя, помощникъ записываетъ названіе точки стоянія и наблюдаемыхъ предметовъ, время наблюденія, состояніе погоды, качество изображеній и пр. Вообще не надо скупиться на разнаго рода замѣчанія въ полѣ: они, кромѣ объясненій данныхъ наблюденій, составляютъ драгоцѣнный матеріалъ для будущихъ изслѣдователей. Но главное достоинство замѣтокъ въ полѣ должно заключаться въ ихъ *безусловной правдивости*: надо записывать то, что есть, что видно, и не писать того, чего нѣтъ.

Для сокращенія письма, особенно для замѣтокъ о степени видимости отдаленныхъ предметовъ, пользуются условными знаками, значеніе которыхъ конечно надо объяснить въ началѣ журнала, потому что весьма часто наблюденія вычисляются и обрабатываются не самимъ наблюдателемъ, а другимъ лицомъ. Обыкновенно записи отсчетовъ хорошихъ наведеній не сопровождаются частными замѣтками, кромѣ общихъ указаній въ началѣ пріема; если предметъ былъ видимъ не совсѣмъ ясно, какъ бы въ туманѣ, а послѣ введенія его изображенія въ середину между вертикальными нитями вовсе скрылся, но наблюдатель все же увѣренъ, что видитъ именно тотъ предметъ, названіе котораго поставлено въ журналѣ—передъ отсчетомъ ставятъ четыре точки (:: — неточное наведеніе); если же вслѣдствіе отдаленности и слабаго освѣщенія наблюдатель не увѣренъ, наведена ли труба на данный тригонометрическій знакъ или на посторонній предметъ—вершину дерева и т. п., то въ журналѣ ставится у соотвѣтствующаго отсчета знакъ вопроса (? — сомнительное наблюденіе). Эти отмѣтки имѣютъ важное значеніе при выводѣ среднихъ чиселъ изъ всѣхъ пріемовъ: отсчеты со знакомъ ? берутся для средняго вывода лишь въ томъ случаѣ, если они согласны съ наблюденіями въ другихъ пріемахъ, въ противномъ же случаѣ они безусловно отбрасываются и среднее выводится только изъ прочихъ пріемовъ; отсчеты же, помѣченные знакомъ ::, ни въ какомъ случаѣ не отбрасываются, а если они значительно отличаются отъ результатовъ другихъ пріемовъ, то, при выводѣ средняго, имъ придается только меньшій вѣсъ *).

Кромѣ записыванія отсчетовъ и разныхъ замѣчаній наблюдателя, помощникъ, въ промежуткахъ, когда труба переводится съ одного предмета на другой, выводитъ, тутъ же въ полѣ, среднія изъ отсчетовъ верньеровъ или микроскоповъ; въ теченіе же второй половины пріема, кромѣ этихъ среднихъ, онъ выписываетъ среднія изъ отсчетовъ при кругѣ лѣво и при кругѣ право (уменьшая послѣднія на 180°) и разности между ними (двойную коллимаціонную ошибку), по формуламъ

$$N = \frac{Л + (П - 180^\circ)}{2} \tag{57}$$

$$2c = Л - (П - 180^\circ) \tag{58}$$

Если бы наблюденія и отсчеты были абсолютно точны, то величина $2c$ оставалась бы неизмѣнною для всѣхъ предметовъ; на самомъ же дѣлѣ она можетъ колебаться въ ту или другую сторону на величины, *не превосходящія однако возможныхъ* ошибокъ наблюденій и отсчетовъ. Напримѣръ, для малыхъ инструментовъ съ точностью отсчетовъ по верньерамъ въ $10''$ разности $Л - (П - 180^\circ)$ не должны различаться болѣе, чѣмъ на $30''$ и вообще не болѣе, какъ на тройную величину точности отсчета. Колебанія величины $2c$ въ этихъ предѣлахъ отнюдь не указываютъ на дѣйствительныя перемѣны коллимаціонной ошибки. Разногласія происходятъ лишь отъ того, что на коллимаціонную ошибку здѣсь, такъ сказать, сваливаютъ совокупность всѣхъ ошибокъ наблюденій (см. § 103).

По согласію указанныхъ разностей для отдѣльныхъ предметовъ *помощникъ слѣдитъ, не сдѣлана ли наблюдателемъ грубая ошибка въ отсчетахъ*. Весьма часто случаются ошибки въ градусахъ или въ десяткахъ минутъ. Каждая ошибка обнаруживается во второй половинѣ пріема, и помощникъ обязанъ замѣтить это съ тѣмъ, чтобы наблюдатель повторилъ отсчеты; если ошибка была сдѣлана въ первомъ полупріемѣ, то, не по-

*) *Замѣчанія о записяхъ въ журналъ относятся не только къ измѣренію горизонтальныхъ направленій, но вообще ко всякимъ наблюденіямъ.*

вторяя наблюденій, надо лишь исправить запись перваго полупріема, перечеркнувъ старую запись и написавъ сверху новую, но отнюдь не вытирая старой записи резинкою. Не слѣдуетъ также вырывать страницъ изъ полевого журнала *).

По окончаніи пріема, въ то время, когда наблюдатель переставляетъ лимбъ, помощникъ выводитъ направленія на всѣ предметы, принимая для начальнаго направленія 0°0′0″.0. Это производится простымъ вычитаніемъ средняго отсчета на первый предметъ изъ среднихъ для всѣхъ прочихъ. Для начальнаго предмета берется среднее изъ записей въ началѣ и въ концѣ полупріемовъ.

Для поясненія сказаннаго въ нижеслѣдующихъ таблицахъ приведены страницы изъ журналовъ наблюденій горизонтальныхъ направленій. Первая таблица представляетъ наблюденія малымъ универсаломъ съ верньерами, а вторая — большимъ универсаломъ съ микроскопами (оборотъ винта $1^{\delta} = 5'$).

Пирамида Кузьмино, 2 Іюня 1883, 5 ч. дня.

Ясно, слабый восточный вѣтеръ.

I. Наблюдатель: NN Помощникъ: NN

№	Названія точекъ.	Отсчеты верньеровъ *Л.*	Отсчеты верньеровъ *П.*	Среднія *Л* и *П*.	2 *c*.	Среднія изъ *Л* и *П*.	Направленія.
						0 36 13.2	
1	Кабози, сигн.	0°35′30″ 36 0	180°37′10″ 36 15	0°35′45″ 36 43	—58″	0°36′14″.0	0° 0′ 0″.0
2	Пулково, пир.	67 52 30 52 20	247 53 50 53 10	67 52 25 53 30	— 65	67 52 57.5	67 16 44.3
3	Царское Село Кол. Собора.	286 32 30 32 0	106 33 10 33 0	286 32 15 33 5	— 50	286 32 40.0	285 56 26.8
1	Кабози, сигн.	0 35 40 35 50	180 37 0 36 20	0 35 45 36 40	— 55	0 36 12.5	

*) На геодезическихъ работахъ въ Соединенныхъ Штатахъ Сѣверной Америки производителямъ работъ вмѣнено въ обязанность послѣ окончанія наблюденій на извѣстной точкѣ снимать копію съ полевого жур-

Пирамида Стародворье, 15 Октября 1889, 6 ч. дня.

Пасмурно, сильный и холодный вѣтеръ.

V. Наблюдатель: NN Помощникъ: NN

№	Названія точекъ.	Отсчеты микроскоповъ *Л.*	Отсчеты микроскоповъ *П.*	Среднія *Л* и *П.*	2 *c.*	Направленія.
		δ	δ	120 6 17.44		
1	Медуши,	120° 0'+1 1 14	300° 0'+1 1 12	120° 6'19".50	+5".25	0° 0' 0".00
	сигн.	1 16	1 8	6 14.25		
		0+1 1 23	0+1 1 19	120 6 16.88		
		1 25	1 18			
2	Воронино,	192 40+0 4 0	12 40+0 3 50	192 44 3.00	+7.00	72 37 42.06
	вѣха.	4 0	3 45	43 56.00		
		40+0 4 6	40+0 4 5	192 43 59.50		
		4 6	4 4			
3	Рудицы,	310 50+1 5 0	130 50+1 4 43	310 60 2.75	+9.75	190 53 40.44
	пирам.	4 58	4 43	59 53.00		
		50+1 5 6	50+1 5 2	310 59 57.88		
		5 7	5 4			
4	Каменка,	350 20+1 1 8	170 20+1 0 40	350 26 3.75	+8.25	230 19 42.19
	сигн.	1 3	0 41	25 55.50		
		20+1 1 1	20+1 1 10	350 25 59.63		
		1 3	1 11			
1	Медуши,	120 0+1 1 17	300 0+1 1 11	120 6 23.00	+10.00	
	сигн.	1 12	1 8	6 13.00		
		0+1 1 32	0+1 1 16	120 6 18.00		
		1 31	1 17			

Чтобы не терять времени на разыскиваніе наблюдавшихся уже предметовъ, помощникъ при второмъ и слѣдующихъ пріемахъ впередъ говоритъ наблюдателю, на какіе градусы и ми-

нала и отправлять ее въ Управленіе Съемки. Выводъ результатовъ производится затѣмъ независимо наблюдателемъ по полевому журналу и особыми вычислителями при Управленіи по доставленнымъ копіямъ. Такой порядокъ не только доставляетъ повѣрку вычисленій, но и предохраняетъ отъ опасности лишиться драгоцѣнныхъ матеріаловъ въ случаѣ утраты полевого журнала отъ огня или иныхъ несчастій.

нуты слѣдуетъ ставить первый верньеръ или микроскопъ для каждаго предмета. Соотвѣтствующія числа онъ получаетъ простымъ прибавленіемъ числа градусовъ, на которое повернули лимбъ, къ записямъ перваго пріема. Точно также на обязанности помощника лежитъ выписка всѣхъ предметовъ въ послѣдовательномъ порядкѣ азимутовъ для каждаго пріема (сообразно программѣ наблюденій, см. таблицу § 98), чтобы ни одинъ изъ нихъ не былъ случайно пропущенъ, а въ пріемахъ, въ которыхъ должны наблюдаться не всѣ предметы, наблюдатель не наводилъ напрасно на предметъ, не подлежащій наблюденію. Надо имѣть въ виду, что наблюдатель, занятый исключительно наведеніями и отсчетами, не можетъ помнить порядка всѣхъ предметовъ, а тѣмъ болѣе ихъ положенія по горизонту, и потому указанія помощника, имѣющаго передъ глазами полевой журналъ, ускоряютъ и облегчаютъ работу.

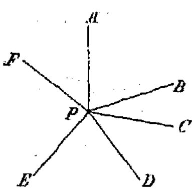
Въ § 102 подробно выяснено значеніе повѣрительной трубы при измѣреніи горизонтальныхъ направленій и необходимость имѣть при ней отдѣльнаго наблюдателя (помощника); однако таковаго можетъ и не быть. Опытъ показалъ, что и безъ помощника можно производить точныя наблюденія, когда инструментъ стоитъ совершенно прочно, напримѣръ, на каменномъ столбѣ или на штативѣ, врытомъ въ землю. Но наблюденія безъ помощника идутъ конечно медленнѣе, такъ какъ смотрѣть въ обѣ трубы и записывать отсчеты долженъ уже самъ наблюдатель. Въ общемъ порядокъ наблюденій *безъ помощника* тотъ же, что и съ помощникомъ, но передъ каждымъ наведеніемъ главной трубы наблюдатель смотритъ въ повѣрительную, и если изображеніе марки отошло отъ середины нитей, то онъ исправляетъ положеніе нижнимъ микрометрическимъ винтомъ; послѣ же окончательнаго наведенія главной трубы наблюдатель вторично взглядываетъ въ повѣрительную, убѣждается, что инструментъ не измѣнилъ своего положенія, и только тогда дѣлаетъ отсчеты. Если произошло измѣненіе, то наблюдатель снова наводитъ и повѣрительную, и главную трубы. Такъ какъ наблюдатель долженъ имѣть свободными обѣ руки, то для журнала не мѣшаетъ поставить подлѣ инструментальный ящикъ, табуретъ и т. п., или же передавать журналъ, во время наведеній, въ руки кого либо изъ прислуги. Чтобы не задерживать пріема, среднія выводятся не послѣ каждаго отсчета, а по окончаніи цѣлаго пріема, но, для избѣжанія промаховъ въ градусахъ и десяткахъ минутъ, наблюдатель во второмъ полупріемѣ долженъ повѣрять отсчеты по записямъ перваго полупріема.

Наконецъ необходимо упомянуть и о случаѣ, когда приходится наблюдать инструментомъ, не имѣющимъ повѣрительной трубы. Такіе инструменты можно ставить только на прочное основаніе: вмѣсто непрерывной повѣрки неподвижности лимба, эта неподвижность выясняется лишь по окончаніи каждаго полупріема, при вторичномъ наведеніи на начальный предметъ. Если расхожденія отсчетовъ въ началѣ и въ концѣ полупріема превысятъ возможный предѣлъ (величину въ $1^1/_2$ раза большую точности отсчета лимба), то такой полупріемъ придется вовсе отбросить и повторить вновь. Поэтому при наблюденіяхъ *безъ повѣрительной трубы* надо особенно заботиться объ осторожной ходьбѣ около инструмента, чтобы отнюдь не толкнуть ножекъ штатива, и вмѣстѣ съ тѣмъ стараться кончить пріемъ въ кратчайшее время. Если по горизонту имѣется весьма много предметовъ, подлежащихъ наблюденію, то для пріобрѣтенія увѣренности, что лимбъ остается неподвижнымъ, полезно, въ теченіи каждаго полупріема, одинъ или даже нѣсколько разъ опять наводить трубу на начальный предметъ. При такомъ порядкѣ несогласіе отсчетовъ заставитъ повторить не весь, а лишь часть полупріема.

Бываютъ инструменты съ неподвижнымъ лимбомъ, въ которыхъ переходъ отъ одного пріема къ другому приходится дѣлать не простымъ поворотомъ лимба (открѣпивъ нижній зажимной винтъ или просто вращая лимбъ руками), а перестановкою всего инструмента на его штативѣ. Такая перестановка влечетъ за собою перемѣну наклонности всего инструмента и измѣняетъ установку вертикальной оси относительно центра тригонометрической точки. Чтобы не пришлось дѣлать отдѣльныхъ приведеній (см. § 105) для каждаго пріема, весьма полезно прочертить на головкѣ штатива или на столикѣ сигнала окружность и раздѣлить ее на равныя дуги, сообразно числу пріемовъ наблюденій. Тогда перестановка инструмента между пріемами не будетъ мѣнять элементовъ приведеній, а придется каждый разъ повѣрять только наклонность. Послѣднее, впрочемъ, надо дѣлать всегда въ промежуткахъ между пріемами.

101. Измѣреніе горизонтальныхъ угловъ. Такъ какъ каждый уголъ есть разность двухъ направленій, то измѣреніе угловъ отличается отъ измѣренія направленій по способу круговыхъ пріемовъ лишь тѣмъ, что въ этомъ случаѣ, при каждой установкѣ лимба, наблюдаютъ не всѣ окружающіе предметы, а какіе нибудь два. При измѣреніи угловъ неподвижность лимба требуется въ теченіе короткаго промежутка времени наблюденія двухъ предметовъ, и потому этотъ способъ является вполнѣ естественнымъ, когда инструментъ не имѣетъ повѣрительной трубы, или когда она хотя и имѣется, но при наблюдателѣ нѣтъ помощника.

Впрочемъ измѣреніе отдѣльныхъ угловъ примѣняется и при существованіи повѣрительной трубы и наблюдателя при ней, когда окружающихъ точекъ немного и по какимъ либо причинамъ не всѣ онѣ одинаково хорошо видны. Опытные наблюдатели знаютъ, что въ ясную погоду по утрамъ особенно хорошо видны предметы, лежащіе къ западу, по вечерамъ же, наоборотъ—лежащіе къ востоку отъ точки, съ которой производятъ наблюденія; вообще видимость отдаленныхъ земныхъ предметовъ весьма часто мѣняется въ теченіи дня въ зависимости отъ высоты и азимута Солнца, отъ большаго или меньшаго количества водяныхъ пузырьковъ въ извѣстной толщѣ воздуха и т. п. Пусть, напримѣръ, съ точки P надо наблюдать предметы A, B, C... (черт. 145), которые такъ удалены или фоны ихъ проектированія таковы, что одновременная ихъ видимость случается весьма рѣдко. При способѣ круговыхъ пріемовъ (направленій) наблюденія могли бы затянуться на продолжительное время, такъ какъ пришлось бы ожидать случаевъ, когда всѣ предметы видны одновременно. Напротивъ,



Черт. 145.

измѣряя отдѣльные углы, наблюдатель можетъ въ утренніе часы спокойныхъ изображеній измѣрять, напримѣръ, углы EPF и FPA, а въ вечерніе часы—остальные. Вслѣдствіе большаго числа отдѣльныхъ наведеній и отсчетовъ, измѣреніе отдѣльныхъ угловъ конечно потребуетъ больше *рабочихъ часовъ:* при p предметахъ и n пріемахъ число наведеній будетъ:

При измѣреніи круговыми пріемами . . . $2 . (p+1) . n$

» » отдѣльныхъ угловъ . . . . $2 . 2p . n$

Время же пребыванія на данной точкѣ наблюденія, т. е. число *рабочихъ дней* при измѣреніи угловъ можетъ оказаться меньшимъ, чѣмъ при измѣреніи направленій.

Легко замѣтить, что выгода въ числѣ наведеній, т. е. въ числѣ рабочихъ часовъ при измѣреніи направленій, имѣетъ значеніе только при большомъ числѣ окружающихъ предметовъ: если же ихъ мало, какъ, напримѣръ, въ первоклассной тріангуляціи, то число наведеній оказывается почти одинаковымъ; при трехъ предметахъ и 12-ти пріемахъ числа наведеній при круговыхъ пріемахъ и при измѣреніи отдѣльныхъ угловъ будутъ соотвѣтственно 96 и 144. Измѣреніе отдѣльныхъ угловъ удобно производить также при наблюденіи геліотроповъ и ночныхъ сигналовъ, потому что съ малымъ числомъ помощниковъ можно, пересылая ихъ съ одной точки на другую, послѣдовательно измѣрить всѣ углы.

Вообще способъ измѣренія отдѣльныхъ угловъ имѣетъ слѣдующія преимущества передъ измѣреніемъ направленій круговыми пріемами: 1) независимость или во всякомъ случаѣ меньшая зависимость отъ прочности установки, 2) отсутствіе непріятныхъ задержекъ отъ невидимости предмета, 3) легкое выполненіе составленной заранѣе программы и потому здѣсь полнѣе исключаются систематическія ошибки черточекъ лимба и 4) объясненное выше сокращеніе времени пребыванія на данной точкѣ, не смотря на увеличеніе числа рабочихъ часовъ.

Способъ наведеній и отсчетовъ при измѣреніи отдѣльныхъ угловъ въ сущности тотъ же, что и при измѣреніи направленій круговыми пріемами, но чтобы не производить много разъ переводъ трубы черезъ зенитъ или, гдѣ это невозможно, перекладку горизонтальной оси, наблюдаютъ обыкновенно въ одномъ положеніи трубы половину всѣхъ пріемовъ (переставляя лимбъ), а затѣмъ въ другомъ положеніи другую половину (опять переставляя лимбъ). Напримѣръ, желая измѣрить уголъ между предметами A и B, ставятъ сперва лимбъ такимъ образомъ, чтобы при наведеніи на A отсчетъ по 1-му верньеру или микроскопу былъ около $0°$, послѣ чего производятъ наведенія и отсчеты на предметы A и B. Потомъ переставляютъ лимбъ на извѣстное число градусовъ и, при томъ же положеніи трубы, опять наблюдаютъ предметы A и B и т. д. во всѣхъ разсчитанныхъ по программѣ положеніяхъ лимба. Послѣ этого переводятъ трубу въ другое положеніе и производятъ наблюденія тѣхъ же предметовъ въ порядкѣ B и A при промежуточныхъ положеніяхъ лимба. Тѣ же дѣйствія повторяются при измѣреніи остальныхъ угловъ между предметами B и C, C и D и т. д., не соблюдая, впрочемъ, никакого порядка въ послѣдовательности измѣреній угловъ и наблюдая тѣ предметы, которые въ данное время видны.

Въ концѣ XVIII и въ первой половинѣ XIX вѣковъ въ западной Европѣ, а отчасти и въ Россіи въ большомъ ходу былъ *повторительный способъ* измѣренія угловъ, для котораго *Борда* изобрѣлъ особый угломѣрный инструментъ, названный имъ повторительнымъ кругомъ (см. § 13). Въ настоящее время этотъ инструментъ совершенно оставленъ; В. Струве доказалъ, что имъ и нельзя получать результатовъ высокой точности, такъ какъ въ самомъ основаніи его устройства лежатъ причины неустранимыхъ наблюденіями постоянныхъ ошибокъ. Однако, въ нѣкоторыхъ исключительныхъ случаяхъ, самый способъ примѣняется и нынѣ, причемъ надо лишь имѣть инструментъ съ лимбомъ, вращающимся вмѣстѣ съ алидаднымъ кругомъ, а не со свободнымъ лимбомъ; вотъ почему такого рода инструменты, какъ, напримѣръ, изображенные на черт. 128 и 131, называются заграницею «повторительными».

Пусть требуется измѣрить уголъ между двумя предметами A и B, причемъ, для краткости, назовемъ предметъ A лѣвымъ, а предметъ B правымъ. Приведя инструментъ въ горизонтальное положеніе, направляютъ трубу на лѣвый предметъ, дѣлаютъ точное наведеніе верхнимъ алидаднымъ микрометрическимъ винтомъ и отсчитываютъ верньеры или микроскопы горизонтальнаго лимба. Затѣмъ, открѣпивъ зажимной винтъ при алидадѣ, поворачиваютъ трубу, направляютъ ее на правый предметъ и, послѣ закрѣпленія, наводятъ ее точно при помощи микрометрическаго винта, т. е. дѣлаютъ то же, что и при обыкновенномъ измѣреніи направленій или угловъ. Но теперь, *не дѣлая отсчетовъ*, открѣпляютъ нижній зажимной винтъ и поворачиваютъ всю верхнюю часть инструмента въ обратномъ направленіи до тѣхъ поръ, пока въ трубѣ не покажется опять лѣвый предметъ; тутъ нижній зажимной винтъ закрѣпляютъ и окончательное наведеніе дѣлаютъ нижнимъ же микрометрическимъ винтомъ (*M* черт. 133). Въ результатѣ лимбъ инструмента повернется очевидно на величину, равную измѣряемому углу. Далѣе, опять открѣпляютъ зажимной винтъ алидады, наводятъ трубу снова на правый предметъ и повторяютъ тѣ же дѣйствія въ прежнемъ порядкѣ. Сдѣлавъ опредѣленное число такихъ *повтореній*, вторично отсчитываютъ верньеры или микроскопы. Величина угла получается дѣленіемъ разности между послѣднимъ и первымъ отсчетами на число повтореній. Само собою разумѣется, что, смотря по величинѣ угла и числу повтореній, къ послѣднему отсчету надо придать одинъ или нѣсколько разъ взятую величину 360°; чтобы не ошибиться, надо послѣ перваго же наведенія на правый предметъ сдѣлать отсчетъ хоть по одному верньеру и узнать приближенную величину измѣряемаго угла. Послѣ наблюденій при одномъ положеніи трубы (кругъ право) производятъ такія же и столько же наблюденій при другомъ положеніи (кругъ лѣво).

Если при инструментѣ имѣется повѣрительная труба, то полезно наводить ее при каждомъ повтореніи на какой нибудь хорошо видимый предметъ или марку; взглядывая въ нее до и послѣ наведеній главной трубы на оба предмета, наблюдатель можетъ убѣдиться, что во время поворотовъ алидады лимбъ оставался неподвижнымъ.

Такимъ образомъ выгода повторительнаго способа заключается въ чрезвычайномъ сокращеніи отсчетовъ по верньерамъ или микроскопамъ. Когда лимбы нарѣзались дурно, и ошибки черточекъ были очень значительны по сравненію съ ошибками наведеній, то повторительный способъ имѣлъ неоспоримое преимущество передъ вышеизложенными способами измѣреній круговыми пріемами и отдѣльныхъ угловъ; ошибки черточекъ, при большомъ числѣ повтореній, почти не вліяли на результатъ. Въ настоящее же время, наоборотъ, ошибки черточекъ ничтожны по сравненію съ ошибками наведеній и другими погрѣшностями измѣреній, и потому не мудрено, что нынѣ, способъ повтореній, какъ упомянуто уже выше, примѣняется лишь въ исключительныхъ случаяхъ, а именно, когда наблюдателю трудно или неудобно производить многократные отсчеты. Такой случай представляется, напримѣръ, при наблюденіяхъ съ окна колокольни или другого зданія, гдѣ, за тѣснотою, отсчеты приходится дѣлать (особенно верньеровъ или микроскоповъ, обращенныхъ внѣ зданія) при крайне неестественныхъ и даже опасныхъ положеніяхъ тѣла; между тѣмъ какъ наведенія трубы и вращеніе зажимныхъ и микрометрическихъ винтовъ дѣлаются просто и безопасно.

Примѣръ. При первомъ наведеніи на лѣвый предметъ получены отсчеты:

по I-му верньеру	0°17′20″
„ II-му „	17′ 0″
Въ среднемъ	0°17′10″

Послѣ наведенія на правый предметъ, для приблизительнаго опредѣленія угла, записано по первому верньеру 86°1′.

Послѣ шести повтореній, при наведеніи на правый предметъ получены отсчеты:

по I-му верньеру	154°42′30″
„ II-му „	42′40″
Въ среднемъ	154°42′35°

Измѣренный уголъ равенъ $\frac{(154^\circ42'35'' + 360^\circ) - 0^\circ17'10''}{6} =$

$$= 85^\circ44'14.''2$$

При повторительномъ способѣ нѣтъ такой частой повѣрки результатовъ, какъ при измѣреніи угловъ круговыми пріемами, но здѣсь тоже можно повѣрять измѣренія, дѣлая нѣсколько независимыхъ группъ повтореній, изъ которыхъ однѣ—поворачивая лимбъ въ одну сторону, а другія — поворачивая его въ сторону противоположную.

Упомянувъ о повѣркѣ, которую наблюдатель долженъ имѣть всегда въ виду, необходимо добавить, что, когда измѣряютъ отдѣльные углы изъ одной точки стоянія, то не довольствуются измѣреніемъ всѣхъ необходимыхъ для послѣдующихъ вычисленій угловъ, а непремѣнно измѣряютъ и лишніе. Такъ, послѣ измѣренія угловъ APB, BPC... EPF (черт. 145), измѣряютъ еще и уголъ FPA, а не получаютъ его, какъ дополненіе суммы измѣренныхъ до 360°. Разногласіе между суммою всѣхъ измѣренныхъ угловъ у одной точки и геометрическою суммою (360°) должно быть, конечно, небольшимъ; кромѣ повѣрки измѣреній, оно служитъ данною для сужденія объ ихъ точности.

102. Значеніе повѣрительной трубы. Разность отсчетовъ по горизонтальному лимбу, при наведеніяхъ трубы угломѣрнаго инструмента на два предмета, представляетъ горизонтальный уголъ между ними только въ томъ предположеніи, что лимбъ неподвиженъ. Но на полную неподвижность горизонтальнаго лимба никогда нельзя полагаться. Дѣйствительно, алидадный кругъ послѣ каждаго наведенія закрѣпляется клещами, придѣланными иногда къ внѣшнему краю лимба, и затѣмъ, для окончательнаго наведенія трубы, вращается еще микрометрическимъ винтомъ. Нѣтъ сомнѣнія, что эти дѣйствія не остаются безслѣдными: каждое закрѣпленіе клещами отзывается на положеніи горизонтальнаго лимба, а вращеніе микрометрическаго винта, отъ котораго поворачивается вся алидадная часть инструмента, непремѣнно поворачиваетъ и лимбъ въ противоположную сторону, производя гнутіе его спицъ. Въ инструментахъ со свободнымъ лимбомъ такихъ видимыхъ причинъ для перемѣщенія не существуетъ, но кто можетъ поручиться, что отъ одного прикосновенія къ инструменту лимбъ не повернется? Не надо забывать, что поворотъ на $1''$ соотвѣтствуетъ линейному перемѣщенію окружности менѣе, чѣмъ на 200 000-ую долю радіуса, такъ что, при радіусѣ лимба въ 3 дюйма, линейное перемѣщеніе окружности на одну 10 000-ю долю дюйма представляетъ поворотъ на $7''$ — величину, обнаруживаемую даже верньерами съ точностью отсчета въ $10''$. Если бы перемѣщенія лимба отъ вращенія винтовъ и другихъ неизбѣжныхъ причинъ были одинаковы при каждомъ наведеніи, то, конечно, въ разности отсчетовъ, т. е. въ величинѣ угла они бы исключались, но могутъ ли они быть всегда одинаковыми? Когда инструментъ стоитъ на деревянномъ штативѣ или на платформѣ высокаго сигнала, то движенія всего инструмента а, слѣдовательно, и лимба, уже очевидны. Даже въ безвѣтренную погоду, просто отъ неравномѣрнаго нагрѣванія ножекъ штатива или столбовъ сигнала инструментъ поворачивается въ томъ или иномъ направленіи (см. § 103, п. 12).

Изъ сказаннаго ясно, что точное измѣреніе горизонтальныхъ направленій (или угловъ) возможно лишь тогда, когда наблюдатель имѣетъ средства *повѣрять* неподвижность лимба и, въ случаѣ его поворота, можетъ возвращать его въ первоначальное положеніе. И то, и другое достигается повѣрительною трубою, которая, будучи неизмѣнно связана съ горизонтальнымъ лимбомъ, позволяетъ *непрерывно слѣдить* за нимъ, а особый нижній микрометрическій винтъ позволяетъ *возстановлять* первоначальное положеніе. Не даромъ нѣмцы называютъ повѣрительную трубу шпіономъ. Словомъ, при измѣреніи горизонтальныхъ угловъ эта труба играетъ такую же роль, какъ уровень, придѣланный къ алидадѣ вертикальнаго круга, при измѣреніи зенитныхъ разстояній; она повѣряетъ положеніе горизонтальнаго круга относительно нѣкоторой прямой (направленія на марку), какъ уровень повѣряетъ положеніе вертикальной алидады относительно отвѣсной линіи точки наблюденія.

При повѣрительной трубѣ, вообще говоря, долженъ быть отдѣльный наблюдатель. Въ самомъ дѣлѣ, пусть его нѣтъ, и за повѣрительною трубою слѣдитъ наблюдатель при главной трубѣ. Установивъ инструментъ, наблюдатель наводитъ повѣрительную трубу на избранный для нея предметъ, а главную на какой нибудь изъ окружающихъ, и дѣлаетъ отсчеты; повернувъ затѣмъ верхнюю часть инструмента, онъ направляетъ главную трубу на слѣдующій предметъ и до окончательнаго ея наведенія микрометрическимъ винтомъ взглядываетъ въ повѣрительную. Пусть онъ замѣтилъ, что нити окуляра повѣрительной трубы сошли съ изображенія предмета, т. е. что эта труба, а, слѣдовательно, и вся нижняя часть инструмента съ горизонтальнымъ лимбомъ повернулись; наблюдатель, конечно, можетъ и долженъ вновь навести повѣрительную трубу нижнимъ микрометрическимъ винтомъ, но кто поручится, что тотчасъ же послѣ этого инструментъ не повернется опять? При наблюденіяхъ на платформахъ высокихъ тригонометрическихъ знаковъ, въ которыхъ не имѣется совершенно независимаго основанія для инструмента, часто замѣчается, что переходъ наблюдателя съ одного мѣста на другое уже измѣняетъ положеніе инструмента. Можетъ быть такой случай, что при визированіи поочередно то въ главную, то въ повѣрительную трубы (для чего, при извѣстномъ относительномъ положеніи этихъ трубъ, наблюдатель принужденъ стоять на разныхъ мѣстахъ платформы) обѣ онѣ будутъ представляться точно наведенными, между тѣмъ какъ при этихъ двухъ положеніяхъ наблюдателя и самый инструментъ принимаетъ *разныя положенія.* Послѣднее обстоятельство можетъ быть обнаружено только при одновременномъ визированіи въ обѣ трубы. Очевидно, что повѣрительная труба приноситъ всю свою пользу только въ томъ случаѣ, когда, въ моментъ окончательнаго наведенія главной трубы, другой наблюдатель смотритъ въ повѣрительную. Тутъ все дѣло именно *въ одновременности* визированія въ обѣ трубы, а при перестановкахъ алидаднаго круга относительно нижней части инструмента одинъ наблюдатель не можетъ самъ не только одновременно, но даже съ одного мѣста смотрѣть въ обѣ трубы.

Итакъ, для достиженія точныхъ результатовъ, по крайней мѣрѣ на платформахъ высокихъ тригонометрическихъ знаковъ, при главной и при повѣрительной трубахъ должны быть отдѣльные наблюдатели. Они должны свыкнуться и не мѣшать одинъ другому, а, наоборотъ, пламенно стремиться къ одной общей цѣли. Всякая размолвка отражается на точности результатовъ и задерживаетъ работу. Въ § 100 былъ объясненъ порядокъ наведеній повѣрительной и главной трубъ, но слѣдовать ему буквально должны лишь наблюдатели начинающіе, не достаточно спаянные другъ съ другомъ. Если между моментами наведеній главной и повѣрительной трубъ проходитъ много времени, то наблюденія будутъ затягиваться. Положимъ, что, пока наводитъ главный наблюдатель, у помощника повѣрительная труба сошла; подводя ее на прежнее мѣсто, помощникъ разстраиваетъ уже сдѣланное наведеніе главнаго наблюдателя. Чѣмъ меньше промежутокъ между наведеніями помощника и наблюдателя, тѣмъ, конечно, вѣроятнѣе, что въ этотъ промежутокъ инструментъ не сдвинется. Послѣ долговременныхъ совмѣстныхъ наблюденій, въ теченіе которыхъ наблюдатель и его помощникъ до совершенства изучили характеры и привычки другъ друга, они уже не переговариваются при наблюденіяхъ, а наводятъ свои трубы почти одновременно и по большей части удачно. Словомъ, выходитъ такъ, какъ будто въ обѣ трубы наблюдаютъ не отдѣльныя лица, а одинъ человѣкъ, смотрящій однимъ глазомъ въ повѣрительную, а другимъ—въ главную трубу. Примѣромъ такихъ двухъ наблюдателей могутъ служить *В. Струве* и работавшій съ нимъ на Лифляндскомъ градусномъ измѣреніи въ качествѣ помощника баронъ *Врангель*. Чѣмъ скорѣе слѣдуетъ одно наведеніе за другимъ, тѣмъ точнѣе оказываются результаты, а чѣмъ точнѣе отдѣльныя наблюденія, тѣмъ меньшимъ числомъ ихъ (меньшимъ числомъ пріемовъ) можно достигнуть среднихъ выводовъ данной точности, такъ что, по мѣрѣ пріобрѣтенія наблюдателями опытности, время, необходимое для окончанія наблюденій, сокращается. Вообще надо держаться правила: *лучше сдѣлать мало наблюденій высокой точности, чѣмъ много малой точности.*

Въ инструментахъ съ повѣрительною трубою, вращающеюся вмѣстѣ съ горизонтальнымъ лимбомъ при помощи нижняго микрометрическаго винта, замѣчается недостатокъ, чисто механическаго свойства: наблюдатель у повѣрительной трубы своимъ нижнимъ микрометрическимъ винтомъ поворачиваетъ почти весь инструментъ, за исключеніемъ одного треножнаго основанія. Тутъ неизбѣжно происходитъ гнутіе и натяженіе отдѣльныхъ частей. Къ тому же, если оба наблюдателя не пріобрѣли опытности, то одновременность наведеній не всегда удается: одинъ какъ бы мѣшаетъ другому. Отъ наведенія главной трубы повѣрительная сдвигается, а исправленіе установки повѣрительной разстраиваетъ наведеніе главной. По этимъ причинамъ, особенно вредно вліяющимъ при большихъ и тяжелыхъ инструментахъ, въ послѣднее время механики стали прикрѣплять повѣрительную трубу на-глухо къ лимбу (или къ связаннымъ съ послѣднимъ частямъ) и вовсе не дѣлать нижняго микрометрическаго винта. Но такъ какъ, при такомъ устройствѣ, въ случаѣ смѣщенія нитей съ изображенія марки, нельзя исправить положенія повѣрительной трубы, то самыя нити ея дѣлаютъ подвижными, т. е. располагаютъ микрометръ въ окулярѣ повѣрительной трубы. Помощникъ, при каждомъ смѣщеніи нитей, вновь наводитъ ихъ и отсчитываетъ показаніе индекса у барабана микрометра. Передвиженіе легкой рамочки микрометра не можетъ измѣнить положенія всего инструмента, а наведенія помощника не разстраиваютъ наведеній главнаго наблюдателя. Работа идетъ скорѣе и одновременность наведеній можетъ быть достигнута при менѣе сроднившихся наблюдателяхъ. Перемѣны же въ положеніи лимба вводятся затѣмъ въ видѣ поправокъ къ отсчетамъ по верньерамъ или микроскопамъ, что легко сдѣлать, зная положеніе микрометра повѣрительной трубы въ моментъ наведенія и угловую цѣну дѣленій его барабана *). Обыкновенно наблюденія цѣлаго пріема приводятъ къ нѣкоторому среднему положенію нитей микрометра. Если отсчетъ барабана въ моментъ наблюденія назвать черезъ p, средній отсчетъ черезъ p_0, а угловую цѣну дѣленія барабана черезъ τ, то поправка отсчета лимба выразится произведеніемъ $(p - p_0) \cdot \tau$.

При введеніи поправокъ къ отсчетамъ лимба за показаніе микрометра повѣрительной трубы иногда затрудняются въ знакѣ. Этотъ знакъ ($+$ или $-$) зависитъ отъ направленія возрастаю-

*) Руководствуясь указанными соображеніями, можно бы пойти далѣе и устранить всякое прикосновеніе къ повѣрительной трубѣ. Для этого надо бы только нитяный микрометръ замѣнить стеклышкомъ съ нарѣзанными на немъ близкими параллельными черточками. Помощнику оставалось бы только замѣчать и записывать положеніе изображенія марки въ моментъ наведенія главной трубы.

щихъ подписей на лимбѣ и на барабанѣ микрометра и отъ расположенія самого микрометра. Чтобы избавиться отъ размышленій, которыя весьма часто приводятъ къ ошибочному выводу, должно однажды послѣ отсчетовъ лимба и микрометра нарочно нажать на штативъ, чтобы повернуть весь инструментъ, и снова сдѣлать наведенія и отсчеты. Если отсчеты лимба и микрометра измѣнились въ одномъ смыслѣ (оба стали больше или оба меньше), то поправку за показаніе микрометра надо вычитать изъ отсчетовъ лимба; если же эти величины измѣнились въ смыслѣ противоположномъ (при возрастаніи одной, другая уменьшилась, или наоборотъ), то поправку за показаніе микрометра надо прибавлять къ отсчетамъ лимба.

103. Ошибки измѣреній. Причины погрѣшностей при измѣреніи горизонтальныхъ направленій (а слѣдовательно и угловъ) заключаются въ несовершенствѣ глазъ и рукъ наблюдателя, въ несовершенствѣ инструмента, въ неточности его установки на штативѣ и, наконецъ, въ неоднородности тѣхъ слоевъ атмосферы, черезъ которые проходитъ лучъ зрѣнія отъ наблюдаемой тригонометрической точки. Ниже перечислены и объяснены главнѣйшія причины погрѣшностей, оцѣнены величины ихъ вліянія и указаны способы ихъ ослабленія и даже совершеннаго исключенія.

Погрѣшности, зависящія отъ наблюдателя, суть:

1) **Ошибки наведеній.** Въ зрительной трубѣ, окулярная сѣтка которой имѣетъ двѣ близкія вертикальныя нити, наблюдатель старается поставить изображеніе предмета такъ, чтобы промежутки между краями изображенія и обѣими нитями по сторонамъ были равны (черт. 116). Однако глазъ не замѣчаетъ небольшого уклоненія въ сторону, а рука наблюдателя иногда не можетъ повернуть микрометрическій винтъ такъ, чтобы никакого уклоненія не оставалось. Опытъ показываетъ, что глазъ и рука не потерпятъ, если отношеніе боковыхъ промежутковъ будетъ меньше, чѣмъ 1 : 2, такъ что при угловомъ разстояніи нитей *) въ a'' ошибка наведенія не можетъ быть больше $\frac{1}{6}\,a''$

*) Угловую величину промежутка между двумя близкими вертикальными нитями въ окулярѣ можно опредѣлить двумя различными спосо-

(если пренебречь шириною изображенія, то величины промежутковъ будутъ $\frac{1}{3}a''$ и $\frac{2}{3}a''$). Чѣмъ больше увеличеніе трубы, тѣмъ разстояніе между нитями дѣлается меньше, и, слѣдовательно, съ возрастаніемъ увеличенія трубы ошибка наведенія уменьшается. Кромѣ того ошибка наведенія зависитъ и отъ ширины изображенія предмета: когда промежутки до нитей очень малы, то наведеніе выходитъ точнѣе. Въ худшемъ случаѣ предѣльная ошибка, какъ уже сказано выше, будетъ не больше $\frac{1}{6}a''$, и, слѣдовательно, въ малыхъ инструментахъ, съ увеличеніемъ зрительной трубы около 20 и разстояніемъ между близкими вертикальными нитями около $1'$, наибольшій *предѣлъ* ошибки наведенія будетъ около $\pm 10''$, а въ большихъ, съ увеличеніемъ около 50 и разстояніемъ между нитями около $25''$, тотъ же предѣлъ будетъ только $\pm 4''$. Среднюю ошибку наведенія можно положить равною лишь половинѣ указанныхъ предѣловъ, т. е. она будетъ въ разсмотрѣнныхъ частныхъ случаяхъ $\pm 5''$ и $\pm 2''$.

При сѣткахъ, имѣющихъ видъ косого креста (черт. 115, *A*), наведенія, вообще говоря, дѣлаются точнѣе, но такія сѣтки не вошли еще въ общее употребленіе.

Вліяніе ошибокъ наведенія ослабляется увеличеніемъ числа наведеній, именно, ошибка средняго вывода равна ошибкѣ одного наведенія, дѣленной на квадратный корень изъ числа наведеній; напримѣръ, при шести пріемахъ, сдѣланныхъ при обоихъ положеніяхъ инструмента, число наведеній равно 12-ти, и потому ошибки средняго вывода будутъ (*для предъидущихъ* примѣровъ) соотвѣтственно $\pm 1''.5$ и $\pm 0''.6$.

Необходимо замѣтить, что когда труба наведена однимъ наблюдателемъ, то другому она можетъ показаться не наве-

---

бами: 1) послѣдовательными наведеніями каждой нити на ясно видимый предметъ, послѣ чего разность отсчетовъ по лимбу дастъ прямо искомый уголъ, и 2) наведеніемъ трубы на марку съ нѣсколькими вертикальными полосами и счетомъ, сколько такихъ полосъ помѣщается между нитями (плоскость марки должна быть перпендикулярна къ лучу зрѣнія); отношеніе линейнаго разстоянія между замѣченными полосами къ разстоянію отъ марки до объектива трубы дастъ тангенсъ искомаго угла.

денною, и послѣдній наведетъ ее иначе. Это явленіе объясняется *личными ошибками наведенія.* Разность между наведеніями двухъ наблюдателей не есть величина постоянная: она зависитъ отъ разстоянія между нитями и отъ качества изображеній, но вообще очень мала. Въ данномъ рядѣ наведеній одного наблюдателя его личная ошибка можетъ считаться постоянною и потому она исчезаетъ въ выводѣ угловъ.

2) **Ошибки отсчетовъ.** Наблюдатели нерѣдко встрѣчаютъ затрудненія, которыя изъ черточекъ верньера и лимба принять за совпадающія; такъ какъ поневолѣ приходится брать ту или другую, то вообще принимаютъ, что ошибка отсчета по верньеру равна половинѣ его точности, напримѣръ, при точности верньера въ $30''$ ошибка отсчета равна $\pm 15''$, при точности въ $10''$ она будетъ только $\pm 5''$ и т. п.

При многократномъ наведеніи нитей микрометра микроскопа на изображеніе той же черточки лимба получаются обыкновенно разные отсчеты на барабанѣ. Это явленіе совершенно подобно ошибкамъ наведенія трубы на изображеніе предмета, но, вслѣдствіе рѣзкости изображеній черточекъ, ошибка наведенія микрометра вообще невелика. Въ каждомъ данномъ случаѣ наблюдатель можетъ опредѣлить ее, если произведетъ рядъ наведеній и отсчетовъ при неподвижномъ положеніи инструмента. Средняя ошибка m одного наведенія вычисляется по формулѣ

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n-1}} \qquad (59)$$

гдѣ Δ — уклоненія отдѣльныхъ отсчетовъ отъ ихъ ариѳметической средины, а n — число наведеній. Опытъ показываетъ, что средняя ошибка наведенія микрометра равна, приблизительно, одному дѣленію барабана, такъ что, если, напримѣръ, цѣна дѣленія барабана есть $2''$, то ошибка одного наведенія равна $\pm 2''$.

Погрѣшности, зависящія отъ инструмента, суть:

3) **Случайныя ошибки черточекъ.** При описаніи способовъ нарѣзки черточекъ (§ 88) было упомянуто, что въ лучшихъ современныхъ инструментахъ эти ошибки совершенно ничтожны и, напримѣръ, въ лимбахъ Репсольда составляютъ не болѣе $\pm 0''.2$. Въ инструментахъ другихъ художниковъ онѣ вообще

болѣе значительны, но при многократныхъ повтореніяхъ отсчетовъ на разныхъ частяхъ лимба и, слѣдовательно, по разнымъ черточкамъ, можно положить, что, въ среднемъ выводѣ, если вліяніе случайныхъ ошибокъ черточекъ и не исключается совершенно, то, во всякомъ случаѣ, остающаяся ошибка исчезаетъ, по сравненію съ другими источниками погрѣшностей.

4) **Систематическія ошибки черточекъ.** Эти ошибки гораздо болѣе случайныхъ и даже въ кругахъ Репсольда доходятъ до $2''$. Ошибка E каждой черточки θ можетъ быть представлена рядомъ

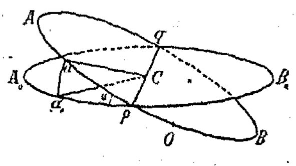
$$E_\theta = A_1 . sin(\theta + a_1) + A_2 . sin(2\theta + a_2) + A_3 . sin(3\theta + a_3) + \ldots$$

въ которомъ коэффиціенты A_1, A_2... и углы a_1, a_2... суть нѣкоторыя постоянныя, опредѣляемыя изслѣдованіемъ даннаго лимба. Для исключенія этого рода ошибокъ въ астрономическихъ инструментахъ постоянныхъ обсерваторій производятъ спеціальныя изслѣдованія лимбовъ и каждый отсчетъ исправляютъ ошибкою черточки, на которой онъ основанъ. Въ переносныхъ геодезическихъ инструментахъ такія изслѣдованія дѣлаются весьма рѣдко, какъ въ виду ихъ трудности, такъ и потому, что вліяніе систематическихъ ошибокъ исключается перестановками лимба послѣ каждаго пріема. Легко понять, что если перестановка дѣлается каждый разъ на одинаковое число градусовъ, и отсчитанныя черточки расположены симметрично по всей окружности, то сумма ошибокъ, подобныхъ E_θ, выразится суммою членовъ, въ которой каждая изъ постоянныхъ A_1, A_2... будетъ умножаться на сумму синусовъ кратныхъ дугъ, а такая сумма, какъ доказано въ выноскѣ на стр. 294—295, равна нулю.

Такимъ образомъ для ослабленія вліянія случайныхъ ошибокъ черточекъ, величина которыхъ не зависитъ отъ разстоянія отдѣльной черточки отъ начальной, необходимо просто переставлять лимбъ при каждомъ новомъ пріемѣ на произвольный уголъ; для исключенія же вліянія систематическихъ ошибокъ каждую перестановку лимба надо дѣлать на опредѣленный уголъ такъ, чтобы отсчеты распредѣлились равномѣрно по всему лимбу. Понятно, что при такой перестановкѣ, одновременно съ вліяніемъ систематическихъ, ослабляется и вліяніе случайныхъ ошибокъ. Число градусовъ, на которое надо переставлять лимбъ послѣ каждаго пріема при данныхъ числѣ верньеровъ или микроскоповъ и числѣ пріемовъ, получается по формулѣ (56) § 98. Здѣсь необходимо лишь добавить, что нѣтъ никакой надобности дѣлать перестановку на точное число градусовъ; достаточно, если она дѣлается приближенно до нѣсколькихъ минутъ. Не измѣняя сущности дѣла, приближенная перестановка облегчаетъ и ускоряетъ производство наблюденій.

5) **Ошибки верньеровъ и микроскоповъ.** Въ п. 2 разсмотрѣны ошибки отсчетовъ этого рода приборовъ; однако и при безошибочныхъ отсчетахъ результаты послѣднихъ будутъ невѣрны, если самые приборы имѣютъ несовершенства. Случайныя ошибки черточекъ верньеровъ, подобно случайнымъ ошибкамъ черточекъ лимбовъ, вообще невелики, и ими всегда можно пренебрегать; систематическія же ошибки черточекъ верньеровъ изслѣдуются и вводятся въ видѣ поправокъ къ отсчетамъ (см. § 89). Ошибки микрометровъ микроскоповъ слагаются изъ ошибокъ винтовъ и неточности установки самихъ микроскоповъ, не позволяющихъ разъ навсегда опредѣлить цѣну дѣленій барабановъ. Ошибки этого рода вообще незначительны и притомъ почти исключаются въ среднемъ изъ многихъ отсчетовъ при разныхъ положеніяхъ рамочекъ микрометровъ.

6) **Негоризонтальность лимба.** Когда приступаютъ къ измѣренію горизонтальныхъ направленій или угловъ, то, само собою разумѣется, приводятъ лимбъ инструмента въ горизонтальное положеніе. Но это недостижимо даже при вывѣренномъ инструментѣ, вышедшемъ изъ рукъ первокласснаго художника. Къ счастью, однако, вліяніе погрѣшности установки лимба на измѣренныя направленія на практикѣ совершенно ничтожно. Пусть окружность AB (черт. 146) представляетъ дѣйствительное положеніе *лимба* въ *моментъ* наблюденія, окружность A_0B_0 — горизонтальное положеніе, pq — ихъ общій діаметръ взаимнаго



Черт. 146.

пересѣченія, а μ — уголъ наклоненія. Пусть, далѣе, при наведеніи на какой нибудь предметъ, полученъ по верньеру или микроскопу отсчетъ a, представляющій дугу Oa. Если бы лимбъ принялъ горизонтальное положеніе, т. е., безъ вращенія по окружности, повернулся бы лишь около діаметра pq на уголъ μ, то, при наведеніи на тотъ же предметъ, по верньеру получился бы отсчетъ a_0, соотвѣтствующій горизонтальной проекціи a_0C радіуса aC. Такимъ образомъ ошибка отъ негоризонтальности лимба выражается разностью угловъ aCp и a_0Cp или дугъ ap и a_0p, которые, для краткости, назовемъ черезъ θ и θ_0.

Изъ прямоугольнаго сферическаго треугольника apa_0 имѣемъ:

$$\cos\mu = \cot g\,\theta \,.\, tg\,\theta_0$$

откуда, послѣ простыхъ преобразованій, получаемъ

$$\sin(\theta - \theta_0) = 2\,.\,\sin\theta\,.\,\cos\theta_0\,.\,\sin^2\frac{\mu}{2}$$

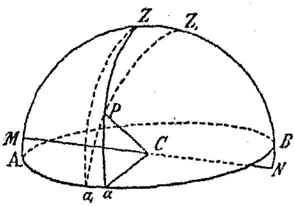
По малости угла $\frac{\mu}{2}$ можно его синусъ и $\sin(\theta - \theta_0)$ замѣнить самими углами и вмѣсто $\cos\theta_0$ поставить $\cos\theta$, тогда искомая ошибка выразится формулою:

$$(\theta - \theta_0)'' = \frac{\mu^2}{4\varkappa}\,.\,\sin 2\,\theta \qquad (60)$$

Нѣтъ никакой надобности разсматривать частные случаи и изслѣдовать, при какихъ значеніяхъ угла θ ошибка обращается въ 0 и проч., достаточно сказать, что, даже при невѣроятной наклонности лимба въ $10'$, вліяніе ея въ худшемъ случаѣ (т. е. при $\theta = \pm 45°$) будетъ менѣе $0''.5$. Вообще же, при сколько нибудь тщательной установкѣ инструмента, этимъ вліяніемъ всегда можно пренебрегать.

7) **Наклонность горизонтальной оси.** Если вообразить шаръ произвольнаго радіуса и проводить черезъ его центръ плоскости и линіи, параллельныя разсматриваемымъ въ данномъ инструментѣ, то плоскость горизонтальнаго лимба представится большимъ кругомъ AB (черт. 147), а горизонтальная ось трубы (полагая ее наклоненной къ горизонту подъ угломъ i) — діаметромъ MN. Оптическая ось трубы при вращеніи около

такой негоризонтальной оси будетъ описывать не вертикальную плоскость Za, а наклонную Z_1a_1, такъ что при наведеніи трубы на предметъ, лежащій въ направленіи CP, вмѣсто вѣрнаго отсчета a получится ошибочный a_1. Чтобы вывести величину ошибки $a_1 - a$, проведемъ дугу большого круга Za_1, такъ что разность отсчетовъ $a_1 - a$ представится сферическимъ угломъ a_1Za. Назовемъ еще уголъ наклоненія визирной линіи CP черезъ α; на чертежѣ онъ изобразится дугою Pa. Изъ сферическаго треугольника ZPa_1 имѣемъ



Черт. 147.

$$\frac{\sin a_1Za}{\sin Za_1Z_1} = \frac{\sin a_1P}{\sin PZ}$$

но $\angle a_1Za$ есть искомая ошибка $a_1 - a$, $\angle Za_1Z_1$ равенъ наклонности оси i, дуга a_1P почти равна углу α, а $PZ = 90° - \alpha$ и потому получимъ

$$\frac{\sin (a_1 - a)}{\sin i} = \frac{\sin \alpha}{\sin (90° - \alpha)}$$

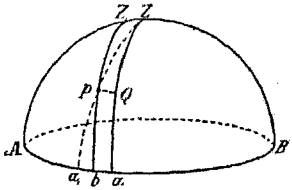
или, замѣняя синусы малыхъ угловъ $a_1 - a$ и i самими дугами:

$$a_1 - a = i \, . \, tg\, \alpha \qquad (61)$$

Итакъ, искомая ошибка равна самой наклонности горизонтальной оси, умноженной на тангенсъ угла наклоненія визирной линіи. Если бы направленіе на предметъ имѣло значительный уголъ наклоненія (какъ бываетъ, напримѣръ, при наблюденіи небесныхъ свѣтилъ), то вліяніе наклонности оси могло бы имѣть значеніе; при наблюденіи же земныхъ предметовъ на тріангуляціяхъ этотъ уголъ обыкновенно очень малъ, а потому и ошибкою за наклонность оси почти всегда можно пренебрегать. Дѣйствительно, если положеніе горизонтальной оси повѣрено уровнемъ, то наклонность i не можетъ быть больше $15''$; тогда даже для угла возвышенія $\alpha = 2°$ поправка за наклонность оси будетъ равна лишь $0''.5$.

8) **Коллимаціонная ошибка.** Если сдѣлать построеніе, подобное предъидущему, то въ идеальномъ инструментѣ оптическая

ось описывала бы вертикальную плоскость Za (черт. 148); если же существуетъ коллимаціонная ошибка c, то оптическая ось будетъ описывать коническую поверхность, которая на воображаемомъ шарѣ изобразится дугою малаго круга Z_1b, отстоящею отъ дуги большого круга Za на величину c. Соединивъ точки Z и P и продоливъ дугу ZP до пересѣченія съ горизонтальною плоскостью AB, получимъ точку a_1, угловое разстояніе которой отъ точки a, т. е. дуга $a_1 - a$ или сферическій уголъ a_1Za выразитъ вліяніе коллимаціонной ошибки на отсчитанное горизонтальное направленіе.



Черт. 148.

Проведемъ дугу PQ, перпендикулярную къ Za. Изъ прямоугольнаго сферическаго треугольника PQZ имѣемъ:

$$\sin PQ = \sin PZ \,.\, \sin PZa$$

но

$$PQ = c,\ PZ = 90^\circ - \alpha \text{ и } \angle PZa = a_1 - a$$

Замѣняя по малости угловъ c и $a_1 - a$ ихъ синусы самими дугами, получимъ:

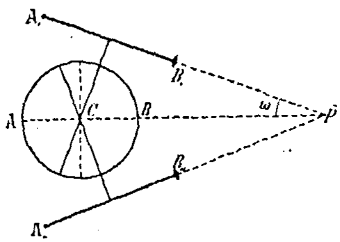
$$a_1 - a = c \,.\, \sec \alpha \tag{62}$$

Слѣдовательно, искомое вліяніе равно величинѣ коллимаціонной ошибки, умноженной на секансъ угла наклоненія визирной линіи. Величина секанса, какъ извѣстно, не можетъ быть меньше единицы, и потому вліяніе коллимаціонной ошибки никогда не будетъ меньше ея самой, но зато оно всегда исключается въ среднемъ изъ наблюденій при кругѣ право и кругѣ лѣво, въ которыя коллимаціонная ошибка входитъ съ противоположными знаками.

Въ случаѣ, если какой нибудь предметъ наблюдался только при одномъ положеніи инструмента, къ отсчету необходимо придать поправку, вычисляемую по формулѣ (62).

9) **Внѣцентренность зрительной трубы.** Ошибка, происходящая отъ внѣцентренности зрительной трубы. существуетъ только

въ универсалахъ съ внѣцентренными трубами; легко понять, *что, подобно коллимаціонной ошибкѣ, она дѣйствуетъ съ разными знаками при наблюденіяхъ при кругѣ право и кругѣ лѣво и въ среднемъ выводѣ совершенно исключается.* Въ самомъ дѣлѣ, если бы инструментъ былъ съ центрально расположенною трубою, то при наведеніи на предметъ P (черт. 149) труба имѣла бы положеніе AB. При внѣцентренномъ расположеніи, при кругѣ право труба приметъ направленіе A_1B_1, составляющее съ AB уголъ ω, который легко можно вычислить по формулѣ



Черт. 149.

$$\sin\omega = \frac{d}{s} \tag{63}$$

гдѣ d—*кратчайшее разстояніе оптической оси отъ вертикальной оси инструмента, а s—разстояніе до наблюдаемой точки; при* кругѣ же лѣво труба приметъ направленіе $A_{11}B_{11}$, составляющее съ AB тотъ же уголъ ω, но съ обратнымъ знакомъ. Такимъ образомъ въ полныхъ пріемахъ внѣцентренность трубы совершенно исключается, и вліяніе ея сказывается только въ томъ, что разногласіе отсчетовъ наблюденій при двухъ положеніяхъ верхней части инструмента будетъ, помимо постоянной величины—двойной коллимаціонной ошибки (см. форм. 58), заключать еще величину перемѣнную (на разныя точки)—двойной уголъ ω.

Вліяніе внѣцентренности надо вычислять и вводить въ отсчеты лишь въ томъ случаѣ, когда было сдѣлано неполное наблюденіе, т. е. *предметъ наблюдался въ какомъ нибудь пріемѣ* одинъ разъ, только при кругѣ лѣво, или только при кругѣ *право. Для* отдаленныхъ предметовъ эта поправка весьма мала; такъ, при *разстояніи $s = 30$ верстамъ и величинѣ $d = 6$ дюймамъ* (половина длины горизонтальной оси), $\omega = 1''$.

10) **Эксцентриситетъ алидады.** Вліяніе этого рода ошибки подробно объяснено въ § 91; тамъ же было доказано, что оно совершенно исключается при двухъ и болѣе верньерахъ или микроскопахъ, расположенныхъ симметрично по лимбу, какъ обыкновенно и дѣлается.

Погрѣшности, зависящія отъ установки инструмента, суть:

11) **Ошибки приведеній.** Въ вычисленіе тріангуляціи должны входить направленія съ одного центра тригонометрическаго знака на другой; но инструментъ весьма трудно, а иногда и невозможно поставить такъ, чтобы его вертикальная ось находилась въ одной отвѣсной линіи съ центромъ знака. Однако въ случаѣ внѣцентреннаго расположенія инструмента вычисляютъ такъ называемыя приведенія (см. главу VIII).

Подъ ошибкою приведенія разумѣютъ погрѣшность, которая можетъ произойти въ вычисленіи отъ невѣрнаго опредѣленія относительнаго положенія вертикальной оси инструмента или визирнаго цилиндра и отвѣсной линіи, проходящей черезъ центръ знака. Эти погрѣшности вообще незначительны, а вліяніе ихъ на измѣряемое направленіе совершенно ничтожно. Въ самомъ дѣлѣ, даже при грубомъ графическомъ опредѣленіи элементовъ приведеній (см. § 106) трудно сдѣлать ошибку въ линейномъ разстояніи болѣе одного дюйма, а дюймъ уже на разстояніи 5 верстъ соотвѣтствуетъ углу въ $1''$; при большемъ же разстояніи ошибка будетъ еще меньше.

Изъ формулы (73), выражающей величину центрировки c, легко простымъ дифференцированіемъ вывести погрѣшность Δc при данныхъ ошибкахъ $\Delta\rho$ и $\Delta\theta$ элементовъ приведеній, именно:

$$\Delta c'' = \varkappa \, \frac{\sin(M-\theta)}{s} \,.\, \Delta\rho - \frac{\rho.\cos(M-\theta)}{s} \,.\, \Delta\theta'' \qquad (64)$$

Пусть $\rho = 1$ сажени, $\Delta\rho = 1$ дюйму, $\Delta\theta = 1^\circ$ и $s = 10$ верстамъ; въ самыхъ невыгодныхъ случаяхъ, т. е. при $M-\theta = 0^\circ$ и 90°, оба члена правой части этой формулы могутъ достигнуть лишь $0''.5$ и $0''.7$.

12) **Ошибки отъ установки штатива.** При прочной установкѣ инструмента на штативѣ или на платформѣ сигнала не можетъ быть и рѣчи о движеніяхъ самыхъ ножекъ инструмента; но подъ вліяніемъ ссыханія дерева отъ сильнаго нагрѣванія солнечными лучами и впитыванія влаги въ сырую погоду,

столбы высокихъ тригонометрическихъ знаковъ подвержены крученію. Явленіе крученія особенно рѣзко замѣчается, когда инструментъ ставится на спиленномъ сверху деревѣ или одиночномъ столбѣ, вокругъ котораго выстроена платформа для наблюдателей. Съ утра до вечера столбы вращаются противъ суточнаго обращенія Солнца, а съ вечера до утра, наоборотъ, по Солнцу, такъ что черезъ 24 часа они приходятъ обыкновенно въ прежнее положеніе. Явленіе крученія столбовъ было обнаружено еще *Байеромъ* на сигналѣ Трунцъ въ 1834 году; онъ нашелъ, что скорость крученія доходитъ до $2''$ въ 1 минуту. Въ 1858 г. капитанъ *Альмеръ* на Мекленбургской тріангуляціи, на сигналѣ Карбовъ, около 5 саженъ высоты, производилъ спеціальныя изслѣдованія крученія столба и нашелъ, что крученіе идетъ неравномѣрно: наибольшая быстрота вращенія замѣчается около 2-хъ часовъ дня, т. е. во время наибольшей температуры, и суточная амплитуда доходитъ до $15'$. Пользованіе одиночными столбами для установки инструмента случалось и въ Россіи (напр. сигналъ Зардобскій въ Елисаветпольской губ., см. Записки В. Т. Депо, часть XX, 1858).

На сигналахъ, подверженныхъ крученію, необходимо наблюдать не иначе, какъ съ повѣрительною трубою, потому что система наблюденій съ обратнымъ вращеніемъ алидаднаго круга во второмъ положеніи инструмента въ каждомъ пріемѣ исключала бы вліяніе крученія только въ томъ случаѣ, если бы послѣднее шло равномѣрно, да и то еще въ предположеніи, что наведенія на послѣдовательные предметы совершаются черезъ равные промежутки времени.

Крученіе сложныхъ сигналовъ, скрѣпленныхъ разными планками, вообще говоря, несравненно меньше, чѣмъ крученіе одиночныхъ столбовъ, но зато оно идетъ еще болѣе неравномѣрно, скачками. Надо стараться защищать сигналъ отъ дѣйствія прямыхъ солнечныхъ лучей, прикрывая его брезентомъ. Впрочемъ, при употребленіи повѣрительной трубы вліяніе крученія совершенно устраняется.

Погрѣшности отъ неоднородности атмосферы суть:

13) **Колебанія изображеній.** О явленіяхъ колебанія изображеній было достаточно сказано въ § 97. Здѣсь остается развѣ

повторить, что наблюдатель долженъ избѣгать измѣрять горизонтальные углы при безпокойныхъ изображеніяхъ. Лучше сдѣлать немного пріемовъ при спокойныхъ изображеніяхъ, чѣмъ много при безпокойныхъ. Въ первомъ случаѣ ошибокъ отъ колебаній изображеній не будетъ вовсе.

14) **Боковое преломленіе.** Преломленіе лучей свѣта въ земной атмосферѣ изслѣдуется уже издавна и теоретически и наблюденіями. Вообще говоря, отдаленные предметы отъ преломленія лучей въ атмосферѣ только повышаются, и потому преломленіе не вліяетъ ни на горизонтальныя направленія, ни на горизонтальные углы. Однако у горизонта разные наблюдатели получаютъ весьма различныя величины преломленія, и отсюда надо заключить, что перемѣны плотностей слоевъ воздуха вблизи поверхности Земли не подчиняются правильной законности, и свѣтовые лучи, уклоняясь неправильно въ вертикальной плоскости, должны уклоняться и въ плоскости горизонтальной, т. е. должно существовать *боковое* преломленіе.

Съ теоретической точки зрѣнія должно различать правильное боковое преломленіе, происходящее отъ того, что слои атмосферы равныхъ плотностей имѣютъ видъ сфероидовъ, а не шаровъ, и преломленіе неправильное, происходящее отъ неравномѣрнаго нагрѣванія слоевъ, благодаря разнообразію отражательной и поглощательной способностей разныхъ родовъ почвы.

Правильное боковое преломленіе служило предметомъ изслѣдованій *Андре* и *Зондерхофа*; при небольшихъ разстояніяхъ оно ничтожно. Что же касается преломленія неправильнаго, то еще *Байеръ* на работахъ Прусской тріангуляціи непосредственно замѣчалъ уклоненія изображеній отдаленныхъ предметовъ до 10″ въ сторону. *В. Струве*, изслѣдуя ошибки разныхъ треугольниковъ, замѣтилъ, что треугольники съ малыми сторонами даютъ въ среднемъ выводѣ меньшія ошибки, чѣмъ треугольники съ большими сторонами, и это нельзя объяснить иначе, какъ существованіемъ бокового преломленія.

Особенно подробныя изслѣдованія по вопросу о боковомъ преломленіи произвелъ прусскій геодезистъ *Фишеръ* (A. Fischer, Der Einfluss der Lateralrefraction auf das Messen von Horisontalwinkeln, 1882). Онъ показалъ, что боковое преломленіе несомнѣнно увеличивается съ увеличеніемъ длины визирной линіи, но для очень длинныхъ линій оно становится меньшимъ; причина послѣдняго заключается въ томъ, что длинныя линіи визированія на тріангуляціяхъ идутъ обыкновенно съ одной высокой горы на другую, и потому преломленіе луча дѣлается уже независимымъ отъ мѣстныхъ причинъ и близости почвы. Вообще боковое преломленіе замѣчается въ тѣхъ случаяхъ, когда лучъ зрѣнія проходитъ очень близко къ поверхности почвы и особенно вблизи скалъ или даже отдѣльныхъ зданій, нагрѣваемыхъ днемъ лучами Солнца. При обыкновенныхъ же условіяхъ наблюденій вліяніе бокового преломленія почти неощутительно, и по сравненію съ другими источниками погрѣшностей имъ всегда можно пренебрегать.

Для полноты вышеприведеннаго перечня ошибокъ надо упомянуть еще о *вліяніи высоты наблюдаемой точки* и *фазъ* наблюдаемыхъ предметовъ. О вліяніи высоты наблюдаемой точки сказано уже въ § 33 и тамъ же приведена формула (29) для вычисленія этого вліянія; о фазахъ же см. § 111.

Окончательная ошибка горизонтальнаго направленія слагается изъ всѣхъ перечисленныхъ и равняется корню квадратному изъ суммы ихъ квадратовъ. Привести точныя числовыя данныя для окончательной ошибки нѣтъ однако возможности, потому что онѣ зависятъ отъ рода инструмента, числа измѣреній (пріемовъ) и пр. Мѣриломъ достоинства тріангуляцій въ смыслѣ точности наблюденій принимаютъ не ошибки отдѣльныхъ направленій, а такъ *называемыя ошибки треугольниковъ* (см. § 47). Для этого служитъ формула, предложенная итальянскимъ геодезистомъ *Ферреро:*

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{3n}} \qquad (65)$$

гдѣ m—средняя ошибка одного угла, $[v^2]$—сумма квадратовъ ошибокъ треугольниковъ, а n—число треугольниковъ разсматриваемой тріангуляціи.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ, извлеченной изъ Отчета Геодезическаго Конгресса въ Вашингтонѣ (1894), приведены данныя различныхъ тріангуляцій:

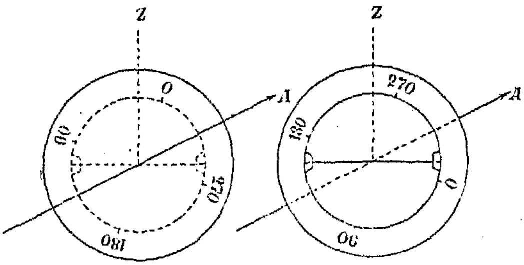
Названія странъ.	Имена художниковъ, поставившихъ инструменты.	Средняя ошибка одного угла.
Австро-Венгрія .	Штарке и Рейхенбахъ	0″.91
Англія	Рамсденъ и Троутонъ	1 .83
Германія	Писторъ и Мартинсъ	0 .73
Данія	Эртель и Рейхенбахъ	0 .74
Индія	Троутонъ и Симсъ	1 .00
Испанія	Писторъ, Эртель и Репсольдъ . . .	0 .89
Италія	Писторъ, Рейхенбахъ и Штарке. .	0 .92
Россія	Эртель, Репсольдъ и Брауеръ . . .	1 .50
Франція	Гамбей и Бруннеръ	0 .76
Швеція	Эртель и Репсольдъ	1 .09

104. Измѣреніе вертикальныхъ угловъ. Вертикальнымъ угломъ или зенитнымъ разстояніемъ называется уголъ, составленный визирною линіею на данный предметъ съ направленіемъ отвѣсной линіи въ точкѣ наблюденія. Въ теодолитахъ и универсалахъ вертикальные углы отсчитываются на вертикальномъ лимбѣ, неизмѣнно скрѣпленномъ съ горизонтальною осью трубы (а слѣдовательно и съ самою трубою), по верньерамъ алидаднаго круга, положеніе котораго, относительно отвѣсной линіи, повѣряется во время наблюденій особымъ уровнемъ.

На чертежѣ 150 схематически изображены вертикальный лимбъ и зрительная труба въ двухъ положеніяхъ инструмента: кругъ лѣво (къ зрителю обращена труба) и кругъ право (къ зрителю обращенъ лимбъ). Вертикальный уголъ, подобно всякому другому углу, представляется разностью отсчетовъ по лимбу при наведеніяхъ трубы по направленіямъ двухъ сторонъ угла, т. е. въ данномъ случаѣ при наведеніяхъ трубы на предметъ и въ зенитъ. Назовемъ отсчеты лимба при наведеніи трубы на предметъ A при кругѣ лѣво буквою $Л$, при кругѣ право буквою $П$, а при наведеніи въ зенитъ Z буквою M (этотъ послѣдній очевидно не зависитъ отъ положенія инструмента и называется *мѣстомъ зенита*). Изъ чертежа легко усмотрѣть, что при кругѣ лѣво отсчетъ при наведеніи трубы на A больше, чѣмъ при наведеніи на Z, при кругѣ право—наоборотъ, и потому, называя вертикальный уголъ или зенитное разстояніе буквою z, получимъ

$$\left.\begin{aligned} z &= Л - М \\ z &= М - П \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

Навести трубу точно въ зенитъ и сдѣлать соотвѣтствующій отсчетъ по лимбу конечно немыслимо, но изъ наблюденій пред-



Кругъ лѣво   Кругъ право

Черт. 150.

мета при кругѣ лѣво и при кругѣ право, дающихъ два вышестоящія уравненія съ двумя неизвѣстными z и $М$, можно ихъ опредѣлить, именно, складывая и вычитая эти уравненія, получимъ *):

Зенитное разстояніе . $z = \dfrac{Л - П}{2}$ (67)

Мѣсто зенита . . . $М = \dfrac{Л + П}{2}$ (68)

Если изъ двукратнаго наблюденія одного предмета (при кругѣ лѣво и кругѣ право) мѣсто зенита выведено, то зенит-

---

*) Формулы (66), (67) и (68) относятся къ наиболѣе часто встрѣчающемуся устройству инструмента, когда лимбъ соединенъ съ трубою, и подписи на немъ возрастаютъ по направленію движенія стрѣлокъ часовъ; если же съ трубою соединенъ алидадный кругъ, или подписи на лимбѣ возрастаютъ въ обратномъ направленіи, то надо пользоваться формулами:

$$\begin{aligned} z &= М - Л \\ z &= П - М \end{aligned} \quad \text{и} \quad z = \frac{П - Л}{2}$$

ныя разстоянія на всѣ другіе предметы можно вычислить по одной изъ формулъ (66); однако вслѣдствіе неизбѣжныхъ перемѣнъ въ инструментѣ не слѣдуетъ полагаться на неизмѣнность мѣста зенита, а лучше всѣ предметы наблюдать два раза, при обоихъ положеніяхъ, т. е. и при кругѣ лѣво, и при кругѣ право. При такомъ порядкѣ, кромѣ независимаго вывода всѣхъ зенитныхъ разстояній, получается еще и повѣрка неизмѣнности инструмента и точности наведеній и отсчетовъ, потому что выводимыя изъ наблюденій на каждый предметъ отдѣльно мѣста зенита должны быть близки къ равенству. Словомъ, постоянство мѣста зенита при измѣреніи вертикальныхъ угловъ играетъ ту же роль, какъ постоянство двойной коллимаціонной ошибки при измѣреніи горизонтальныхъ направленій и угловъ (см. форм. 58).

Выше было упомянуто, что при каждомъ наведеніи трубы на предметъ надо повѣрять положеніе уровня при алидадѣ вертикальнаго круга. Въ случаѣ перемѣны пузырекъ легко привести на середину вращеніемъ особаго микрометрическаго винта. Если наблюдатель имѣетъ помощника, то приведеніе пузырька на середину лежитъ на обязанности послѣдняго, подобно тому, какъ при измѣреніи горизонтальныхъ направленій помощникъ слѣдитъ за повѣрительною трубою; разница только въ томъ, что горизонтальныя направленія можно измѣрять и вовсе безъ повѣрительной трубы, тогда какъ вертикальные углы безъ уровня при алидадѣ измѣрять нельзя; опытъ показалъ, что даже въ самыхъ совершенныхъ инструментахъ алидада вертикальнаго круга при переводахъ трубы съ одного предмета на другой не остается въ неизмѣнномъ положеніи относительно отвѣсной линіи.

Подобно тому какъ повѣрительную трубу можно не наводить каждый разъ на тотъ же предметъ, а измѣрять ея смѣщеніе при помощи микрометра, такъ и при наблюденіи вертикальныхъ угловъ можно бы не устанавливать пузырекъ точно на середину трубки, а отсчитывать положеніе концовъ пузырька и вводить затѣмъ поправку за наклонность алидады (см. § 156). Но такъ какъ, вслѣдствіе неизвѣстныхъ перемѣнъ земного преломленія, зенитныя разстоянія на тріангуляціяхъ не могутъ получаться съ большою точностью, то обыкновенно довольствуются

24*

только приближенною установкою пузырька на середину трубки, что облегчаетъ послѣдующія вычисленія.

Когда наблюдатель установитъ и закрѣпитъ зрительную трубу въ такомъ положеніи, что для окончательнаго наведенія надо будетъ сдѣлать лишь небольшой поворотъ микрометрическаго винта въ положительную сторону, онъ произноситъ «готово». Помощникъ тотчасъ подводитъ пузырекъ уровня на середину трубки и, сказавъ «есть», продолжаетъ смотрѣть на пузырекъ. Наблюдатель же вводитъ изображеніе предмета точно въ середину между горизонтальными нитями и отвѣчаетъ «есть». Если пузырекъ оставался на мѣстѣ, то вслѣдъ за этимъ наблюдатель дѣлаетъ отсчеты по всѣмъ верньерамъ вертикальнаго лимба, а помощникъ записываетъ ихъ въ полевой журналъ, причемъ градусы записываетъ лишь по первому верньеру. Если же пузырекъ успѣлъ сдвинуться, то установка уровня и наведеніе зрительной трубы повторяются въ прежнемъ порядкѣ. При отсутствіи помощника уровень подводится самимъ наблюдателемъ.

Вертикальные углы всѣхъ окружающихъ направленій наблюдаются обыкновенно круговыми пріемами, т. е. сперва наблюдаютъ при одномъ положеніи (напримѣръ при кругѣ лѣво) всѣ предметы въ порядкѣ ихъ азимутовъ (по Солнцу), а затѣмъ, послѣ перевода черезъ зенитъ, т. е. при другомъ положеніи круга, тѣ же предметы наблюдаютъ въ обратномъ порядкѣ (противъ Солнца). Здѣсь нѣтъ надобности повторять въ каждомъ полупріемѣ наведенія на начальный предметъ, какъ это дѣлается при измѣреніи горизонтальныхъ направленій, потому что точность измѣренія вертикальныхъ угловъ не зависитъ отъ неподвижности нижней части инструмента.

Число пріемовъ при измѣреніи вертикальныхъ угловъ обыкновенно меньше, чѣмъ при измѣреніи угловъ горизонтальныхъ. Наибольшія погрѣшности при измѣреніи вертикальныхъ угловъ происходятъ отъ перемѣнъ земного преломленія, а эти перемѣны лишь частью исключаются самыми наблюденіями, и точность измѣреній мало возрастаетъ съ увеличеніемъ числа пріемовъ. Повтореніе пріемовъ дѣлается здѣсь больше для того, чтобы открыть промахи при отсчетахъ, и такъ какъ, въ случаѣ разногласія результатовъ, вычислитель останется въ сомнѣніи, какой пріемъ вѣренъ, то необходимо дѣлать не менѣе 3-хъ пріемовъ; этимъ числомъ обыкновенно и ограничиваются. Перестановка алидады между пріемами не обязательна, да къ тому же и не во всѣхъ инструментахъ она возможна (см. § 93).

Порядокъ записей наблюденій въ полевой журналъ и выводъ среднихъ, а потомъ мѣста зенита и зенитнаго разстоянія показанъ въ нижеслѣдующей таблицѣ.

Пирамида Лапышино, 31 Августа 1889 г., 1 ч. дня.

Ясно, слабый юго-западный вѣтеръ.

№	Названія точекъ.	Отсчеты. Л	Отсчеты. П	Среднія.	Мѣста зенита.	Зенитныя разстоянія.
1	Тиши, пир. .	188°39′10″	7°39′30″	188°39′ 5″	98°9′20″	90°29′45″
		39 0	39 40	7 39 35		
2	Сушани, пир.	184 51 0	11 27 50	184 51 5	98 9 30	86 41 35
		51 10	28 0	11 27 55		
3	Боровичи . . колокольня собора	182 56 10	13 22 40	182 56 20	98 9 27 .5	84 46 52 .5
		56 30	22 30	13 22 35		

При измѣреніи вертикальныхъ угловъ въ полевомъ журналѣ послѣ названія каждаго предмета дѣлается небольшой схематическій рисунокъ, на которомъ толстой поперечной чертой показывается то мѣсто предмета, на которое производились наведенія. При измѣреніи горизонтальныхъ направленій только весьма рѣдко можетъ явиться сомнѣніе, на что именно дѣлалось наведеніе: каждый тригонометрическій знакъ, колокольня, флагштокъ и т. д. представляютъ вертикальную ось симметріи (визирный цилиндръ, стержень креста и т. п.), на которую, конечно, и дѣлаютъ наведеніе почти безсознательно. Для наведеній же при измѣреніи вертикальныхъ угловъ нѣтъ опредѣленной части, на которую слѣдовало бы непремѣнно наводить горизонтальныя нити; смотря по состоянію погоды и силѣ освѣщенія, разныя части предметовъ кажутся наиболѣе пригодными для наведеній: на близкихъ разстояніяхъ хорошею цѣлью можетъ служить горизонтальная линія раздѣла бѣлой и черной половинъ визирнаго цилиндра, на дальнихъ эта линія уже не видна, и приходится наводить на горизонтальную планку или на самую вершину цилиндра, даже просто на переводину пола; точно также, при наблюденіяхъ колоколенъ, одни наводятъ на перекладину креста *), другіе на яблоко подъ крестомъ и т. д. Понятно, что необходимо записывать, а еще лучше зарисовывать, что̀ именно наблюдалось, иначе, при послѣдующихъ вычисленіяхъ, могутъ встрѣтиться весьма прискорбныя недоразумѣнія, чаще всего происходящія отъ того, что съ разныхъ точекъ наведенія дѣлались на разныя части того же предмета.

Ошибки измѣреній вертикальныхъ угловъ столь же разнообразны, какъ и ошибки измѣреній угловъ горизонтальныхъ. Онѣ не заслуживаютъ однако подробнаго изслѣдованія, потому что главный источникъ погрѣшности, поглощающій всѣ прочіе, заключается здѣсь въ неизвѣстности земного преломленія (см. § 150).

---

*) Надо остерегаться наводить на перекладину креста, потому что съ одной точки она можетъ быть хорошо видна, а съ другой, лежащей въ вертикальной плоскости креста, будетъ совершенно не видима.

VIII.

Приведеніе наблюденій.

105. Разные роды приведеній. Если бы на каждой тригонометрической точкѣ ось визирнаго цилиндра, вертикальная ось угломѣрнаго инструмента и центръ знака находились въ одной отвѣсной прямой, то направленія или углы, получаемые непосредственными наблюденіями, представляли бы готовыя данныя для послѣдующихъ вычисленій. Въ дѣйствительности такое расположеніе бываетъ довольно рѣдко. При заложеніи центра подъ тригонометрическимъ знакомъ стараются, чтобы онъ пришелся на одной отвѣсной линіи съ осью визирнаго цилиндра, но отъ ссыханія бревенъ и осѣданія всей постройки визирный цилиндръ выходитъ изъ своего первоначальнаго положенія. Угломѣрный инструментъ часто нарочно ставятъ не надъ самымъ центромъ знака, если, напримѣръ, нога пирамиды или столбъ сигнала мѣшаетъ видѣть предметъ, подлежащій наблюденію. Внутри колоколенъ и башенъ съ узкими окнами почти всегда приходится ставить инструментъ не по серединѣ. Кромѣ того, въ зависимости отъ положенія Солнца надъ горизонтомъ, середина освѣщенной части наблюдаемаго предмета зачастую не совпадаетъ съ его вертикальною осью. Такимъ образомъ наблюденныя направленія, т. е. направленія съ центра угломѣрнаго инструмента на середину цѣли визированія должны быть потомъ *приведены* къ направленіямъ съ центра одной тригонометрической точки на центръ другой. Здѣсь вполнѣ оправдывается важное практическое правило: легче измѣрить малую величину, чѣмъ сдѣлать ее нулемъ.

Въ горизонтальныхъ направленіяхъ или углахъ различаютъ три рода приведеній: *центрировки* или приведеніе направленій, измѣренныхъ инструментомъ, стоявшимъ не надъ центромъ знака, къ центру, *редукціи* или приведеніе направленій, измѣренныхъ на вершину сосѣдняго знака, къ его центру и *поправки фазъ* или приведеніе направленій на середину освѣщенной части цѣли къ направленіямъ на ея геометрическую середину *).

Такъ какъ каждый горизонтальный уголъ есть разность двухъ горизонтальныхъ направленій, то ниже разсмотрѣны только приведенія направленій; приведеніе горизонтальнаго угла равно, очевидно, разности приведеній соотвѣтствующихъ направленій.

Въ вертикальныхъ углахъ или зенитныхъ разстояніяхъ принимаютъ въ разсчетъ только центрировки и редукціи, потому что поправки фазъ вообще ничтожны, и при малой точности измѣренія вертикальныхъ угловъ ими почти всегда можно пренебрегать; притомъ же онѣ могутъ явиться только при наблюденіи полированныхъ шаровъ, которыми въ настоящее время почти не пользуются.

Для вычисленія приведеній, кромѣ приближеннаго знанія сторонъ и угловъ треугольниковъ тріангуляціи, необходимо имѣть *элементы приведеній*, т. е. координаты центра инструмента и середины цѣли (визирнаго цилиндра) относительно центра знака. Элементы приведеній горизонтальныхъ направленій выражаются обыкновенно полярными координатами. Такъ, элементами центрировки служатъ горизонтальный уголъ при центрѣ инструмента между направленіями на центръ знака и на одну изъ окружающихъ тригонометрическихъ точекъ и линейное разстояніе проекціи вертикальной оси инструмента отъ центра, а элементами редукціи служатъ горизонтальный уголъ при вершинѣ знака между направленіемъ на его центръ и на одну изъ окружающихъ тригонометрическихъ точекъ и линейное разстояніе проекціи оси визирнаго цилиндра отъ центра.

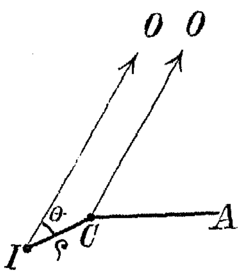
---

*) При самыхъ точныхъ геодезическихъ работахъ принимаютъ еще иногда въ разсчетъ абсолютную высоту наблюдаемой точки; см. § 33, форм. (29).

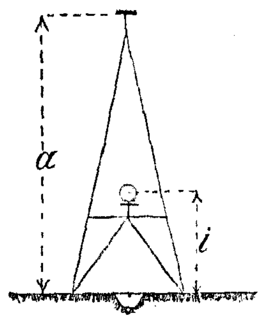
Пусть на черт. 151 точки C, I и A представляютъ проекціи на горизонтальную плоскость центра знака, вертикальной оси инструмента и оси визирнаго цилиндра, а линіи IO и CO— направленія на одну изъ окружающихъ тригонометрическихъ точекъ. Здѣсь элементы центрировки суть уголъ $OIC = \theta$ и разстояніе $IC = \rho$; элементы же редукціи—уголъ $OAC = \theta_1$ и разстояніе $CA = \rho_1$ (на чертежѣ 151 надо провести прямую AO, параллельную CO).

Для вычисленія поправокъ фазъ необходимо знать еще азимутъ Солнца въ моментъ наблюденія.

Для вычисленія приведеній вертикальныхъ угловъ требуется знать: для вычисленія центровокъ — высоту инструмента i



Черт. 151.



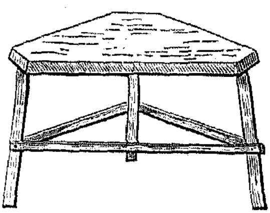
Черт. 152.

(черт. 152), т. е. превышеніе горизонтальной оси инструмента надъ центромъ, а для вычисленія редукцій — высоту знака a, т. е. превышеніе предмета, который служилъ цѣлью при измѣреніи вертикальныхъ угловъ надъ центромъ (см. конецъ § 104).

При опредѣленіи элементовъ приведеній необходимо имѣть въ виду, съ какою точностью надо знать ихъ въ каждомъ данномъ случаѣ. Формула (64), представляющая вліяніе ошибокъ элементовъ на ошибку направленія, показываетъ, что эта ошибка зависитъ не отъ относительной, а отъ абсолютной точности элементовъ приведеній; такъ, напримѣръ, ошибка въ 1 дюймъ въ величинѣ ρ произведетъ одинаковую ошибку, будетъ ли само ρ равно 1 дюйму или 1 сажени. Поэтому при опредѣленіи элементовъ приведеній можно и должно пользоваться различными пріемами, лишь бы въ каждомъ частномъ случаѣ они давали достаточную точность при наименьшей затратѣ времени и труда. Когда величины ρ и ρ_1 малы, то онѣ могутъ быть опредѣлены самымъ грубымъ образомъ, простымъ графическимъ построеніемъ; если же онѣ велики, то приходится примѣнять болѣе точные пріемы и прибѣгать иногда къ составленію вспомогательной тріангуляціи. Въ нижеслѣдующихъ §§ объяснены правила для опредѣленія элементовъ приведеній въ разныхъ частныхъ случаяхъ.

Такъ какъ приведенія вообще незначительны и рѣдко превышаютъ ошибки наблюденій, то если они вычислены невѣрно или введены не съ должнымъ знакомъ, то такіе промахи не бросаются въ глаза. Поэтому, для избѣжанія недоразумѣній, необходимо опредѣлять элементы приведеній непремѣнно съ повѣрками; повѣрки наблюденій и вычисленій необходимы всегда, такъ какъ никто не защищенъ отъ промаховъ: не ошибается лишь тотъ, кто ничего не дѣлаетъ; но при другихъ геодезическихъ дѣйствіяхъ ошибки обнаруживаются какъ-то сами собою, невѣрности же приведеній обыкновенно скрываются другими ошибками и трудно подмѣчаются.

106. Графическое опредѣленіе элементовъ. При наблюденіяхъ на тригонометрическихъ знакахъ, т. е. сооруженіяхъ, спеціально къ тому назначенныхъ, элементы приведеній всего проще и удобнѣе опредѣляются при помощи графическаго построенія. Такое построеніе производится на бумагѣ, набиваемой на такъ называемый *центрировочный столикъ* (черт. 153); для проектированія же пользуются небольшимъ инструментомъ, зрительная труба котораго можетъ имѣть значительное движеніе въ вертикальной плоскости; когда такого особаго *центрировочнаго инструмента* не имѣется, то проектированіе дѣлается угломѣрнымъ инструментомъ, служащимъ для самыхъ наблюденій.



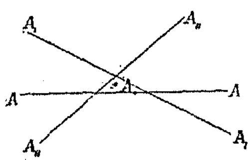
Черт. 153.

Установивъ столикъ надъ центромъ такъ, чтобы верхняя доска его была приблизительно горизонтальна (на глазъ по отдаленному горизонту или при помощи небольшого уровня), и съ разсчетомъ, чтобы все построеніе помѣстилось на бумагѣ, наблюдатель отходитъ отъ него саженей на 10 или 15 въ такое мѣсто, съ котораго ничто не мѣшаетъ видѣть визирный цилиндръ, инструментъ и центръ знака *). Затѣмъ ось трубы центрировочнаго инструмента приводится въ горизонтальное положеніе, наблюдатель закрѣпляетъ алидадную часть по азимуту, наводитъ трубу на визирный цилиндръ и плавно опускаетъ ее до тѣхъ поръ, пока не увидитъ ясно бумагу на столикѣ. Помощникъ же, по указаніямъ наблюдателя, отмѣчаетъ карандашомъ двѣ точки, опредѣляющія на бумагѣ проекцію вертикальной плоскости, заключающей ось визирнаго цилиндра. Подобнымъ же образомъ получаются на бумагѣ точки, опредѣляющія проекціи вертикальныхъ плоскостей, заключающихъ вертикальную ось инструмента и центръ. Для уменьшенія погрѣшностей при прочерчиваніи прямыхъ, соединяющихъ соотвѣтствующія точки, надо ставить парныя точки по возможности дальше другъ отъ друга, на самыхъ краяхъ бумаги. Если повторить затѣмъ подобныя же дѣйствія съ другой точки стоянія, то пересѣченія соотвѣтствующихъ прямыхъ дадутъ на бумагѣ положеніе проекцій оси визирнаго цилиндра, вертикальной оси инструмента и центра. Для повѣрки обыкновенно не довольствуются пересѣченіями двухъ прямыхъ, а становятся еще на третью точку такъ, чтобы каждая проекція получилась пересѣченіемъ трехъ прямыхъ. Всего лучше, если эти прямыя составляютъ между собою углы около 60°; для этого наблюдатель долженъ *заранѣе выбрать* мѣста установокъ центрировочнаго инструмента.

---

*) Для лучшей видимости центра въ него втыкаютъ отвѣсно иглу или гвоздикъ, или же ставятъ одинъ изъ ящичныхъ упаковочныхъ винтовъ. Гвоздь можно вбить и въ вершину визирнаго цилиндра, такъ какъ, по малости разстоянія, изображеніе цилиндра обыкновенно не помѣщается въ полѣ зрѣнія трубы центрировочнаго инструмента. Если же означеніе середины визирнаго цилиндра гвоздемъ невозможно, то инструментъ ставятъ такъ, чтобы хоть видимая толщина цилиндра была меньше діаметра поля зрѣнія, и о точности наведенія судятъ по равенству свѣтлыхъ сегментовъ по бокамъ изображенія. Наконецъ, можно навести трубу на оба края цилиндра, сдѣлать отсчеты и установить алидаду по среднему изъ отсчетовъ.

Вслѣдствіе неполной горизонтальности оси трубы, неточности наведеній, а также ошибокъ въ постановкѣ карандаша, три прямыя, изображающія проекціи вертикальныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ ту же отвѣсную линію (напр. ось визирнаго цилиндра), обыкновенно не пересѣкаются строго въ одной точкѣ, а даютъ небольшой треугольникъ погрѣшности (черт. 154). Вѣроятнѣйшее мѣсто проекціи есть точка A_0, внутри треугольника, опредѣляемая условіемъ, чтобы сумма квадратовъ ея разстояній отъ трехъ сторонъ треугольника была наименьшею, т. е. точка, разстоянія которой до трехъ сторонъ пропорціональны этимъ сторонамъ. Впрочемъ, когда треугольникъ погрѣшности малъ, то окончательное положеніе проекціи опредѣляется обыкновенно на глазъ, выбирая точку A_0 приблизительно по серединѣ треугольника, ближе къ наименьшей его сторонѣ; если же треугольникъ великъ, то необходимо повторить всю работу и открыть причину ошибки. При извѣстномъ вниманіи и тщательности работы треугольники погрѣшностей получаются не больше нѣсколькихъ десятыхъ дюйма.



Черт. 154.

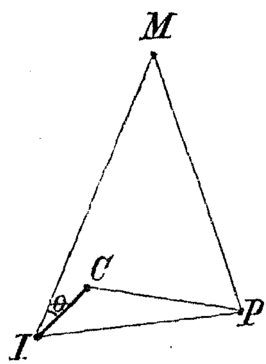
Когда на бумагѣ опредѣлены точки C, I и A (черт. 151), двѣ послѣднія соединяются съ первою, и полученныя разстоянія даютъ величины ρ и ρ_1 простымъ измѣреніемъ циркулемъ, по масштабу. Затѣмъ прочерчиваютъ направленіе на предметъ, принимавшійся во время наблюденій за начальный *) и измѣряютъ углы θ и θ_1 транспортиромъ. Для повѣрки весьма полезно измѣрить еще транспортиромъ же уголъ при проекціи центра между направленіями на проекціи вершины и инструмента; этотъ уголъ долженъ равняться разности $\theta - \theta_1$. Кромѣ того, чтобы потомъ не сбиться въ оріентированіи полученныхъ при-

*) Это легко сдѣлать помощью визированія черезъ два карандаша или по краю линейки. Если сигналъ стоитъ въ лѣсу, и съ центрировочнаго столика не видны окружающія точки, то выставляется отдѣльная марка, которую надо, конечно, пронаблюдать не менѣе, какъ въ двухъ пріемахъ, при измѣреніи горизонтальныхъ направленій.

веденій, не мѣшаетъ тутъ же прочертить направленіе на сѣверъ, по буссоли или хотя на глазъ. Наконецъ, на томъ же листѣ необходимо написать названіе тригонометрической точки и время работы. Измѣреніе разстояній ρ и ρ_1 и угловъ θ и θ_1 въ случаѣ ненастной погоды можно дѣлать и впослѣдствіи, дома.

Случается, что отъ неудачнаго расположенія столика или вслѣдствіе значительнаго взаимнаго удаленія проекцій пересѣченія соотвѣтствующихъ прямыхъ получаются внѣ бумаги. Если по расположенію направленій видно, что треугольникъ погрѣшности малъ, то работу можно не передѣлывать (въ новомъ положеніи столика), а дѣйствительныя пересѣченія получить потомъ, на добавочномъ листѣ. Обыкновенно прибиваютъ не одинъ, а нѣсколько листовъ бумаги; въ случаѣ неудачной установки центрировочнаго столика или ошибочнаго построенія проще сорвать верхній листъ, чѣмъ прибивать новый.

107. Аналитическое опредѣленіе элементовъ. Если разстоянія проекцій вершины, инструмента и центра такъ велики, что листа писчей бумаги недостаточно, или если нѣтъ центрировочнаго столика, то элементы приведеній можно получить изъ вычисленія наблюденій, сдѣланныхъ съ трехъ окружающихъ точекъ, избранныхъ, какъ объяснено выше. Разница будетъ та, что при послѣдовательныхъ наведеніяхъ на визирный цилиндръ, на вертикальную ось инструмента и на центръ знака надо дѣлать отсчеты по горизонтальному лимбу, на каждой точкѣ наблюдать еще одинъ изъ окружающихъ предметовъ (по возможности отдаленный) и измѣрять мѣрною тесьмою разстояніе отъ точки стоянія до центра.



Черт. 155.

Пусть I и C (черт. 155) представляютъ проекціи оси инструмента и центра знака, P — одну изъ точекъ стоянія центрировочнаго инструмента, а M—отдаленный предметъ. Кромѣ принятыхъ уже обозначеній $\rho = IC$ и $\theta = \angle CIM$, назовемъ еще углы: CPI черезъ p, MPI черезъ P и IMP черезъ α, а разстоянія: MI черезъ s и CP, почти равное IP, черезъ d.

Имѣемъ изъ Δ-ка MIP. $\quad\quad \sin\alpha = \frac{d}{s}\sin P$

» » Δ-ка CIP. $\quad\quad \rho . \sin\{\theta + (\alpha + P)\} = d . \sin p \quad (a)$

Означивъ для краткости

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha + P = R & \rho . \cos\theta = x \\ d . \sin p = r & \rho . \sin\theta = y \end{array}\right\} \quad (b)$$

изъ уравненія (a) получимъ

$$x . \sin R + y . \cos R = r \quad (c)$$

Для другихъ двухъ точекъ стоянія инструмента получимъ еще два такихъ же уравненія (c); изъ всѣхъ трехъ, по способу наименьшихъ квадратовъ, легко опредѣлить неизвѣстныя x и y, а затѣмъ, по формуламъ (b)—искомыя ρ и θ.

Въ частномъ случаѣ, если точки стоянія (P) избраны такъ, что направленія на нихъ съ центра C образуютъ углы въ 60° или 120°, рѣшеніе трехъ уравненій вида (c) значительно упрощается, именно тогда будетъ

$$x = \frac{2}{3}[r . \sin R] \quad\quad y = \frac{2}{3}[r . \cos R]$$

гдѣ скобки [ ] означаютъ сумму подобныхъ членовъ. Такимъ образомъ для вычисленія элементовъ центрировки по наблюденіямъ съ трехъ симметрично расположенныхъ точекъ, необходимы формулы:

$$\left.\begin{array}{lll} \sin\alpha = \frac{d}{s}\sin P & x = \frac{2}{3}[r . \sin R] & tg\,\theta = \frac{y}{x} \\ R = \alpha + P & & \\ r = d . \sin p & y = \frac{2}{3}[r . \cos R] & \rho = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} \end{array}\right\} \quad (69)$$

Сперва вычисляютъ отдѣльно для каждой точки стоянія величины α, R и r, а затѣмъ координаты x, y, θ и ρ. Совершенно такія же формулы служатъ для вычисленія элементовъ редукціи.

Числовой примѣръ. Вокругъ пирамиды избраны три точки стоянія и получены слѣдующіе отсчеты направленій (каждое изъ нижеслѣдующихъ чиселъ есть среднее изъ наблюденій при двухъ положеніяхъ трубы инструмента и отсчетовъ по двумъ верньерамъ):

Точки стоянія	I	II	III
На инструментъ I . .	$322^\circ\ 2'\ 0''$	$13^\circ\ 33'\ 15''$	$8^\circ\ 29'\ 20''$
„ центръ C	321 26 40	13 9 30	8 44 0
„ колокольню M . .	339 7 35	331 8 0	266 52 30
Разстояніе d	$67^ф\ 2^д.3$	$60^ф\ 6^д.5$	$60^ф\ 3^д.0$

Разстояніе $s = 875.58$ саженъ.

	I	II	III
p	$-35'20''$	$-23'\ 45''$	$+14'\ 40''$
P	17 5 35	317 34 45	258 23 10
α	$+11\ 5$	$-22\ 55$	$-33\ 6$
R	17 16 40	317 11 50	257 50 4
$lg\ r$	$_n 0.91840$	$_n 0.70063$	0.48920

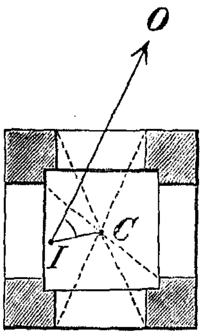
$x = -1.3775$ $\quad\theta = 260^\circ 25'$

$y = -8.1637$ $\quad\rho = \ 8.28$ дюйма.

108. Непосредственное измѣреніе элементовъ. При наблюденіяхъ на колокольняхъ, башняхъ и вообще внутри зданій, черезъ окна, пользоваться центрировочнымъ столикомъ почти невозможно: трудно найти вблизи такія точки, съ которыхъ можно было бы видѣть и наблюдать инструментъ, стоящій внутри постройки. Въ этихъ случаяхъ элементы центрировки опредѣляются обыкновенно непосредственными измѣреніями. Что же касается до элементовъ редукціи, то ихъ здѣсь вовсе не надо опредѣлять, потому что въ постоянныхъ зданіяхъ центровъ не закладываютъ, и за центръ принимается вертикальная ось самого строенія, напримѣръ ось креста колокольни, флагштокъ башни, вершина остроконечной крыши и т. п.

Опредѣленіе элементовъ центрировки начинается съ означенія на полу внутри зданія точки C (черт. 156), черезъ которую проходитъ вертикальная ось симметріи. Простѣйшимъ образомъ это дѣлается при помощи нитокъ или тонкихъ бичевокъ, натягиваемыхъ внутри по *нѣсколькимъ* діагоналямъ (не менѣе трехъ, чтобы имѣть повѣрку), какъ показано на чертежѣ пунктирными линіями.

Если башня не имѣетъ симметрической фигуры, или вообще если наблюдатель сомнѣвается, поставленъ ли, напримѣръ, крестъ точно по оси симметріи колокольни, то назначеніе на полу проекціи креста можетъ быть сдѣлано визированіями извнѣ центрировочнымъ инструментомъ, какъ это было объяснено въ описаніи графическаго опредѣленія элементовъ. Сперва проекціи вертикальныхъ плоскостей назначаются на подоконникахъ карандашомъ или гвоздиками, затѣмъ самая проекція получается при помощи нитокъ или бичевокъ, туго натягиваемыхъ между соотвѣтствующими точками. Въ каждомъ частномъ случаѣ опытный наблюдатель находитъ впрочемъ новые пріемы для точнѣйшаго рѣшенія этой задачи.

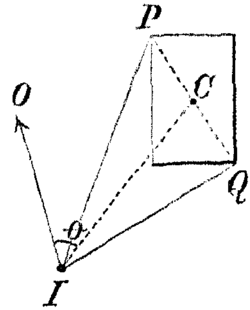


Черт. 156.

Когда проекція вершины назначена, то опредѣленіе элементовъ приведенія не представляетъ уже никакихъ затрудненій. Разстояніе отъ оси инструмента (которую можно проектировать на тотъ же полъ просто отвѣсомъ) измѣряется мѣрною тесьмою. Уголъ же $OIC = \theta$ между начальнымъ предметомъ и центромъ измѣряется угломѣрнымъ инструментомъ, наводя трубу его, въ 2—3-хъ пріемахъ, въ числѣ прочихъ предметовъ и на центръ, и отсчитывая верньеры или микроскопы. Въ виду малости разстоянія IC, изображеніе гвоздика или точки, которою означенъ центръ, не можетъ быть видно ясно, и потому, при такихъ наведеніяхъ, надо надѣвать на объективъ зрительной трубы вычерненный внутри колпачекъ съ маленькимъ отверстіемъ по серединѣ. Если же такого колпачка не имѣется, то можно наводить трубу приблизительно, глядя поверхъ ея: уголъ θ достаточно получить съ точностью до нѣсколькихъ минутъ.

109. Опредѣленіе элементовъ вспомогательными наблюденіями. Бываютъ случаи, когда вышеприведенные способы опредѣленія элементовъ непримѣнимы, напримѣръ, когда центръ или вершина совершенно недоступны и даже невидимы. Тогда приходится прибѣгать къ вспомогательнымъ наблюденіямъ, которыя бываютъ весьма разнообразны. Ниже разсмотрѣно четыре частныхъ случая.

1) *Четырехугольная или вообще многогранная симметрическая башня* (черт. 157); изъ точки стоянія инструмента видны два противоположныхъ ребра.



Черт. 157.

Пусть I — мѣсто инструмента, C — центръ башни. Изъ непосредственныхъ измѣреній получаются разстоянія $IP = m$ и $IQ = n$ отъ вертикальной оси угломѣрнаго инструмента I до вершинъ двухъ противоположныхъ угловъ башни P и Q, и уголъ $PIQ = A$, представляющій разность угловъ OIQ и OIP. Требуется опредѣлить уголъ $OIC = \theta$ и разстояніе $IC = \rho$. Называя для краткости углы PIC и CIQ черезъ α и β, имѣемъ:

$$\text{Изъ } \triangle\text{-ка } PIC \ldots \frac{PC}{m} = \frac{\sin\alpha}{\sin PCI}$$

$$\text{» } \triangle\text{-ка } QIC \ldots \frac{QC}{n} = \frac{\sin\beta}{\sin QCI}$$

Раздѣляя одну пропорцію на другую и замѣчая, что $PC = QC$ и $\sin PCI = \sin QCI$, получаемъ:

$$\frac{n}{m} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Откуда

$$\frac{n-m}{n+m} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot cotg\,\frac{\alpha+\beta}{2}$$

и

$$tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{n-m}{n+m} \cdot tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (70)$$

Такъ какъ $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{A}{2}$, то, зная полусумму и полуразность угловъ α и β, легко вычислить и самые углы α и β. Далѣе:

$$\text{Изъ } \triangle\text{-ка } PIQ \ldots \frac{PQ}{n} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin IPQ}$$

$$\text{» } \triangle\text{-ка } PIC \ldots \frac{PC}{\rho} = \frac{\sin\alpha}{\sin IPC}$$

Раздѣляя одну пропорцію на другую и замѣчая, что $PQ = 2\,PC$, а $\angle IPQ = \angle IPC$, получаемъ:

$$\rho \,.\, sin\,\alpha = \frac{n}{2} \,.\, sin\,(\alpha + \beta) \tag{a}$$

Точно также изъ $\triangle$-овъ PIQ и CIQ:

$$\rho \,.\, sin\,\beta = \frac{m}{2} \,.\, sin\,(\alpha + \beta) \tag{b}$$

Складывая уравненія (a) и (b), послѣ простыхъ преобразованій получимъ:

$$\rho = \frac{n+m}{2} \,.\, cos\,\frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, sec\,\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{70*}$$

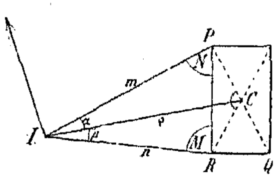
Формулы (70) и (70*) въ простѣйшемъ, удобномъ для логариѳмированія видѣ представляютъ рѣшеніе задачи. Наконецъ уголъ θ найдется по формулѣ

$$\theta = \angle\, OIP + \alpha$$

Числовой примѣръ: $m = 153^{\partial}.4$, $n = 127^{\partial}.0$, $\angle\, OIP = 27°\,30'$, $\angle\, OIQ = 70°4'$. По этимъ даннымъ получено: $\alpha = 19°11'$, $\beta = 23°23'$, а затѣмъ $\rho = 130^{\partial}.72$ и $\theta = 46°41'$.

2) *Прямоугольная башня* (черт. 158); изъ точки стоянія инструмента видны края одной только стороны.

Пусть I— мѣсто инструмента, C— центръ башни. Изъ непосредственныхъ измѣреній получаются разстоянія $IP = m$ и $IR = n$ и уголъ $PIR = A$. Требуется опредѣлить уголъ $PIC = \alpha$ и разстояніе $IC = \rho$. Назовемъ еще $\angle\, CIR$ черезъ β.



Черт. 158.

Изъ $\triangle$-ка PIC . . . $\frac{PC}{\rho} = \frac{sin\,\alpha}{sin\,IPC}$

» $\triangle$-ка RIC . . . $\frac{RC}{\rho} = \frac{sin\,\beta}{sin\,IRC}$

Такъ какъ $PC = CR$, то первыя отношенія обѣихъ пропорцій равны, и потому изъ равенства вторыхъ отношеній имѣемъ:

$$\frac{sin\,\alpha - sin\,\beta}{sin\,\alpha + sin\,\beta} = \frac{sin\,IPC - sin\,IRC}{sin\,IPC + sin\,IRC}$$

или

$$tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}=tg\,\frac{A}{2}\,.\,tg\,\frac{IPC-IRC}{2}\,.\,cotg\,\frac{IPC+IRC}{2} \qquad (a)$$

но изъ чертежа видно, что

$$IPC-IRC=N-M$$

$$IPC+IRC=360^\circ-(A+C)$$

гдѣ $C=\angle PCR$. Далѣе

Изъ $\triangle$-ка IPR . . . $tg\,\frac{N-M}{2}=\frac{n-m}{n+m}\,.\,cotg\,\frac{A}{2}$

Слѣдовательно ур. (a) обратится въ

$$tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{n-m}{n+m}\,.\,cotg\,\frac{A+C}{2} \qquad (71)$$

Такъ какъ $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{A}{2}$, то, зная полусумму и полуразность угловъ α и β, легко вычислить и самые углы α и β. Далѣе изъ $\triangle$-ка IPC

$$\frac{\rho}{m}=\frac{cos\left(N-\frac{C}{2}\right)}{cos\left(\alpha+N-\frac{C}{2}\right)}$$

Подобное же выраженіе можно получить и изъ $\triangle$-ка IRC, так что для ρ получимъ двойную формулу (для повѣрки):

$$\rho=m\,.\,\frac{cos\left(N-\frac{C}{2}\right)}{cos\left(\alpha+N-\frac{C}{2}\right)}=n\,.\,\frac{cos\left(M-\frac{C}{2}\right)}{cos\left(\alpha+M-\frac{C}{2}\right)} \qquad (71^*)$$

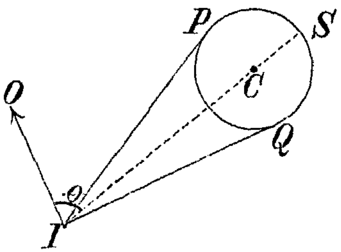
Входящіе сюда углы M и N опредѣляются рѣшеніемъ треугольника IPR по двумъ сторонамъ m и n и углу A между ними, а уголъ C по формулѣ

$$tg\,\frac{C}{2}=\frac{PR}{RQ}$$

для вычисленія которой необходимо измѣрить стороны башни.

3) *Круглая башня*. Пусть I (черт. 159) мѣсто инструмента, а C—центръ сплошной круглой башни. Изъ непосредствен-

ныхъ измѣреній получаются длина $IPSQI = l$ и уголъ A, представляющій разность угловъ OIQ и OIP. Требуется опредѣлить уголъ $OIC = \theta$ и разстояніе до центра $IC = \rho$.



Черт. 159.

Называя для краткости радіусъ башни черезъ r, легко видѣть изъ чертежа, что

$$PS = r\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right)$$

$$IP = r \cdot cotg \frac{A}{2}$$

Откуда

$$PS + IP = \frac{l}{2} = r\left(\frac{\pi + A}{2} + cotg \frac{A}{2}\right)$$

и

$$r = \frac{l}{2\left(\frac{\pi + A}{2} + cotg \frac{A}{2}\right)}$$

Но $\rho = \frac{r}{sin \frac{A}{2}}$, слѣдовательно

$$\rho = \frac{l}{2\left(\frac{\pi + A}{2} \cdot sin \frac{A}{2} + cos \frac{A}{2}\right)} \tag{72}$$

Кромѣ того

$$\theta = \angle OIP + \frac{A}{2}$$

Казалось бы, что разстояніе ρ можно еще проще получить по формулѣ:

$$\rho = IP \cdot sec \frac{A}{2}$$

но оно получилось бы неточно, потому что, при значительномъ радіусѣ башни, весьма трудно опредѣлить мѣсто касанія прямой IP, тогда какъ измѣреніе линіи $IPSQI$ можетъ быть сдѣлано мѣрною тесьмою съ точностью до нѣсколькихъ десятыхъ долей дюйма. Для повѣрки не лишне измѣрить еще окруж-

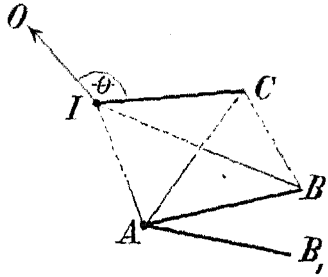
ность башни l_0 *и сравнить ея радіусъ, полученный двояко,* по формуламъ:

$$r = \frac{l_0}{2\pi} \quad \text{и} \quad r = \rho \,.\, sin\,\frac{A}{2}$$

Для повѣрки же величины ρ полезно измѣрить кратчайшее разстояніе отъ инструмента до стѣны башни и придать къ нему величину r.

Числовой примѣръ: $l = 249^{\partial}.5$, $l_0 = 200^{\partial}.9$, $\angle OIP = 41°50'$ и $\angle OIQ = 99°20'$. Получено $\rho = 66^{\partial}.53$, $\theta = 70°35'$ (повѣрка $l_0 = 201^{\partial}.1$)

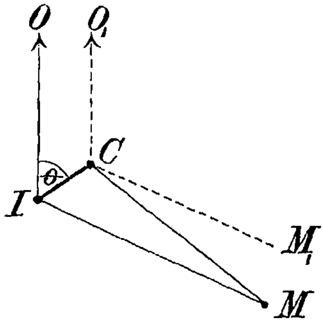
4) *Съ мѣста стоянія видна вершина башни, но основаніе ея недоступно.* Въ такомъ случаѣ производится небольшая вспомогательная тріангуляція, именно, гдѣ нибудь вблизи измѣряется на ровномъ открытомъ мѣстѣ базисъ AB (черт. 160), съ концовъ котораго измѣряютъ углы, составляемые направленіями на инструментъ и вершину башни. Для повѣрки весьма полезно измѣрить даже два базиса, напримѣръ, AB и AB_1. Нѣтъ надобности излагать здѣсь способъ вычисленія разстоянія $\rho = IC$, потому что онъ представляетъ рѣшеніе извѣстной тригонометрической задачи: опредѣлить разстояніе между двумя неприступными точками.



Черт. 160.

Если инструментъ стоялъ на землѣ и, слѣдовательно, сама точка I доступна, то вычисленія упрощаются, такъ какъ точку I можно взять концомъ одного или даже обоихъ базисовъ.

110. Вычисленіе центрировокъ и редукцій. Пусть I (черт. 161) изображаетъ проекцію вертикальной оси инструмента, C—проекцію центра тригонометрическаго знака, M — одну изъ сосѣднихъ точекъ, а IO — направленіе, которое при наблюденіяхъ принималось за начальное. Направленіе IM и уголъ $MIO = M$ получены изъ наблюденій; требуется найти направленіе CM, т. е. направленіе изъ центра C на ту же точку M. Если вообразить, что инструментъ изъ I перенесенъ въ C безъ вращенія по азимуту, то начальное направленіе приметъ положеніе CO_1, параллельное IO, а зрительная труба будетъ направлена по прямой CM_1, параллельной IM. Чтобы усмотрѣть точку M, трубу и алидаду слѣдуетъ повернуть на уголъ $M_1CM = c$, который и представитъ величину *центрировки*. Этотъ уголъ очевидно равенъ углу CMI, легко опредѣляемому изъ треугольника ICM по пропорціи



Черт. 161.

$$\frac{\sin c}{\sin (M - \theta)} = \frac{\rho}{s}$$

Замѣняя синусъ малаго угла c его дугою, получимъ:

$$c'' = \varkappa \cdot \frac{\rho}{s} \cdot \sin (M - \theta) \tag{73}$$

Величины ρ и θ суть элементы центрировки, M — уголъ MIO—дается наблюденіями, а разстояніе $s = CM$ получается изъ вычисленія тріангуляціи.

Подобнымъ же образомъ выводится формула для вычисленія *редукціи*. Пусть опять I (черт. 162)—проекція вертикальной оси угломѣрнаго инструмента, C—проекція центра наблюдаемой тригонометрической точки, а A—проекція вершины ея знака. Чтобы привести направленіе, измѣренное на вершину, къ направленію на центръ, надо къ углу AIO придать уголъ $CIA = r$. Изъ треугольника IAC имѣемъ:

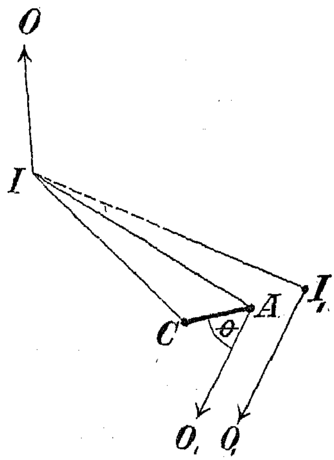
$$\frac{\sin r}{\sin (M - \theta_1)} = \frac{\rho_1}{s}$$

а замѣняя синусъ малаго угла r его дугою, получимъ:

$$r'' = \varkappa \cdot \frac{\rho_1}{s} \cdot \sin (M - \theta_1) \tag{74}$$

Величины ρ_1 и θ_1 суть элементы редукціи, M—уголъ IAO_1—дается наблюденіями на сосѣдней точкѣ, а s—разстояніе между точками, получается изъ вычисленія тріангуляціи.

Необходимо замѣтить, что на черт. 161, изображающемъ центрировку, уголъ M есть дѣйствительно измѣренная разность направленій на одну изъ точекъ наблюденія и на начальную, тогда какъ на черт. 162, изображающемъ редукцію, уголъ M представляетъ разность въ *вершинѣ* A между направленіями AI и AO_1; на самомъ же дѣлѣ наблюденія производились не въ A, а гдѣ нибудь въ точкѣ I_1, проекціи инструмента. Къ счастью на практикѣ углы II_1O_1 и IAO_1 можно считать равными, потому что разстояніе I_1A обыкновенно ничтожно по сравненію съ разстояніями между тригонометрическими точками; измѣненіе же угла M въ формулѣ (74) на нѣсколько секундъ не измѣняетъ величины редукціи, потому что самое вычисленіе редукцій (и центрировокъ) дѣлается лишь четырехзначными логариѳмами. Это обстоятельство надо имѣть въ виду, но не съ цѣлью усовершенствовать формулу, а чтобы дѣлать ее *всегда* достаточно пригодною. Другими словами, надо строить знаки и располагать инструментъ во время наблюденій такъ, чтобы разстоянія (ρ и ρ_1) проекцій инструмента и вершины отъ центра знака были возможно малы. Можно даже прямо сказать: если, благодаря значительности ρ и ρ_1 формулы (73) и (74) негодны, то самыя наблюденія произведены напрасно.



Черт. 162.

Числовой примѣръ. Для поясненія теоріи ниже приведены результаты вычисленій приведеній на четырехъ точкахъ, образующихъ геодезическій четыреугольникъ (см. §§ 114, 121 и 126 и черт. 180). Центрировки и редукціи вычислены отдѣльно для каждой точки четыреугольника, но затѣмъ центрировки приданы къ наблюденнымъ направленіямъ въ тѣхъ же точкахъ, а редукціи — къ направленіямъ съ окружающихъ. Въ столбцѣ, озаглавленномъ $c+r$ (сумма поправокъ направленій за центрировки и редукціи) даны сперва просто суммы поправокъ, а затѣмъ тѣ же суммы, уменьшенныя поправкою начальнаго направленія.

Пулково. $\rho = 2^{\partial}.64,\ \theta = 65^\circ\,0';\ \rho_1 = 0$

Названія точекъ.	Наблюденныя направленія M.	lg сторонъ въ сажен.	c	r	$c+r$		Приведенныя направленія.
Захожье . . .	$0^\circ\,0'\,0''.00$	4.09581	$-0''.47$	$+0''.31$	$-0''.16$	$0''.00$	$0^\circ\,0'\,0''.00$
Федоровское.	41 18 44.13	3.81604	-0.40	—	-0.40	-0.24	41 18 43.89
Размителево .	311 26 30.86	4.05350	-0.53	-0.07	-0.60	-0.44	311 26 30.42

$lg\,\rho$ (въ саженяхъ) $= 8.4973$ $\qquad lg\,\varkappa\rho = 3.8117$

	Захожье	Федоровское	Размителево
$M-\theta$	$-65^\circ\,0'$	$-23^\circ\,41'$	$+246^\circ\,27'$
$lg\,sin\,(M-\theta)$	$_n$ 9.9573	$_n$ 9.6039	$_n$ 9.9622
$lg\,\varkappa\cdot\dfrac{\rho}{s}$	9.7159	9.9957	9.7582
$lg\,c$	$_n$ 9.6732	$_n$ 9.5996	$_n$ 9.7204

Размителево. $\rho = 24^{\partial}.65,\ \theta = 265^\circ\,48';\ \rho_1 = 1^{\partial}.15,\ \theta_1 = 87^\circ\,48'$

Захожье . . .	$0^\circ\,0'\,0''.00$	3.99273	$+6''.14$	$-0''.57$	$+5''.57$	$0''.00$	0 0 0.00
Федоровское.	41 46 58.11	4.11581	$+3.22$	—	$+3.22$	-2.35	41 46 55.76
Пулково. . .	71 52 42.98	4.05350	$+1.29$	—	$+1.29$	-4.28	71 52 38.70

Захожье. $\rho = 2^{\partial}.60,\ \theta = 278^\circ\,15';\ \rho_1 = 3^{\partial}.90,\ \theta_1 = 233^\circ\,50'$

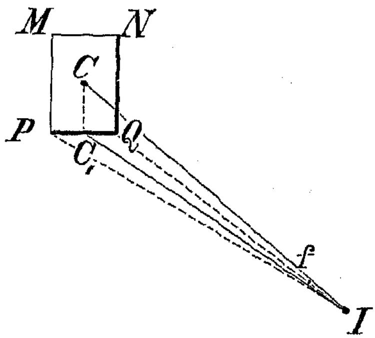
Федоровское.	$0^\circ\,0'\,0''.00$	3.93952	$+0''.73$	—	$+0''.73$	$0''.00$	$0^\circ\,0'\,0''.00$
Пулково. . .	29 47 16.19	4.09581	$+0.48$	—	$+0.48$	-0.25	29 47 15.94
Размителево .	89 21 8.93	3.99273	$+0.10$	-0.29	-0.19	-0.92	89 21 8.01

Федоровское. $\rho = 21^{\partial}.5,\ \theta = 305^\circ\,21';\ \rho_1 = 0$

Загожье . . .	$0^\circ\,0'\,0''.00$	3.93952	$+4''.95$	$+0''.89$	$+5''.84$	$0''.00$	$0^\circ\,0'\,0''.00$
Пулково. . .	251 6 12.59	3.81604	-6.54	—	-6.54	-12.38	251 6 0.21
Размителево .	311 8 11.76	4.11581	$+0.41$	-0.16	$+0.25$	-5.59	311 8 6.17

111. Поправки за фазы. Башни и вообще мѣстные предметы, не заканчивающіеся вверху шпицемъ или остроконечною крышею, при яркомъ солнечномъ освѣщеніи представляютъ фазы, вліяніе которыхъ на направленія, измѣренныя съ окружающихъ точекъ, необходимо принимать въ разсчетъ. Разсмотримъ два случая.

1) *Фазы четыреугольной башни.* Пусть прямоугольникъ $MNQP$ (черт. 163, въ частномъ случаѣ квадратъ) изображаетъ горизонтальную проекцію четыреугольной башни, освѣщенной съ юго-запада, такъ что грани MP и PQ видны отчетливо, а грани MN и NQ находятся въ тѣни. Если бы наблюдатель, находящійся съ инструментомъ въ точкѣ I, и видѣлъ весь контуръ башни, то все же онъ не можетъ сдѣлать наведеніе съ надлежащею точностью, потому что фигура изображенія, частью свѣтлаго, частью темнаго, не симметрична. Гораздо лучше наводить трубу на середину C_1 освѣщенной грани PQ, и исправить затѣмъ направленіе IC_1 за фазу, т. е. привести его къ направленію IC, на центръ башни C, введеніемъ поправки, которая равна углу $C_1IC = f$. Изъ треугольника CIC_1 имѣемъ:



Черт. 163.

$$\frac{\sin f}{\sin CC_1I} = \frac{CC_1}{s}$$

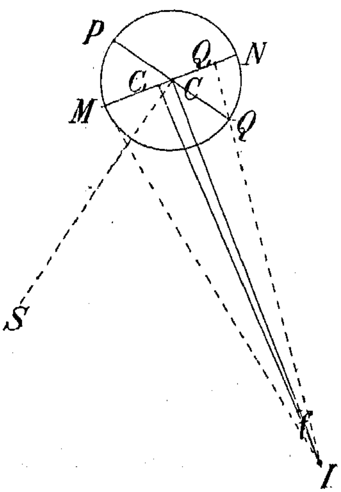
гдѣ s—разстояніе CI. Означивъ для краткости половину стороны NQ или CC_1 черезъ ρ, а уголъ CC_1I черезъ ψ и замѣняя синусъ малаго угла f дугою, получимъ:

$$f'' = \varkappa \cdot \frac{\rho}{s} \cdot \sin\psi \tag{75}$$

Величины ρ и ψ необходимо измѣрить непосредственно, а разстояніе s получается, какъ для всѣхъ вообще приведеній, изъ предварительнаго вычисленія тріангуляціи. Вмѣсто синуса угла ψ безъ чувствительной погрѣшности можно взять синусъ угла C_1CI, который легко получить во время наблюденій на башнѣ.

Необходимо замѣтить, что прямая IC_1 не есть биссектриса угла PIQ, но разность угловъ PIC_1 и C_1IQ во всѣхъ случаяхъ дѣйствительныхъ наблюденій, т. е. при значительномъ разстояніи s, всегда меньше ошибокъ самыхъ точныхъ наблюденій.

2) *Фазы круглой башни.* Пусть окружность $PNQM$ (черт. 164) представляетъ горизонтальную проекцію круглой цилиндрической башни, діаметръ ея PQ—такъ называемый *терминаторъ* или линію раздѣла освѣщенной Солнцемъ S половины башни отъ неосвѣщенной, а діаметръ MN—линію раздѣла видимой съ точки наблюденія I части башни отъ невидимой. Если провести прямую IQ до пересѣченія съ MN въ точкѣ Q_1 и раздѣлить MQ_1 пополамъ, то точка C_1 изобразитъ середину видимой освѣщенной части MQ, а уголъ $C_1IC = f$—поправку направленія IC_1 за фазу.



Черт. 164.

Назовемъ, для краткости, радіусъ башни черезъ R, разстояніе IC черезъ s, уголъ $MIC_1 = C_1IQ$ черезъ φ, а уголъ QCQ_1, равный углу SCI, черезъ ψ; послѣдній, очевидно, равенъ разности азимутовъ Солнца и точки I при центрѣ башни въ моментъ наблюденія.

Изъ $\triangle$-ка MIC имѣемъ $\qquad \sin(\varphi + f) = \frac{R}{s}$

» $\triangle$-ка CIQ » $\qquad \sin(\varphi - f) = \frac{R}{s} \cdot \cos\psi$

Вычитая второе уравненіе изъ перваго, разлагая синусы суммы и разности и замѣняя $1 - \cos\psi$ черезъ $2\sin^2\frac{\psi}{2}$, послѣ сокращеній, получимъ:

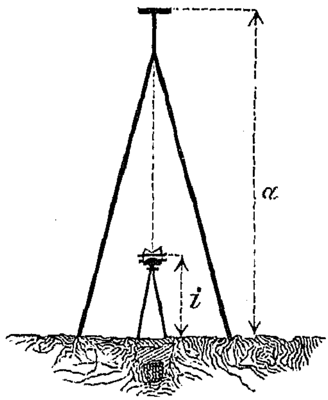
$$\cos\varphi \, . \, \sin f = \frac{R}{s} \cdot \sin^2\frac{\psi}{2}$$

По малости угловъ φ и f можно $\cos\varphi$ замѣнить единицею, а $\sin f$ дугою, такъ что окончательно будетъ:

$$f'' = \varkappa \cdot \frac{R}{s} \cdot \sin^2 \frac{\psi}{2} \tag{76}$$

Радіусъ башни R получается изъ непосредственнаго измѣренія ея окружности, а разстояніе s берется изъ предварительнаго вычисленія тріангуляціи. Что же касается угла ψ, то легко получить дополненіе его до 180°, если въ числѣ прочихъ предметовъ въ точкѣ I наблюдать и Солнце; это дополненіе, очевидно, равно разности направленій на Солнце и на башню.

112. Элементы приведеній вертикальныхъ угловъ. Подъ элементами приведеній вертикальныхъ угловъ или зенитныхъ разстояній разумѣютъ высоту i горизонтальной оси инструмента (черт. 165) и высоту a визирнаго цилиндра (его линіи раздѣла бѣлой и черной половинъ или горизонтальной планки, бывшей цѣлью визированія при измѣреніи вертикальныхъ угловъ); эти высоты считаютъ отъ центра знака и на пирамидахъ и сигналахъ получаютъ непосредственнымъ измѣреніемъ мѣрною тесьмою. Для повѣрки необходимо еще измѣрить превышеніе вершины надъ инструментомъ, т. е. величину $a - i$.



Черт. 165.

Въ колокольняхъ и мѣстныхъ предметахъ непосредственное измѣреніе замѣняется обыкновенно тригонометрическими вычисленіями изъ вспомогательныхъ наблюденій по правиламъ опредѣленія высотъ доступныхъ и недоступныхъ предметовъ. И здѣсь, конечно, надо всегда сдѣлать нѣсколько лишнихъ наблюденій, чтобы получить повѣрку результатовъ.

Пріемы и формулы для вычисленія поправокъ наблюденныхъ зенитныхъ разстояній за центировки и редукціи объяснены въ § 147.

Въ заключеніе необходимо упомянуть, что бывали случаи, когда наблюдатели по окончаніи измѣреній угловъ покидали тригонометрическую точку, не сдѣлавъ опредѣленія элементовъ приведеній; помимо напрасной траты времени на вторичное посѣщеніе той же точки, такое упущеніе можетъ быть и непоправимымъ, потому что впослѣдствіи иногда и нельзя точно опредѣлить мѣсто расположенія инструмента, а вершина знака (визирный цилиндръ) можетъ со временемъ измѣнить свое положеніе относительно центра. Такимъ образомъ *работы на тригонометрической точкѣ нельзя считать оконченными, пока не опредѣлены элементы приведеній.* Опредѣленія элементовъ дѣлаются обыкновенно по окончаніи наблюденій горизонтальныхъ и вертикальныхъ угловъ.

IX.

Вычисленіе тріангуляціи.

113. Общія указанія. Въ § 50 перечислены отдѣльныя части вычисленія тріангуляціи, но порядокъ ихъ не можетъ быть установленъ разъ навсегда. Если новая тріангуляція представляетъ лишь дополненіе или развитіе старой, то вслѣдъ за наблюденіями можно приступить и къ окончательному ея вычисленію. Если же новая тріангуляція представляетъ совершенно независимое цѣлое, то весьма часто приходится перевычислять всѣ треугольники нѣсколько разъ. Достаточно напомнить, что для приведенія измѣреннаго базиса къ уровню океана необходимо знать абсолютныя высоты его концовъ; вычисленіе же высотъ всѣхъ тригонометрическихъ точекъ составляетъ обыкновенно послѣднюю ступень въ вычисленіи тріангуляціи, и потому по окончаніи всѣхъ вычисленій приходится начинать вновь чуть не съ начала, съ окончательнаго вычисленія базиса. Къ счастью всѣ такъ называемыя «приведенія» представляютъ на тріангуляціяхъ столь малыя величины, что они могутъ быть вычислены со всею требуемою точностью, когда стороны и углы треугольниковъ извѣстны лишь приближенно. Поэтому вообще каждую тріангуляцію надо вычислять только дважды: сперва приближенно, а потомъ окончательно.

Общій ходъ вычисленія тріангуляціи представляетъ три отдѣльныя послѣдовательныя работы: 1) *предварительное вычисленіе* всѣхъ сторонъ треугольниковъ, принимая ихъ углы такими, какими они получились непосредственными наблюденіями (безъ приведеній), 2) *вычисленіе приведеній* и 3) *окончательное вы-*

численіе всѣхъ сторонъ съ базисомъ и углами, исправленными за приведенія. Передъ окончательнымъ вычисленіемъ обыкновенно производятъ еще такъ называемое *уравниваніе тріангуляціи.*

Отдѣльныя вычисленія производятся съ различною точностью и, слѣдовательно, логариѳмами съ различнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ. Предварительныя вычисленія и вычисленія приведеній ведутся обыкновенно пяти и даже четырехзначными логариѳмами, тогда какъ для окончательнаго вычисленія пользуются шести и семизначными. Вообще вычисляютъ всегда однимъ знакомъ больше, чѣмъ требуемое число цифръ результата. По малости сторонъ треугольниковъ въ сравненіи съ радіусомъ Земли, въ предварительномъ вычисленіи треугольники считаются плоскими, при окончательномъ же вычисленіи—сферическими и даже сфероидическими, но ихъ приводятъ къ плоскимъ, пользуясь теоремою Лежандра (см. § 36). Въ этой главѣ разсмотрѣны вычисленія только самыхъ треугольниковъ, дальнѣйшіе же выводы, именно, вычисленіе географическихъ координатъ и высотъ тригонометрическихъ точекъ изложены въ двухъ слѣдующихъ главахъ.

Прежде чѣмъ приступать къ вычисленіямъ, необходимо составить схематическій чертежъ всей тріангуляціи (въ масштабѣ около 5 верстъ въ дюймѣ), на которомъ линіями разной толщины (или цвѣта) должны быть показаны стороны треугольниковъ разныхъ классовъ, причемъ направленія, наблюденныя въ обѣ стороны, туда и назадъ, вычерчиваются сплошными линіями, а направленія, наблюденныя только въ одну сторону, на половину сплошными линіями и на половину пунктиромъ (см. черт. 23). Такой чертежъ, для котораго можно пользоваться и существующею картою, облегчаетъ соображенія о взаимной связи треугольниковъ и указываетъ, въ какомъ именно порядкѣ вести вычисленіе.

Для вычисленій необходимо запастись бумагою хорошаго качества, разграфленною съ одной стороны, и вести работу на отдѣльныхъ послѣдовательныхъ листахъ, а не сшивать тетрадей; расположеніе вычисленій на отдѣльныхъ листахъ облегчаетъ выписку данныхъ съ одного на другой и сравненіе результатовъ. Само собою разумѣется, что вычислитель долженъ нумеровать листы, писать чисто и отчетливо и выработать себѣ разъ навсегда опредѣленныя схемы для каждаго рода вычисленій. При такихъ схемахъ во первыхъ нельзя пропустить того, что должно быть выписано (пустое мѣсто бумаги своевременно бросится въ глаза), а во вторыхъ, зная, гдѣ и что должно быть написано, легче вести самое вычисленіе и находить нужныя числа. Кромѣ того надо научиться пользоваться отдѣльными лоскутками бумаги для производства интерполированія въ логариѳмическихъ таблицахъ, для переписки часто встрѣчающихся постоянныхъ, для написанія чиселъ, съ которыми придется складывать много другихъ и т. п. Вообще однажды выработанная система вычисленій ускоряетъ работу и избавляетъ отъ промаховъ и потери времени на исправленіе ошибокъ.

Какъ ни странно, но опытъ показываетъ, что чьи вычисленія представляютъ изящно расположенные столбцы красивыхъ цифръ, тотъ почти всегда вычисляетъ правильно и вѣрно; наоборотъ, чьи вычисленія разбросаны въ безпорядкѣ, а самыя цифры поражаютъ своею уродливостью, тотъ почти всегда путается и вычисляетъ съ ошибками. Поэтому начинающему вычислителю можно посовѣтовать работать медленно, но стараться писать правильно, красиво и непремѣнно перомъ; скорость пріобрѣтается сама собою, долговременнымъ упражненіемъ. Ошибки неизбѣжны, но, замѣтивъ ихъ, не надо отчаяваться или тотчасъ браться за передѣлку; лучше отложить работу въ сторону, заняться чѣмъ нибудь другимъ и приступать къ исправленію со свѣжею головою. Если вычисленіе окончено безъ ошибокъ— это очень отрадно, если сдѣланы ошибки — это поучительно; надо вдуматься въ причины ошибокъ и изучить съ этой стороны свои склонности, чтобы въ будущемъ не дѣлать подобныхъ же ошибокъ. Опытные вычислители задаются иногда цѣлью угадывать результатъ впередъ и наслаждаются, если угадаютъ почти вѣрно; это поддерживаетъ интересъ къ работѣ и предохраняетъ отъ умственнаго оцѣпенѣнія. Можно еще посовѣтовать мысленно задаваться цѣлью—не дѣлать ошибокъ.

Въ тригонометрическихъ вычисленіяхъ надо вездѣ искать способовъ повѣрки, а гдѣ ихъ нѣтъ, тамъ надо быть особенно внимательнымъ. Во всякомъ случаѣ надо пріучить себя во время вычисленій не думать ни о чемъ другомъ, кромѣ самихъ вычисленій; это вѣрнѣйшее оружіе противъ ошибокъ. Большинство ошибокъ происходитъ отъ того, что вычислитель не можетъ заставить себя сосредоточиться. Между тѣмъ именно въ вычисленіяхъ *не слѣдуетъ ошибаться.* Во всякой другой механической работѣ ошибки бросаются въ глаза, и, главное, ошибка въ одномъ мѣстѣ не вліяетъ на вѣрность работы въ послѣдующихъ. При вычисленіяхъ же ошибки обыкновенно не замѣчаются и открываются только впослѣдствіи; если ошибка сдѣлана въ самомъ началѣ, то вся послѣдующая работа, какъ бы безошибочна она ни была, пропадаетъ совершенно даромъ, не имѣетъ никакой цѣны. Зато удачно оконченное вычисленіе доставляетъ столь высокое и чистое удовольствіе, о которомъ, къ сожалѣнію, не имѣютъ и понятія лица, не занимавшіяся вычисленіями.

114. Предварительное вычисленіе. Хотя въ промежуткахъ между наблюденіями помощникъ (или самъ наблюдатель) выводитъ результаты каждаго пріема, однако, имѣя въ виду торопливость вычисленій въ полѣ и просто возможность сдѣлать ошибку, вычислитель тріангуляціи долженъ начать свою работу отъ самихъ записей отсчетовъ верньеровъ или микроскоповъ; выводимыя вновь направленія въ каждомъ пріемѣ онъ, конечно, свѣряетъ съ полученными въ полѣ, и въ случаѣ разногласій открываетъ и исправляетъ ошибки. Затѣмъ на особыхъ листахъ вычислитель выписываетъ одинъ подъ другимъ результаты всѣхъ отдѣльныхъ пріемовъ и выводитъ ихъ ариѳметическія среднія, которыя называются *наблюденными направленіями*, т. е. направленіями, полученными непосредственно изъ наблюденій безъ исправленія за приведенія, уравниванія и пр. Такимъ же образомъ онъ получаетъ *наблюденные горизонтальные углы* и *наблюденныя зенитныя разстоянія.*

Выводъ средняго ариѳметическаго изъ нѣсколькихъ близкихъ между собою чиселъ обыкновенно не представляетъ затрудненія; градусы, минуты и десятки секундъ пишутся сразу, а единицы секундъ и ихъ доли получаются вычисленіемъ въ умѣ.

Среднее пишется съ однимъ десятичнымъ знакомъ больше, чѣмъ данныя, изъ которыхъ оно выводится. Для повѣрки тотчасъ послѣ вывода каждаго средняго берутъ уклоненія отдѣльныхъ данныхъ отъ средняго; понятно, что сумма положительныхъ уклоненій должна, въ предѣлахъ точности вывода, равняться суммѣ отрицательныхъ. Кромѣ того квадраты этихъ уклоненій служатъ для вычисленія среднихъ ошибокъ наблюденныхъ направленій (или угловъ) по формулѣ

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n\,(n-1)}} \tag{77}$$

гдѣ $[\Delta^2]$ сумма квадратовъ отдѣльныхъ уклоненій Δ, а n число пріемовъ. Въ нижеслѣдующей таблицѣ приведены выводы среднихъ изъ шести пріемовъ наблюденій.

Пирамида Стародворье.

Медуши $= 0^\circ\,0'\,0''.00$.

Пріемы.	Воронино.	Рудицы.	Каменка.
I	72° 37′ 42″.81—2″.21	190° 53′ 43″.19—3″.76	230° 19′ 41″.20—0″.66
II	40.15 + 0.45	40.06 — 0.63	41.03 — 0.49
III	39.75 + 0.85	36.75 + 2.68	37.25 + 3.29
IV	38.50 + 2.10	36.90 + 2.53	40.53 + 0.01
V	42.06 — 1.46	40.44 — 1.01	42.19 — 1.65
VI	40.36 + 0.24	39.24 + 0.19	41.04 — 0.50
Сред. .	72 37 40.60 ± 0.64	190 53 39.43 ± 0.99	230 19 40.54 ± 0.69

Выписывая отдѣльные пріемы въ подобныя таблицы, надо сопровождать ихъ знаками :: (неточное наведеніе) и ? (сомнительное наблюденіе); если отмѣченное такими знаками направленіе значительно уклоняется отъ прочихъ (даетъ большое Δ), то оно отбрасывается и среднее берется только изъ остальныхъ пріемовъ. Многіе совѣтуютъ даже всегда отбрасывать направленія, подверженныя сомнѣнію, руководствуясь тѣмъ соображеніемъ, что если они согласны съ прочими, то отбрасыванiе ихъ все равно не измѣнитъ средняго, если же они не согласны съ прочими, то, вѣроятно, сдѣлаютъ результаты хуже. Однако не надо увлекаться и отбрасывать каждое наблюденіе, значительно уклоняющееся въ ту или другую сторону отъ общаго средняго. Опытъ показываетъ, что, взявъ только близкія между собою данныя, мы не улучшимъ результатовъ, а только сами себя обманемъ, выводя малыя среднія ошибки. Законы распредѣленія случайныхъ ошибокъ требуютъ, чтобы хоть изрѣдка, но являлись и значительныя уклоненія.

Послѣ вывода направленій во всѣхъ точкахъ сѣти, составляютъ, сообразуясь съ чертежомъ, послѣдовательные треугольники въ такомъ порядкѣ, чтобы послѣдняя сторона каждаго изъ нихъ была первою стороною слѣдующаго. Углы отдѣльныхъ треугольниковъ представляютъ разности соотвѣтствующихъ направленій; если приведенія невелики, то сумма угловъ въ каждомъ треугольникѣ должна быть близка къ 180°, въ противномъ случаѣ надо повѣрить выписку или обратиться къ подлинному журналу наблюденій и стараться открыть причину разногласія. Въ треугольникахъ съ двумя измѣренными углами, т. е. составленныхъ направленіями на уединенныя точки, третьи углы вычисляются, какъ дополненія до 180° суммы двухъ остальныхъ.

Далѣе, начиная отъ базиса или данной стороны, въ послѣдовательномъ порядкѣ вычисляютъ всѣ треугольники. Если имѣются общія стороны, о чемъ можно судить по чертежу, то необходимо свѣрять ихъ и при значительномъ расхожденіи искать и открыть ошибку. Тутъ же встрѣчаются случаи, когда приходится вычислять треугольники по двумъ сторонамъ и углу между ними. Попутно для каждаго треугольника вычисляется его сферическій избытокъ.

Для вычисленія сферическихъ избытковъ надо знать широты отдѣльныхъ точекъ; здѣсь ихъ можно брать просто съ карты; если же географической карты нѣтъ, то приближенно оцѣнить широты можно и по схематическому чертежу, если имѣется хоть одна астрономическая точка или точка прежней тріангуляціи. Сферическіе избытки наибольшихъ треугольниковъ, получаемыхъ дѣйствительными наблюденіями, не превосходятъ 1′, и потому они могутъ быть вычислены съ точностью до 0″.01, зная широты вершинъ лишь до 1° (четвертая десятичная цифра количества [4] мѣняется на единицу при измѣненіи широты φ болѣе чѣмъ на 1°).

Всѣ эти вычисленія ведутся пятизначными логариѳмами по формуламъ и схемамъ, приведеннымъ въ § 37; совокупность ихъ называется *предварительнымъ вычисленіемъ тріангуляціи*, въ результатѣ котораго получаются *приближенныя значенія* сторонъ (и угловъ), значенія совершенно достаточныя для точнаго вычисленія всѣхъ родовъ приведеній. Для поясненія хода вычисленія въ нижеслѣдующей таблицѣ даны вычисленія 4-хъ треугольниковъ (см. § 37, форм. 35 и черт. 180).

				0.30383		
Захожье . . .	29°	47′	16″	3.81604	9.81965	7.73150
Пулково . . .	41	18	44	3.93952	4.11987	2.06075
Федоровское .	108	53	47	4.09581	9.97594	9.79225
	179	59	47		7.75556	
		ε = 0.62				
				0.02209		
Размителево .	71	52	43	4.09581	9.93561	8.02416
Захожье . . .	59	33	53	4.05351	4.11790	2.06075
Пулково . . .	48	33	29	3.99274	9.87484	0.08491
	180	0	5		8.14932	
		ε = 1.22				
				0.29977		
Размителево .	30	5	45	3.81604	9.93768	7.86953
Федоровское .	60	1	59	4.05349	4.11581	2.06075
Пулково . . .	89	52	13	4.11581	0.00000	9.93028
	179	59	57		7.86953	
		ε = 0.85				
				0.00003		
Захожье . . .	89	21	9	4.11581	9.82368	7.93221
Размителево .	41	46	58	3.93952	4.11584	2.06075
Федоровское .	48	51	48	3.99272	9.87688	9.99296
	179	59	55		8.05533	
		ε = 0.98				

Послѣ предварительнаго вычисленія тріангуляціи приступаютъ къ вычисленіямъ приведеній по формуламъ, объясненнымъ въ главѣ VIII; тамъ же, въ § 110, даны и примѣры вычисленій, которыя надо вести очень внимательно, такъ какъ по большей части эти вычисленія не могутъ быть повѣрены инымъ образомъ. Для защиты отъ промаховъ можно посовѣтовать производить ихъ въ двѣ руки (т. е. двумя лицами); если же это невозможно, то надо произвести ихъ дважды самому, но съ промежуткомъ времени около недѣли, чтобы цифры забылись. Наконецъ центрировки, редукціи и поправки за фазы придаются съ должными знаками къ наблюденнымъ направленіямъ, и вычислитель получаетъ такъ называемыя *приведенныя направленія*, представляющія окончательные результаты собственно наблюденій, и притомъ направленія (или углы), образуемыя вертикальными плоскостями, проходящими черезъ центры тригонометрическихъ знаковъ.

115. Объ уравниваніи тріангуляцій вообще. Какъ бы ни были совершенны угломѣрные инструменты и какъ бы тщательно ни производились наблюденія, все же приведенныя направленія и углы суть лишь приближенія къ истинѣ. Въ этомъ легко убѣдиться, если, напримѣръ, взять сумму угловъ въ любой геометрической фигурѣ, составленной тригонометрическими точками, въ которой измѣрены и приведены къ центрамъ всѣ углы; сумма ихъ должна равняться $180°(n-2)+\varepsilon$, гдѣ n— число сторонъ фигуры, а ε—ея сферическій избытокъ; на самомъ же дѣлѣ такого равенства почти никогда не бываетъ, и сумма измѣренныхъ угловъ оказывается больше или меньше теоретической. Точно также если тригонометрическая сѣть представляетъ сложныя сочетанія треугольниковъ со взаимно пересѣкающимися діагоналями, то, исходя отъ какой нибудь одной, другія стороны можно вычислить двумя или даже нѣсколькими независимыми путями, проходя черезъ разные треугольники; результаты такихъ вычисленій оказываются всегда нѣсколько различными *). Подобныя разногласія вполнѣ объясняются слу-

*) Разногласіе выводовъ, конечно, можно вовсе устранить, наблюдая только то, что дѣйствительно необходимо для вычисленій; если, напри-

чайными ошибками; по мѣткому замѣчанію *Гаусса*, наблюденія представляютъ игру, въ которой никогда не бываетъ выигрыша. Разумѣется, каждый стремится навести трубу и сдѣлать отсчеты вѣрно, но вслѣдствіе несовершенствъ инструмента и нашихъ органовъ чувствъ это недостижимо, что наглядно проявляется уже въ разногласіи отдѣльныхъ пріемовъ при измѣреніи одного какого нибудь угла. Въ среднемъ ариѳметическомъ изъ всѣхъ пріемовъ случайныя ошибки отдѣльныхъ наведеній и отсчетовъ, входя безразлично со знаками плюсъ и минусъ, уравниваются лишь частью, а не вполнѣ. Полное уравниваніе случайныхъ ошибокъ достигается только при безконечномъ числѣ наблюденій; ариѳметическая же середина изъ конечнаго числа наблюденій всегда заключаетъ небольшую погрѣшность, называемую ошибкою ариѳметической середины. Всякое измѣреніе можно сравнить со стрѣльбою въ цѣль: какъ бы ни было совершенно оружіе и какъ бы искусенъ ни былъ стрѣлокъ, все же, благодаря нѣкоторому разнообразію въ видѣ и вѣсѣ пуль и зарядовъ, разнообразію прицѣливанія, перемѣнамъ плотности воздуха и т. п., пули попадаютъ большею частью вблизи, а не въ самый центръ.

Говоря о разногласіяхъ отдѣльныхъ наблюденій, разумѣютъ только ихъ случайныя, всегда малыя ошибки, а отнюдь не промахи; послѣдніе, могущіе быть произвольной величины, конечно должны быть или исправлены, или откинуты. Съ наблюденными и исправленными за приведенія направленіями разногласія, вообще говоря, получаются небольшія (секунды и ихъ доли въ углахъ и доли сажени въ сторонахъ), но все же производить съ ними окончательное вычисленіе тріангуляціи не слѣдуетъ, и вотъ почему. Дальнѣйшая работа заключается въ вычисленіи географическихъ координатъ всѣхъ точекъ тріангуляціи. Для повѣрки этихъ довольно сложныхъ вычисленій принято за правило каждую точку вычислять не менѣе, какъ съ

мѣръ, измѣрить въ треугольникѣ только два угла и для третьяго взять дополненіе ихъ суммы до $180° + \varepsilon$, то никакого противорѣчія не будетъ. Однако именно въ виду возможности сдѣлать промахъ и для увеличенія точности окончательныхъ выводовъ стремятся всегда измѣрять больше того, что дѣйствительно необходимо.

двухъ другихъ. Если производить эти вычисленія прямо съ приведенными направленіями (наблюденными, исправленными только приведеніями), то, вообще говоря, для каждой точки получаются различныя широты и долготы; вычислитель начнетъ сомнѣваться, произошло ли разногласіе только отъ неизбѣжныхъ ошибокъ наблюденій или онъ сдѣлалъ небольшую ошибку въ самомъ вычисленіи географическихъ координатъ. Является постоянное опасеніе за вѣрность выкладокъ, сопряженное съ нервнымъ возбужденіемъ, а послѣднее, въ свою очередь, ведетъ къ новымъ ошибкамъ; при отсутствіи данныхъ для повѣрки и сужденія о томъ, какой числовой величины могутъ достигать упомянутыя разногласія, все вычисленіе будетъ неясно и сбивчиво, а вычислитель вмѣсто удовольствія будетъ испытывать страданія. Всякое вычисленіе пріобрѣтаетъ интересъ и доставляетъ рядъ наслажденій тогда, и только тогда, когда вычислитель знаетъ впередъ, что время отъ времени отъ можетъ *повѣрять* свою работу, и не по приближенному согласію, какое даютъ наблюденія, а по строгому, въ предѣлахъ точности логариѳмическихъ таблицъ.

Для поясненія сказаннаго положимъ, что вычисляется широта какой нибудь точки съ двухъ другихъ, и, благодаря только ошибкамъ наблюденій, получились бы результаты 20″.750 и 20″.756, такъ что среднее изъ нихъ, т. е. *20″.753* можетъ считаться вѣроятнѣйшимъ результатомъ. Допустимъ, что во второмъ вычисленіи сдѣлана небольшая ошибка (въ подъискиваніи логариѳма или соотвѣтствующаго числа) и вмѣсто 20″.756 получено 20″.742; разногласіе чиселъ 20″.750 и 20″.742 не многимъ больше предъидущаго разногласія чиселъ 20″.750 и 20″.756, и вычислитель возьметъ конечно среднее, т. е. *20″.746*, но это среднее не есть уже вѣроятнѣйшее и отличается отъ дѣйствительно наилучшаго результата (20″.753) на цѣлыхъ 0″.007, которыя цѣликомъ войдутъ въ послѣдующее вычисленіе и произведутъ тамъ дальнѣйшія разногласія и сомнѣнія.

Подобныя сомнѣнія совершенно устраняются, если передъ окончательнымъ вычисленіемъ тріангуляціи приведенныя направленія исправить еще такъ, чтобы они удовлетворяли всѣмъ геометрическимъ условіямъ, существующимъ въ данной сѣти, или, какъ выражаются, *уравнять* ихъ. Тогда дальнѣйшая обработка тріангуляціи дѣлается вполнѣ однородною, и каждое разногласіе будетъ имѣть причиною только ошибки вычисленій, которыя всегда можно открыть повтореніемъ вычисленія или соотвѣтствующими повѣрками.

Уже издавна изобрѣтены способы и пріемы, служащіе для приведенія наблюденій въ полное согласіе съ геометрическими условіями, существующими въ данной сѣти, но способы эти имѣли частный характеръ и заключали много произвольнаго, такъ что разные вычислители, исходя изъ тѣхъ же данныхъ, приходили къ различнымъ результатамъ. Это вполнѣ объясняется тѣмъ обстоятельствомъ, что геометрическихъ условій въ каждой тріангуляціи всегда меньше, чѣмъ измѣренныхъ направленій и угловъ, такъ что, изыскивая поправки, приходится рѣшать систему уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ болѣе числа уравненій. Знаменитымъ геометрамъ *Лежандру* и *Гауссу*, примѣнившимъ сюда начала теоріи вѣроятностей, удалось создать пріемъ, посредствомъ котораго неопредѣленная система уравненій приводится къ опредѣленной, и, рѣшая ее, каждый вычислитель получаетъ одни и тѣ же результаты. Произволъ устраненъ здѣсь тѣмъ, что искомыя поправки, помимо удовлетворенія геометрическимъ условіямъ данной сѣти, должны еще быть такими, чтобы сумма ихъ квадратовъ была наименьшею, т. е. меньшею, чѣмъ сумма квадратовъ поправокъ, полученныхъ всякимъ инымъ путемъ, имѣющимъ ту же цѣль—приведеніе наблюденій въ полное согласіе. Вотъ почему и самый пріемъ называется *способомъ наименьшихъ квадратовъ*. Уравниваніе всѣхъ направленій или угловъ по способу наименьшихъ квадратовъ достигается съ наименьшимъ искаженіемъ дѣйствительныхъ наблюденій, и всегда улучшаетъ ихъ. Конечно и послѣ уравнительнаго вычисленія получаются не истинныя, а только вѣроятнѣйшія направленія (или углы), т. е. такія, лучше которыхъ нельзя уже однако извлечь изъ данныхъ наблюденій.

116. Виды условныхъ уравненій. Въ каждой сложной сѣти треугольниковъ являются обыкновенно слѣдующіе виды геометрическихъ условій, дающія соотвѣтствующія такъ называемыя *условныя уравненія*.

1) **Условныя уравненія фигуръ.** Въ замкнутой геометрической фигурѣ, т. е. въ фигурѣ, въ которой всѣ углы измѣрены непосредственно, сумма внутреннихъ угловъ должна равняться $180°(n-2)+\varepsilon$, гдѣ n—число сторонъ фигуры, а ε—ея сферическій избытокъ. Напримѣръ, въ треугольникѣ сумма внутреннихъ угловъ должна равняться $180°+\varepsilon$, въ четыреугольникѣ $360°+\varepsilon$ и т. д. Если означить приведенные углы фигуры цифрами 1, 2, 3.... то эти углы должны удовлетворять уравненію

$$1+2+3+....-\{180°(n-2)+\varepsilon\}=0 \qquad (p)$$

На самомъ дѣлѣ этого почти никогда не бываетъ, и разность между суммою приведенныхъ угловъ и теоретическою суммою оказывается не нулемъ, а нѣкоторой величиной v, называемой *ошибкою фигуры*, т. е.

$$1+2+3+....-\{180°(n-2)+\varepsilon\}=v \qquad (q)$$

Задача уравнительнаго вычисленія заключается въ изысканіи такихъ поправокъ (1), (2) .... приведенныхъ угловъ 1, 2...., чтобы удовлетворилось уравненіе (p), т. е. чтобы

$$1+(1)+2+(2)+3+(3)+....-\{180°(n-2)+\varepsilon\}=0 \qquad (r)$$

Вычитая (q) изъ (r), получимъ:

$$(1)+(2)+(3)+....+v=0 \qquad (a)$$

Это и есть общій видъ условнаго уравненія фигуры; въ немъ величины (1), (2) .... суть искомыя поправки угловъ 1, 2...., а v—ошибка фигуры, получаемая изъ уравненія (q). Въ частномъ случаѣ, именно для треугольника, условное уравненіе фигуры есть

$$(1)+(2)+(3)+v=0 \qquad (b)$$

гдѣ (1), (2) и (3)—искомыя поправки угловъ 1, 2 и 3, а

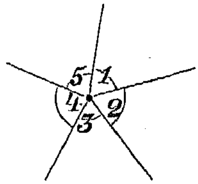
$$v=1+2+3-(180°+\varepsilon) \qquad (q)$$

ошибка треугольника со сферическимъ избыткомъ ε.

2) **Условныя уравненія горизонта.** Если на тригонометрической точкѣ измѣрены всѣ углы кругомъ горизонта, напримѣръ

углы $1, 2 \dots 5$ (черт. 166), то сумма ихъ должна равняться 360°, т. е. удовлетворять уравненію

$$1 + 2 + 3 + \dots - 360^\circ = 0 \qquad (p)$$



Черт. 166.

На самомъ дѣлѣ, благодаря ошибкамъ наблюденій, сумма измѣренныхъ вокругъ горизонта угловъ оказывается обыкновенно больше или меньше 360° на нѣкоторую величину v, называемую *ошибкою горизонта*, т. е.

$$1 + 2 + 3 + \dots - 360^\circ = v \qquad (q)$$

Задача уравнительнаго вычисленія заключается въ изысканіи такихъ поправокъ (1), $(2) \dots$ наблюденныхъ угловъ $1, 2 \dots$, чтобы удовлетворилось уравненіе (p), т. е. чтобы

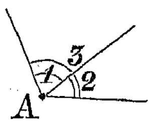
$$1 + (1) + 2 + (2) + \dots - 360^\circ = 0 \qquad (r)$$

Вычитая (q) изъ (r), получимъ:

$$(1) + (2) + (3) + \dots + v = 0 \qquad (C)$$

3) **Условныя уравненія суммъ и разностей.** Пусть на точкѣ A (черт. 167) кромѣ двухъ угловъ 1 и 2 измѣренъ еще уголъ 3, представляющій сумму двухъ первыхъ. Здѣсь очевидно должно существовать равенство:

$$1 + 2 - 3 = 0 \qquad (p)$$



Черт. 167.

но отъ ошибокъ наблюденій получается обыкновенно

$$1 + 2 - 3 = v \qquad (q)$$

гдѣ *v—ошибка суммы.* Задача уравнительнаго вычисленія заключается въ изысканіи такихъ поправокъ (1), (2) и (3) наблюденныхъ угловъ 1, 2 и 3, чтобы удовлетворилось уравненіе (p), т. е. чтобы

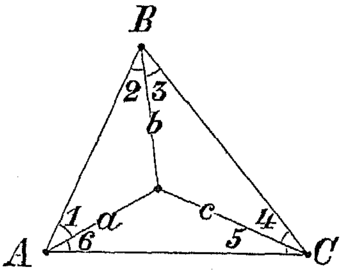
$$1 + (1) + 2 + (2) - 3 - (3) = 0 \qquad (r)$$

Вычитая (q) изъ (r), получимъ:

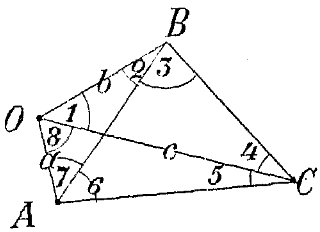
$$(1) + (2) - (3) + v = 0 \qquad (d)$$

Подобный же видъ имѣютъ уравненія разностей *).

4) **Условныя уравненія полюсовъ.** Если изъ одной точки измѣрены направленія на всѣ вершины какой нибудь замкнутой

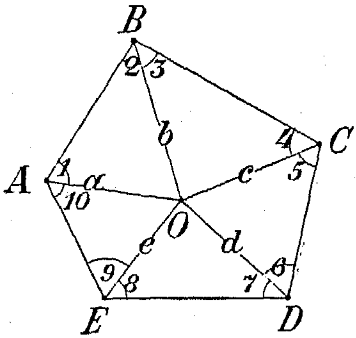


Черт. 168.



Черт. 169.

фигуры (такая точка называется *полюсомъ* фигуры), то можно составить рядъ отношеній синусовъ извѣстныхъ угловъ, произведеніе которыхъ, въ силу геометрическихъ свойствъ фигуры, должно равняться единицѣ. Напримѣръ, по чертежамъ 168, 169 и 170 легко составить тождества:



Черт. 170.

Для черт. 168 и 169 ... $\frac{a\,b\,c}{b\,c\,a} = 1$

Для черт. 170 . . . . $\frac{a\,b\,c\,d\,e}{b\,c\,d\,e\,a} = 1$

Замѣняя отношенія сторонъ отношеніями синусовъ противо-

*) Условныя уравненія горизонта, суммъ и разностей являются только при измѣреніи отдѣльныхъ угловъ. При измѣреніи же направленій по способу круговыхъ пріемовъ такія условія вовсе не встрѣчаются. Необходимо замѣтить, что уравненія горизонта, суммъ и разностей рѣшаются обыкновенно *до общаго уравнительнаго вычисленія* и притомъ до введенія поправокъ за приведенія.

лежащихъ угловъ, получимъ

Для черт. 168 . . . $\frac{sin\,2\,.\,sin\,4\,.\,sin\,6}{sin\,1\,.\,sin\,3\,.\,sin\,5}=1$

Для черт. 169 . . . $\frac{sin\,2\,.\,sin\,4\,.\,sin\,(6+7)}{sin\,7\,.\,sin\,(2+3)\,.\,sin\,5}=1$

Для черт. 170 . . . $\frac{sin\,2\,.sin\,4.sin\,6\,.sin\,8.sin\,10}{sin\,1.sin\,3\,.sin\,5.sin\,7.sin\,9}=1$

Взявъ логариѳмы обѣихъ частей, подобныя уравненія можно представить въ такомъ общемъ видѣ:

$$(lg\,sin\,2+lg\,sin\,4+....)-(lg\,sin\,1+lg\,sin\,3+....)=0 \qquad (p)$$

Если вставить сюда приведенные углы $1, 2$ ...., то, вообще говоря, въ правой части получится не 0, а нѣкоторое число v, называемое *ошибкою смыканія* *) и выражаемое въ единицахъ послѣдняго десятичнаго знака логариѳмовъ, т. е. получится:

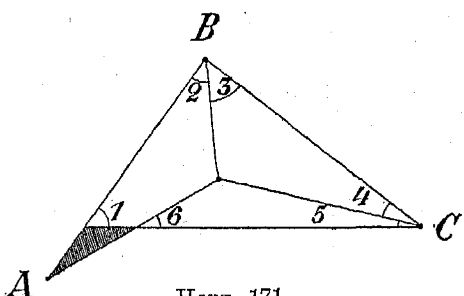
$$(lg\,sin\,2+lg\,sin\,4+....)-(lg\,sin\,1+lg\,sin\,3+....)=v \qquad (q)$$

Задача уравнительнаго вычисленія заключается въ изысканіи такихъ поправокъ (1), (2) ...., приведенныхъ угловъ $1, 2$ .... чтобы удовлетворилось уравненіе (p), т. е. чтобы

$$\{lg\,sin\,(2+(2))+lg\,sin\,(4+(4))+....\}-$$
$$-\{lg\,sin\,(1+(1))+lg\,sin\,(3+(3))+....\}=0 \qquad (r)$$

---

*) Это названіе понятно изъ чертежа 171. Если, начиная отъ точки A и стороны AB, строить углы $1, 2$... и допустить, что самое построеніе можно исполнить безошибочно, то все же, вслѣдствіе случайныхъ ошибокъ наблюденій, послѣднее направленіе изъ C на A, проведенное подъ угломъ 5, не пройдетъ какъ разъ черезъ точку A, а образуетъ маленькій треугольникъ погрѣшности, т. е. данная фигура *не сомкнется.*



Черт. 171.

Называя для краткости перемѣны логариѳмовъ синусовъ при измѣненіи соотвѣтствующихъ угловъ на $1''$ черезъ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, подобно тому, какъ это было объяснено въ § 43, можно произвести слѣдующія разложенія

$$lg\, sin\, (1 + (1)) = lg\, sin\, 1 + \alpha\, (1)$$

$$lg\, sin\, (2 + (2)) = lg\, sin\, 2 + \beta\, (2)$$

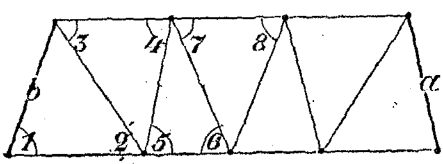
$$lg\, sin\, (3 + (3)) = lg\, sin\, 3 + \gamma\, (3)$$

гдѣ искомыя поправки угловъ (1), $(2) \ldots$ выражены въ секундахъ. Вставивъ такія разложенія во всѣ члены уравненія (r) и вычитая изъ него почленно уравненіе (q), получимъ

$$\beta.(2) + \delta.(4) + \ldots - \alpha.(1) - \gamma.(3) + \ldots + v = 0 \quad (e)$$

Это и есть общій видъ условнаго уравненія полюсовъ; въ немъ величины (1), $(2) \ldots$ суть искомыя *поправки* угловъ $1, 2 \ldots$, а v—ошибка смыканія, получаемая изъ ур. (q).

5) **Условныя уравненія базисовъ.** Если въ данной тригонометрической сѣти имѣется не одинъ, а нѣсколько базисовъ, то, исходя изъ одного, можно всѣ прочіе базисы получить вычисленіемъ, черезъ связывающіе ихъ треугольники; при этомъ величина базиса, получаемая вычисленіемъ, обыкновенно не равняется результату непосредственнаго измѣренія, и такое разногласіе вполнѣ объяснимо ошибками измѣреній угловъ связывающихъ треугольниковъ и ошибками измѣреній самихъ базисовъ. Если, напримѣръ, два базиса a и b связаны простою цѣпью треугольниковъ (черт. 172), то базисъ a можно вычислить изъ b по формулѣ:



Черт. 172.

$$lg\, a_1 = lg\, b + \{lg\, sin\, 1 + lg\, sin\, 3 + \ldots\} -$$
$$- \{lg\, sin\, 2 + lg\, sin\, 4 + \ldots\} \qquad (p)$$

Величина a_1 не будетъ, вообще говоря, равняться величинѣ a, полученной изъ непосредственныхъ измѣреній, и разность суммъ соотвѣтствующихъ логариѳмовъ синусовъ не будетъ равняться разности логариѳмовъ измѣренныхъ базисовъ, а дастъ нѣкоторую величину v, называемую *ошибкою связи*, т. е.

$$\{lg\, sin\, 1 + lg\, sin\, 3 + ...\} - \{lg\, sin\, 2 + lg\, sin\, 4 + ...\} + \\ + (lg\, b - lg\, a) = v \qquad (q)$$

Задача уравнительнаго вычисленія заключается въ изысканіи такихъ поправокъ $(1), (2)$ .... приведенныхъ угловъ $1, 2$ .... и поправокъ (a), (b) базисовъ a, b, чтобы удовлетворилось уравненіе (p), т. е. чтобы

$$\{lg\, sin\, (1 + (1)) + lg\, sin\, (3 + (3)) + ...\} - \\ - \{lg\, sin\, (2 + (2)) + lg\, sin\, (4 + (4)) + ...\} + \\ + \{lg\, (b + (b)) - lg\, (a + (a))\} = 0 \qquad (r)$$

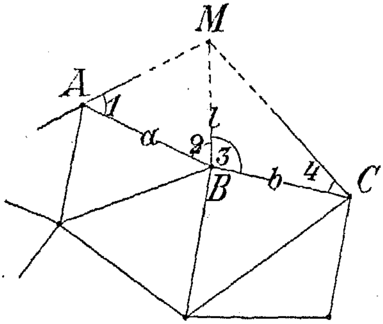
Въ настоящее время измѣреніе базисовъ производится несравненно точнѣе измѣренія угловъ и вообще составляетъ самую точную часть геодезическихъ дѣйствій, поэтому обыкновенно и не ищутъ поправокъ базисовъ (a), (b), а разногласіе v въ формулѣ (q) объясняютъ только ошибками въ углахъ $1, 2$.... Полагая въ уравненіи (r) поправки (a) и (b) нулями, разлагая $lg\, sin\, (1 + (1))$ и пр., какъ объяснено выше, и вычитая изъ него почленно ур. (q), получимъ:

$$\alpha_1\, (1) - \beta_1\, (2) + \alpha_2\, (3) - \beta_2\, (4) + ... + v = 0 \qquad (f)$$

гдѣ α_1, β_1 .... суть перемѣны логариѳмовъ синусовъ соотвѣтствующихъ угловъ, при измѣненіи самихъ угловъ на $1''$, а (1), (2) .... искомыя поправки угловъ $1, 2$ ....

6) **Условныя уравненія сторонъ.** Если какая нибудь точка опредѣляется отдѣльно отъ прочихъ, наблюденіями съ нѣсколькихъ точекъ 1-го или 2-го классовъ, то ее называютъ точкою 3-го класса, а въ уравнительныхъ вычисленіяхъ ее называютъ

уединенною (точка M черт. 173). Если имѣется только два направленія (AM и BM), то вычисленіе положенія точки M изъ треугольника ABM не представитъ противорѣчій, но зато не будетъ и повѣрки. Если же на нее сдѣлано три и болѣе направленій, то получается одна или нѣсколько общихъ сторонъ, которыя могутъ быть вычислены независимо, изъ разныхъ треугольниковъ; благодаря ошибкамъ наблюденій, эти общія стороны получаются, вообще говоря, различными. Такъ, общая сторона $BM = l$ треугольниковъ ABM и BCM получится изъ двухъ независимыхъ уравненій (въ логариѳмическомъ видѣ):



Черт. 173.

$$lg\, l_1 = lg\, a + lg \sin 1 - lg \sin (1 + 2)$$

$$lg\, l_2 = lg\, b + lg \sin 4 - lg \sin (3 + 4)$$

При безошибочныхъ наблюденіяхъ длины l_1 и l_2 вышли бы одинаковыми и, слѣдовательно, при вычитаніи одного уравненія изъ другого, получилось бы:

$$lg \sin 1 - lg \sin (1 + 2) - lg \sin 4 + lg \sin (3 + 4) + \\ + lg\, a - lg\, b = 0 \qquad (p)$$

На самомъ же дѣлѣ, отъ подставленія сюда окончательно вычисленныхъ сторонъ a и b и приведенныхъ угловъ $1, 2 \ldots$, въ правой части получится не 0, а нѣкоторая величина v, называемая *ошибкою стороны*, т. е.

$$lg \sin 1 - lg \sin (1 + 2) - lg \sin 4 + lg \sin (3 + 4) + \\ + lg\, a - lg\, b = v \qquad (q)$$

Задача уравнительнаго вычисленія заключается въ изыска ніи такихъ поправокъ (1), (2).... угловъ 1, 2...., чтобы удовлетворилось уравненіе (p), т. е. чтобы

$$lg\,sin\,(1+(1)) - lg\,sin\,(1+2+(1)+(2)) - lg\,sin\,(4+(4)) +$$
$$+ lg\,sin\,(3+4+(3)+(4)) + lg\,a - lg\,b = 0 \qquad (r)$$

Вычитая (q) изъ (r) и разлагая, какъ объяснено выше, логариѳмы синусовъ, получимъ:

$$\alpha(1) - \beta((1)+(2)) - \delta(4) + \gamma((3)+(4)) + v = 0 \qquad (g)$$

гдѣ α, β, γ и δ — перемѣны логариѳмовъ синусовъ угловъ 1, 1 + 2, 3 + 4 и 4 при измѣненіи самихъ угловъ на 1″, (1), (2), (3) и (4) — искомыя поправки угловъ, а v — ошибка стороны *).

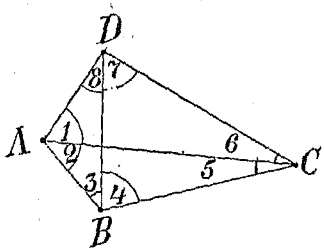
По коэффиціентамъ у неизвѣстныхъ всѣ перечисленные виды условныхъ уравненій можно раздѣлить на два рода: въ уравненіяхъ фигуръ, горизонта, суммъ и разностей эти коэффиціенты всегда единицы, тогда какъ въ уравненіяхъ полюсовъ, базисовъ и сторонъ они суть перемѣны логариѳмовъ синусовъ при измѣненіи соотвѣтствующихъ угловъ на 1″. Уравненія перваго рода называются вообще *уравненіями угловъ*, а второго — *уравненіями синусовъ*. Понятно, что рѣшеніе уравненій перваго рода несравненно проще рѣшенія уравненій второго.

Кромѣ перечисленныхъ видовъ, въ большихъ тригонометрическихъ работахъ, при смыканіи отдѣльныхъ цѣпей треугольниковъ, являются такъ называемыя *условныя уравненія полигоновъ*; общій видъ ихъ еще сложнѣе уравненій синусовъ. Уравниваніе полигоновъ производится обыкновенно послѣ вычисленія географическихъ координатъ, а потому этотъ вопросъ изложенъ въ главѣ о географическихъ координатахъ (см. §§ 141—143).

117. Число условныхъ уравненій. Для каждой тригонометрической сѣти можно составить много условныхъ уравненій,

*) *Условныя уравненія сторонъ являются только при наблюденіи уединенныхъ (третьеклассныхъ) точекъ. Они рѣшаются обыкновенно послѣ общаго уравнительнаго вычисленія.*

но внимательное изслѣдованіе покажетъ, что не всѣ они независимы, т. е. если удовлетворены одни, то другія удовлетворятся уже сами, какъ слѣдствія первыхъ. Поэтому до составленія уравненій необходимо опредѣлить число независимыхъ условій каждаго вида. Если этого не сдѣлано, то вычислитель весьма легко можетъ или пропустить какое нибудь условное уравненіе, или же, наоборотъ, выписать одно и то же условіе два или нѣсколько разъ разнымъ образомъ. А это весьма нежелательно: пропущенное условіе окажется невыполненнымъ, введеніе же лишняго приведетъ къ поправкамъ вида $^0/_0$, т. е. къ неопредѣленности, и тогда вся вычислительная работа пропадетъ даромъ.



Черт. 174.

Для поясненія сказаннаго возьмемъ простой четыреугольникъ *ABCD* (черт. 174) съ двумя діагоналями, въ которомъ измѣрены всѣ восемь угловъ, означенные цифрами. Въ такомъ четыреугольникѣ существуютъ только условныя уравненія фигуръ и полюсовъ. Не трудно видѣть, что условныя уравненія фигуръ можно получить какъ изъ разсмотрѣнія четырехъ треугольниковъ *ABC*, *ADC*, *ABD* и *BCD*, такъ и изъ разсмотрѣнія всего четыреугольника *ABCD*; назовемъ сферическіе избытки этихъ фигуръ соотвѣтственно черезъ ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 и ε_5, тогда имѣемъ условія угловъ:

$$\text{I} \quad 2+3+4+5-(180^\circ+\varepsilon_1)=0$$
$$\text{II} \quad 1+6+7+8-(180^\circ+\varepsilon_2)=0$$
$$\text{III} \quad 1+2+3+8-(180^\circ+\varepsilon_3)=0$$
$$\text{IV} \quad 4+5+6+7-(180^\circ+\varepsilon_4)=0$$
$$\text{V} \quad 1+2+3+4+5+6+7+8-(360^\circ+\varepsilon_5)=0$$

Такъ какъ сферическіе избытки пропорціональны поверхностямъ соотвѣтствующихъ фигуръ, то разсматриваемые пять избытковъ связаны между собою двумя уравненіями

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon_3+\varepsilon_4=\varepsilon_5$$

Поэтому, какъ легко повѣрить простымъ сложеніемъ, сумма первыхъ двухъ уравненій предъидущей системы тождественна съ суммою третьяго и четвертаго и, въ свою очередь, обѣ эти суммы тождественны съ пятымъ уравненіемъ.

Такимъ образомъ изъ пяти условныхъ уравненій фигуръ только три суть независимыя, прочія два—слѣдствія первыхъ трехъ.

Для составленія уравненій полюсовъ въ разсматриваемомъ четыреугольникѣ можно взять за полюсъ любую изъ его вершинъ A, B, C и D и получить слѣдующія четыре условныя уравненія:

$$\text{VI} \qquad \frac{\sin 5 \,.\, \sin (7+8) \,.\, \sin 3}{\sin (3+4) \,.\, \sin 6 \,.\, \sin 8} = 1$$

$$\text{VII} \qquad \frac{\sin 7 \,.\, \sin (1+2) \,.\, \sin 5}{\sin (5+6) \,.\, \sin 8 \,.\, \sin 2} = 1$$

$$\text{VIII} \qquad \frac{\sin 1 \,.\, \sin (3+4) \,.\, \sin 7}{\sin (7+8) \,.\, \sin 2 \,.\, \sin 4} = 1$$

$$\text{IX} \qquad \frac{\sin 3 \,.\, \sin (5+6) \,.\, \sin 1}{\sin (1+2) \,.\, \sin 4 \,.\, \sin 6} = 1$$

Однако не всѣ эти уравненія суть независимыя. Прежде всего видно непосредственно, что произведеніе перваго и третьяго равно произведенію второго и четвертаго, такъ что

$$\text{VI} \,.\, \text{VIII} = \text{VII} \,.\, \text{IX}$$

Кромѣ того между синусами угловъ этого четыреугольника существуютъ два соотношенія, очевидныя изъ чертежа:

$$\sin (1+8) = \sin (4+5)$$

$$\sin (2+3) = \sin (6+7)$$

Такимъ образомъ изъ четырехъ условныхъ уравненій полюсовъ только одно независимое, прочія—слѣдствія перваго.

Итакъ, для разсматриваемаго четыреугольника можно составить всего четыре независимыхъ условныхъ уравненія: три уравненія фигуръ и одно уравненіе полюса. Которыя именно уравненія должны быть взяты (изъ пяти уравненій фигуръ и четырехъ уравненій полюсовъ) для вычисленія поправокъ приведенныхъ угловъ—будетъ объяснено ниже (см. § 118).

При опредѣленіи числа независимыхъ условныхъ уравненій въ сложной тригонометрической сѣти невозможно руководствоваться вышеприведенными частными соображеніями; здѣсь важно имѣть общія правила. Разсмотримъ сперва сѣть съ однимъ базисомъ (или вовсе безъ базиса) и безъ уединенныхъ точекъ. Пусть она состоитъ изъ P точекъ, на которыхъ наблюдено D направленій, и въ ней имѣется l сплошныхъ и L всѣхъ линій (сплошныхъ и несплошныхъ). *Сплошными* называются линіи, наблюденныя въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ, а *несплошными* — линіи, наблюденныя только въ одномъ. Очевидно, что $D=l+L$. Числа P, D, l и L опредѣляются простымъ счетомъ на чертежѣ.

Такъ какъ на каждой точкѣ имѣется одно *начальное* направленіе, не дающее само по себѣ никакихъ данныхъ для вычисленій (уголъ составляется не меньше, какъ двумя направленіями изъ одной точки), то въ сѣти изъ P точекъ должно существовать прежде всего P начальныхъ направленій. Изъ числа точекъ двѣ первыя (напримѣръ концы базиса или основной стороны) стоятъ произвольно для уравнительнаго вычисленія, и тріангуляція, въ смыслѣ опредѣленія точекъ, начинается только съ третьей. Слѣдовательно, тріангуляціею должно быть опредѣлено $P-2$ точекъ, и для вычисленія каждой необходимо и достаточно двухъ направленій (конечно съ двухъ другихъ точекъ). Такимъ образомъ для опредѣленія всѣхъ точекъ тріангуляціи необходимо и достаточно имѣть $P+2\ (P-2)$ или $3P-4$ направленій. Въ такой тріангуляціи всѣ точки могутъ быть вычислены только единожды, безъ всякихъ противорѣчій, но зато и безъ всякой повѣрки, т. е. въ ней не будетъ ни одного условнаго уравненія. Всякое лишнее направленіе, сверхъ необходимыхъ $3P-4$, дастъ одно условное уравненіе, потому что каждое такое направленіе будетъ сдѣлано, очевидно, на точку, уже и безъ этого опредѣленную.

Такимъ образомъ *число всѣхъ условныхъ уравненій* (N) равно числу имѣющихся въ сѣти направленій D, безъ числа необходимыхъ $3P - 4$ направленій, т. е. число всѣхъ условныхъ уравненій опредѣляется по формулѣ:

$$N = D - 3P + 4 \tag{78}$$

Между этими условными уравненіями будутъ и уравненія фигуръ и уравненія полюсовъ. Условныя уравненія фигуръ получаются изъ разсмотрѣнія только сплошныхъ линій, ибо несплошныя не замыкаютъ фигуръ. Для связи P точекъ необходимо по крайней мѣрѣ $P - 1$ сплошныхъ линій, и эти линіи очевидно не дадутъ еще ни одного условнаго уравненія. Зато каждая слѣдующая сплошная линія непремѣнно сомкнетъ какую нибудь фигуру и дастъ одно условное уравненіе. Такимъ образомъ *число условныхъ уравненій фигуръ* (A) равно числу всѣхъ сплошныхъ линій l въ данной сѣти, безъ числа необходимыхъ $P - 1$ линій, т. е. число условныхъ уравненій фигуръ опредѣляется по формулѣ:

$$A = l - P + 1 \tag{79}$$

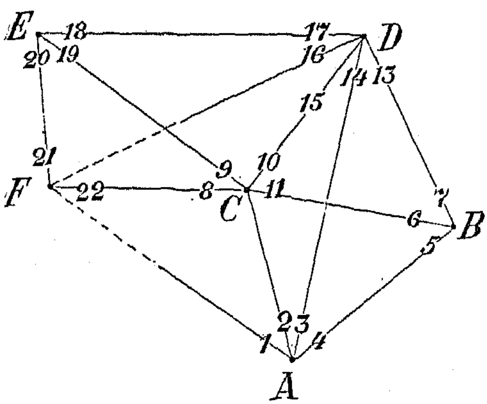
Условныя уравненія полюсовъ получаются какъ отъ сплошныхъ, такъ и отъ несплошныхъ линій. Въ тригонометрической сѣти изъ P точекъ должны существовать непремѣнно: одна линія, соединяющая двѣ первыя точки (базисъ или основная сторона), и по двѣ линіи для опредѣленія всѣхъ слѣдующихъ точекъ, такъ что всего должно быть по крайней мѣрѣ $1 + 2(P - 2)$ или $2P - 3$ линій. Каждая линія сверхъ этого необходимаго числа дастъ одно условное уравненіе полюсовъ, потому что будетъ направляться на точку, уже и безъ того опредѣленную. Такимъ образомъ *число условныхъ уравненій полюсовъ* (B) равно числу имѣющихся въ сѣти всѣхъ линій L, безъ числа необходимыхъ $2P - 3$ линій, т. е. число условныхъ уравненій полюсовъ опредѣляется формулою:

$$B = L - 2P + 3 \tag{80}$$

Повѣркою числа условныхъ уравненій можетъ служить очевидное соотношеніе:

$$N = A + B$$

Числовой примѣръ. Въ тригонометрической сѣти, изображенной на чертежѣ 175, имѣется 6 точекъ, 22 направленія, 10 сплошныхъ и 2 несплошныхъ линіи, такъ что тутъ $P = 6$, $D = 22$, $l = 10$ и $L = 12$. Подставляя эти числа въ формулы (78), (79) и (80), получимъ:



Черт. 175.

$$N = 22 - 18 + 4 = 8$$

$$A = 10 - 6 + 1 = 5$$

$$B = 12 - 12 + 3 = 3$$

Повѣрка $8 = 5 + 3$

Если измѣрялись углы, а не направленія, то число условныхъ уравненій осталось бы, конечно, то же самое, но только вмѣсто формулы (78) нужно было бы примѣнить другую *), а именно:

$$N = E - 2P + 4 \tag{78*}$$

гдѣ N и P по прежнему число всѣхъ условныхъ уравненій и число точекъ данной сѣти, а E — число измѣренныхъ угловъ. Формула эта выводится изъ того простого соображенія, что кромѣ двухъ первыхъ точекъ, служащихъ основаніемъ тріангуляціи, для опредѣленія каждой изъ остальныхъ $P - 2$ точекъ надо измѣрить по крайней мѣрѣ два угла, т. е. всего

*) Надо однако имѣть въ виду, что при уравниваніи угловъ необходимо вводить ещё условія горизонта для центральныхъ точекъ, и общее число условныхъ уравненій при существованіи такихъ точекъ дѣлается больше, а это напрасно усложняетъ вычисленіе. При уравниваніи направленій условія горизонта выполняются сами собою.

$2P - 4$. Число же условныхъ уравненій равно числу всѣхъ угловъ E безъ числа необходимыхъ.

Для предъидущаго числового примѣра $E = 16$, и потому, какъ и раньше, $N = 16 - 12 + 4 = 8$.

Выше разсмотрѣны только условныя уравненія фигуръ и полюсовъ. Другія условныя уравненія обыкновенно не вводятся въ общее уравнительное вычисленіе и разсматриваются отдѣльно. Это—уравненія базисовъ, сторонъ и, какъ исключенія въ русскихъ тріангуляціяхъ, уравненія горизонта, суммъ и разностей.

Число условныхъ уравненій базисовъ равно числу измѣренныхъ въ тріангуляціи базисовъ безъ одного (необходимаго), ибо по одному базису могутъ быть вычислены всѣ остальные, и сравненіе результатовъ непосредственнаго измѣренія и вычисленій для каждаго изъ нихъ даетъ одно базисное уравненіе. Такимъ образомъ *число условныхъ уравненій базисовъ* (C) въ тріангуляціи съ Q базисами опредѣляется по формулѣ:

$$C = Q - 1 \tag{81}$$

Условныя уравненія сторонъ получаются изъ разсмотрѣнія уединенныхъ точекъ. Для каждой такой точки производится отдѣльное уравнительное вычисленіе и, слѣдовательно, отдѣльно же опредѣляется и число уравненій. Для вычисленія положенія такой точки, какъ объяснено выше, необходимо и достаточно имѣть два направленія, а каждое слѣдующее даетъ одно условное уравненіе. Такимъ образомъ *число условныхъ уравненій сторонъ* (S) для уединенной точки, на которую имѣется R направленій, опредѣляется по формулѣ:

$$S = R - 2 \tag{82}$$

Помимо вышеприведенныхъ формулъ, число независимыхъ условныхъ уравненій каждой тригонометрической сѣти можетъ быть опредѣлено непосредственно изъ чертежа, надо только последовательно строить одну точку за другою и помнить, что всякая новая линія, проводимая на прежде построенную точку, даетъ одно условное уравненіе полюса, если это несплошная, и одно условное уравненіе полюса и одно уравненіе фигуры— если это сплошная линія.

Такъ, въ сѣти, изображенной на чертежѣ 175, начнемъ построеніе отъ базиса AB. Послѣдовательное построеніе простыхъ треугольниковъ CBA, DCB, ECD и FEC дастъ четыре условныхъ уравненія фигуръ; сплошная линія AD даетъ одно уравненіе фигуры и одно уравненіе полюса, а несплошныя линіи AF и DF даютъ каждая по одному уравненію полюсовъ, такъ что въ данной сѣти будетъ всего 8 условныхъ уравненій, изъ которыхъ пять уравненій фигуръ и три полюсовъ, что согласно съ результатами, полученными выше по формуламъ. Не надо пренебрегать опредѣленіемъ числа условныхъ уравненій по чертежу: оно даетъ хорошую и надежную повѣрку.

118. Выборъ условныхъ уравненій. Въ каждой сложной тригонометрической сѣти число независимыхъ условныхъ уравненій всегда меньше полнаго числа существующихъ въ ней условій. Въ избранномъ выше для примѣра четыреугольникѣ (черт. 174) имѣется всего 3 независимыхъ условныхъ уравненія фигуръ и 1 полюса, тогда какъ было составлено безъ труда 5 уравненій фигуръ и 4 полюсовъ. Вообще вычислителю предоставляется свободный выборъ взять тѣ или другія условныя уравненія, надо только не пропустить ни одного независимаго и не взять лишнихъ.

Съ точки зрѣнія чистой теоріи, и притомъ если бы условныя уравненія представлялись въ точной аналитической формѣ, выборъ той или другой системы условныхъ уравненій совершенно произволенъ; но съ точки зрѣнія практики, въ смыслѣ количества вычислительнаго труда и достигаемой точности въ опредѣленіи поправокъ угловъ, необходимо держаться извѣстныхъ правилъ. Разсмотримъ отдѣльно выборъ условныхъ уравненій фигуръ и полюсовъ.

1) Условныя уравненія фигуръ представляются всегда суммою искомыхъ поправокъ, всѣ коэффиціенты которыхъ суть единицы. Число неизвѣстныхъ такихъ уравненій зависитъ отъ взятыхъ для составленія уравненій фигуръ: треугольникъ даетъ уравненіе съ тремя неизвѣстными, четыреугольникъ съ четырьмя и т. д. Сущность рѣшенія системы уравненій, какъ извѣстно изъ алгебры, заключается въ послѣдовательномъ исключеніи не-

извѣстныхъ при помощи сравненія коэффиціентовъ, пока не получится одно уравненіе съ одною неизвѣстною, изъ котораго послѣдняя и опредѣляется; затѣмъ эта величина вставляется въ одно изъ составленныхъ раньше уравненій съ двумя неизвѣстными, откуда опредѣлится вторая неизвѣстная; полученныя двѣ вставляются въ уравненіе съ тремя неизвѣстными и т. д., пока не опредѣлятся числовыя величины для всѣхъ неизвѣстныхъ. Чѣмъ больше число неизвѣстныхъ въ каждомъ уравненіи, тѣмъ, очевидно, сложнѣе будетъ и рѣшеніе всей системы. Отсюда выходитъ, что выгоднѣе брать тѣ условныя уравненія фигуръ, въ которыхъ число неизвѣстныхъ меньше, т. е. разсматривать въ сѣти *только треугольники.*

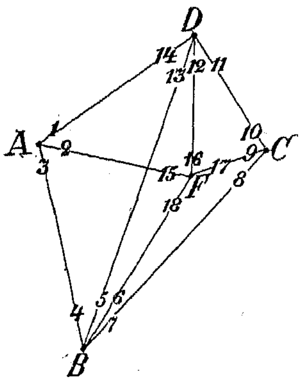
Для четыреугольника чертежа 174 (§ 117) можно, напримѣръ, взять слѣдующія восемь системъ по три независимыхъ условныхъ уравненія фигуръ:

1)	I	II	III	5)	I	III	V
2)	I	II	IV	6)	I	IV	V
3)	I	III	IV	7)	II	III	V
4)	II	III	IV	8)	II	IV	V

Первыя четыре системы составлены только по треугольникамъ, и въ нихъ входитъ не болѣе, какъ по 4 поправки угловъ, тогда какъ послѣднія четыре системы заключаютъ и условіе четыреугольника (V) съ 8-ью поправками угловъ; очевидно выгоднѣе взять одну изъ первыхъ системъ (безразлично которую), а никакъ не одну изъ вторыхъ.

2) Въ условныхъ уравненіяхъ полюсовъ коэффиціенты у неизвѣстныхъ не одинаковы (не единицы), они суть перемѣны логариѳмовъ синусовъ при измѣненіи соотвѣтствующихъ угловъ на 1″. Понятно, что и здѣсь выгоднѣе брать прежде всего тѣ уравненія, въ которыя входитъ меньшее число неизвѣстныхъ. Въ простомъ четыреугольникѣ съ двумя діагоналями въ каждое изъ условныхъ уравненій полюсовъ входитъ одинаковое число неизвѣстныхъ (по 6), и потому *въ этомъ смыслѣ* выборъ между ними безразличенъ, но возьмемъ болѣе сложную фигуру,

изображенную на черт. 176. Для нея можно составить слѣдующія условныя уравненія полюсовъ:



Черт. 176.

I	Полюсъ	A,	основаніе	BDF
II	—	B	—	ADF
III	—	B	—	DCF
IV	—	B	—	$ADCF$
V	—	C	—	BDF
VI	—	D	—	ABF
VII	—	D	—	BCF
VIII	—	D	—	$ABCF$
IX	—	F	—	ABD
X	—	F	—	BCD
XI	—	F	—	$ABCD$

Легко видѣть, что въ уравненія I, II, III, V, VI, VII, IX и X входятъ поправки 12 направленій (по 12-ти неизвѣстныхъ), тогда какъ въ уравненія IV, VIII и XI входятъ поправки 16 направленій (по 16-ти неизвѣстныхъ). Понятно, что введеніе такихъ уравненій только усложнитъ вычисленіе. Вообще, если только это возможно, надо брать *полюсы съ треугольными основаніями.*

Разсмотримъ теперь преимущества выбора того или другого полюса. Въ сѣти черт. 174 надо выбрать одно независимое уравненіе полюсовъ изъ составленныхъ для нея четырехъ, въ сѣти черт. 176 два независимыхъ изъ девяти (съ треугольными основаніями). Какъ показано въ § 116, всякое условное уравненіе полюса представляется подъ видомъ

$$\alpha\,(1) + \beta\,(2) + \gamma\,(3) + \ldots + v = 0$$

гдѣ α, β, γ ....—перемѣны логариѳмовъ синусовъ угловъ $1, 2, 3$.... при измѣненіи ихъ на $1''$, (1), (2), (3) .... —искомыя поправки соотвѣтствующихъ угловъ, а v—ошибка смыканія фигуры. При бѣгломъ взглядѣ въ логариѳмическія таблицы легко замѣтить, что перемѣны логариѳмовъ синусовъ при измѣненіи угловъ на $1''$, т. е. величины α, β, γ .... тѣмъ больше, чѣмъ углы меньше, такъ что уравненія полюсовъ, между которыми предстоитъ выборъ, различаются величиною коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ, а, слѣдовательно, и величиною ошибки смыканія v; дѣйствительно, такъ какъ зависящія уравненія суть слѣдствія одно другого, то, вообще говоря, одно уравненіе отличается отъ другого только постояннымъ множителемъ.

Возьмемъ уравненія съ одною неизвѣстною (1); пусть коэффиціентъ при неизвѣстной и извѣстный членъ будутъ въ одномъ случаѣ α_1 и v_1, а въ другомъ α_2 и v_2, причемъ, такъ какъ одно уравненіе есть слѣдствіе другого, то

$$\alpha_2 = n\alpha_1 \text{ и } v_2 = nv_1$$

Изъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 (1) + v_1 = 0 \\ \text{или} \quad &\alpha_2 (1) + v_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

получится, конечно, та же величина для (1), потому что

изъ перваго $$(1) = -\frac{v_1}{\alpha_1} \qquad (b)$$

а изъ второго

$$(1) = -\frac{v_2}{\alpha_2} = -\frac{nv_1}{n\alpha_1} = -\frac{v_1}{\alpha_1} \qquad (c)$$

Но одинаковыя значенія для (1) получатся только тогда, когда величины α_1, α_2, v_1 и v_2 суть числа точныя. Когда же эти величины извѣстны приблизительно, то неизвѣстная (1) получится съ нѣкоторою погрѣшностью. Назовемъ погрѣшности тѣми же буквами со значками Δ. Легко видѣть, что погрѣшность $\Delta\,(1)$ въ вычисленіи (1) изъ уравненій (b) и (c) будетъ соотвѣтственно:

изъ (b) $$\Delta_1 (1) = -\frac{\Delta v_1 - (1)\,.\,\Delta \alpha_1}{\alpha_1}$$

изъ (c) $$\Delta_2 (1) = -\frac{\Delta v_2 - (1)\,.\,\Delta \alpha_2}{\alpha_2}$$

Если погрѣшности въ величинахъ α и v одинаковы (напримѣръ единица послѣдней цифры), т. е. $\Delta v_1 = \Delta v_2$ и $\Delta\alpha_1 = \Delta \alpha_2$, то по раздѣленіи получимъ:

$$\frac{\Delta_1(1)}{\Delta_2(1)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

откуда слѣдуетъ, что *погрѣшности въ вычисленіи неизвѣстной обратно-пропорціональны коэффиціентамъ при этой неизвѣстной въ начальныхъ уравненіяхъ.*

Пусть даны уравненія

$$10x + 17 = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$100x + 170 = 0 \qquad \text{(II)}$$

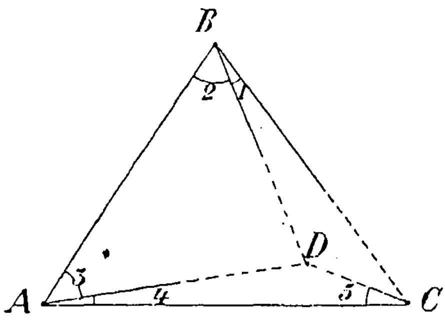
Если коэффиціенты при неизвѣстныхъ и извѣстные члены суть точныя числа, то, разумѣется, изъ обоихъ уравненій получится тотъ же x, именно $x = -1.7$, если же въ этихъ данныхъ числахъ подозрѣваются ошибки, равныя единицѣ, то погрѣшность въ опредѣленіи x изъ перваго уравненія будетъ

$$\Delta_1 x = -\frac{1 - 1.7}{10} = 0.07$$

а изъ второго

$$\Delta_2 x = -\frac{1 - 1.7}{100} = 0.007$$

т. е. уравненіе (II) дастъ на практикѣ величину x съ погрѣшностью въ десять разъ меньшею, чѣмъ равнозначное ему въ математическомъ смыслѣ уравненіе (I).



Черт. 177.

Для лучшаго разъясненія сказаннаго разсмотримъ четыреугольникъ $ABCD$ (черт. 177), въ которомъ измѣрены лишь пять угловъ, означенныхъ цифрами 1...5, и въ которомъ вовсе нѣтъ условныхъ уравненій фигуръ, а имѣется лишь одно условное уравненіе полюса. Положимъ, что измѣренія дали слѣдующія значенія угловъ:

$$\begin{aligned}
1 &= 0^\circ 30' 2'' \\
2 &= 59\ 30\ 0 \\
3 &= 59\ 30\ 0 \\
4 &= 0\ 30\ 0 \\
5 &= 30\ 0\ 0
\end{aligned}$$

Если взять за полюсъ точку A, то условное уравненіе будетъ:

$$\frac{AB}{AD}\cdot\frac{AD}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{\sin(180^\circ-(2+3))}{\sin 2}\cdot\frac{\sin 5}{\sin(180^\circ-(4+5))}\cdot\frac{\sin(1+2)}{\sin(180^\circ-(1+2+3+4))}=1$$

	$lg\,sin$	$\Delta\,lg\,sin$		$lg\,sin$	$\Delta\,lg\,sin$
$(2+3)$	9.9418193	— 11.7	2	9.935 3204	+ 12.4
5	9.6989700	+ 36.5	$(4+5)$	9.705 4689	+ 35.8
$(1+2)$	9.9375330	+ 12.2	$(1+2+3+4)$	9.937 5282	— 12.1
	9.5783223			9.578 3175	

или послѣ приведенія:

$$24.3\,(1)+0.2\,(2)+0.4\,(3)-23.7\,(4)+0.7\,(5)+48=0 \qquad (a)$$

Если же за полюсъ взять точку D, то условное уравненіе будетъ:

$$\frac{DA}{DB}\cdot\frac{DB}{DC}\cdot\frac{DC}{DA}=\frac{\sin 2}{\sin 3}\cdot\frac{\sin(180^\circ-(1+2+3+4+5))}{\sin 1}\cdot\frac{\sin 4}{\sin 5}=1$$

	$lg\,sin$	$\Delta\,lg\,sin$		$lg\,sin$	$\Delta\,lg\,sin$
2	9.9353204	+ 12.4	3	9.9353204	+ 12.4
$1+2+3+4+5$	9.6989627	— 36.5	1	7.9413241	+2410.0
4	7.9408419	+2412.0	5	9.6989700	+ 36.5
	7.5751250			7.5756145	

или, послѣ приведенія и умноженія на —1,

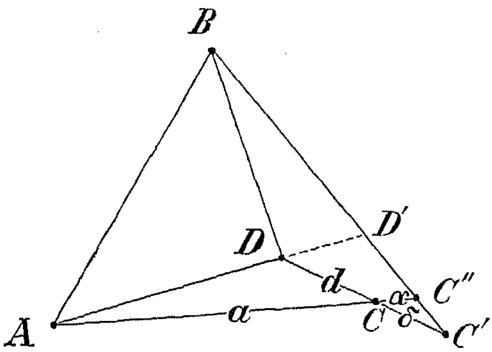
$$2446.5\,(1)+24.1\,(2)+48.9\,(3)-2375.5\,(4)+$$
$$+73.0\,(5)+4895=0 \qquad (b)$$

Всѣ коэффиціенты и извѣстный членъ этого уравненія (полюсъ въ D) въ 100 разъ больше, чѣмъ въ предъидущемъ (полюсъ въ A), такъ что, рѣшая его съ пятизначными логариѳмами, можно вычислить поправки угловъ съ такою же точностью, какъ при рѣшеніи перваго уравненія съ семизначными логариѳмами.

Если изобразить несмыканіе разсматриваемаго четыреугольника графически, то получится фигура чертежа 178. Ошибки смыканія при полюсахъ въ A и въ D, т. е. числа 48 и 4895 суть ничто иное, какъ величины

$$M.10^7.\frac{\alpha}{a} \quad \text{и} \quad M.10^7.\frac{\delta}{d}$$

гдѣ M—модуль Бригговыхъ логариѳмовъ, а α, a, δ и d — длины линій CC'', AC, CC' и DC.



Черт. 178.

Такимъ образомъ отношеніе точностей уравненій (a) и (b) равно отношенію

$$\frac{\alpha}{a} : \frac{\delta}{d} \text{ т. е. равно величинѣ } \frac{\alpha \,.\, d}{a \,.\, \delta}$$

Но изъ чертежа видно, что

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\sin DC'B}{\sin AC''C'}$$

такъ что

$$\frac{\alpha \,.\, d}{a \,.\, \delta} = \frac{d \,.\, \sin DC'B}{a \,.\, \sin AC''C'} \text{ или приближенно } = \frac{DD'}{AD'}$$

т. е. *точности условныхъ уравненій полюсовъ въ четыреугольникѣ, при разныхъ полюсахъ, обратно пропорціональны разстояніямъ этихъ полюсовъ до противолежащихъ діагоналей* *).

Если кромѣ указанныхъ угловъ наблюдены еще другіе, то разсмотрѣнныя выше условныя уравненія полюсовъ будутъ имѣть различныя ошибки смыканія, и ихъ нельзя уже сравнивать непосредственно, но сущность дѣла отъ того не измѣняется.

Итакъ, для вычисленія поправокъ съ наименьшею погрѣшностью надо избирать тѣ условныя уравненія полюсовъ, въ ко-

*) Эта прекрасная теорема открыта датскимъ геодезистомъ *Захаріе*, см. Den Danske Gradmaaling, а также рецензію *Гельмерта* въ Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellschaft, т. 12 и 13, 1877 и 78 гг.

торыя входятъ наибольшія перемѣны логариѳмовъ синусовъ, т. е. въ которыя входятъ самые острые углы. Выбирать эти углы всего легче по чертежу, который, какъ объяснено выше, всегда составляется заранѣе, такъ что сравненіе величины угловъ не представляетъ никакого затрудненія.

Въ четыреугольникѣ съ двумя пересѣкающимися діагоналями надо брать полюсомъ ту вершину, которая *всего ближе къ противолежащей ей діагонали*. Напр. для четыреугольника, изображеннаго на черт. 174, надо взять полюсомъ точку A и, слѣдовательно, уравненіе VI (§ 117). Во всякой центральной системѣ (см. черт. 170) полюсомъ надо брать *центральную точку* (O). Во всякой же сложной сѣти полюсомъ надо брать точку, ближайшую къ противолежащей діагонали, и направленія съ которой опираются на фигуру съ наименьшимъ числомъ сторонъ. Напримѣръ, въ сѣти черт. 176 самыя выгодныя уравненія полюсовъ будутъ IX и X.

119. Рѣшеніе условныхъ уравненій. Когда опредѣлено число всѣхъ независимыхъ условныхъ уравненій данной сѣти и выбраны наиболѣе простыя и точныя, то остается ихъ рѣшить, т. е. вычислить поправки направленій (или угловъ). Пусть имѣется система *k условныхъ уравненій*:

$$\left.\begin{array}{l} a_1(1) + a_2(2) + a_3(3) + \ldots + a_n(n) + v_1 = 0 \\ b_1(1) + b_2(2) + b_3(3) + \ldots + b_n(n) + v_2 = 0 \\ c_1(1) + c_2(2) + c_3(3) + \ldots + c_n(n) + v_3 = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k_1(1) + k_2(2) + k_3(3) + \ldots + k_n(n) + v_k = 0 \end{array}\right\} \quad (83)$$

съ n неизвѣстными поправками (1), (2), (3) .... (n). Коэффиціенты a_1, a_2 .... b_1, b_2 .... k_1, k_2 .... k_n суть данныя числа; выше въ § 116 было уже объяснено, что въ условныхъ уравненіяхъ угловъ эти коэффиціенты всегда единицы ($+ 1$ или $- 1$), а въ условныхъ уравненіяхъ синусовъ они суть перемѣны логариѳмовъ синусовъ при измѣненіи соотвѣтствующихъ угловъ на $1''$ (т. е. величины α, β ....). Извѣстные же члены v_1, v_2 .... v_n представляютъ ошибки соотвѣтствующихъ условныхъ уравненій, именно въ условныхъ уравненіяхъ угловъ это ошибки фигуръ, выраженныя просто въ секундахъ, а въ условныхъ уравненіяхъ синусовъ—ошибки смыканія или связи, выраженныя въ единицахъ послѣдняго знака логариѳмовъ и именно въ тѣхъ же единицахъ, въ какихъ выражены коэффиціенты при неизвѣстныхъ въ соотвѣтствующихъ уравненіяхъ. Словомъ, уравненія (83) представляютъ въ общемъ видѣ ур. (a), (b) .... (g) § 116-го.

Такъ какъ число условныхъ уравненій (k) въ каждой тригонометрической сѣти всегда меньше числа неизвѣстныхъ (n), то вышестоящая система (83) есть система неопредѣленныхъ уравненій, и для неизвѣстныхъ (1), (2), (3) .... можно найти безчисленное множество значеній. Но, какъ замѣчено раньше, искомыя поправки, помимо геометрическихъ условій сѣти, связываются еще условіемъ, чтобы сумма ихъ квадратовъ была наименьшею, т. е. эти поправки должны удовлетворять уравненію:

$$(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \dots + (n)^2 = \text{minimum} \qquad \textbf{(84)}$$

Для совмѣстнаго рѣшенія уравненій (83) и (84) можно примѣнить общеизвѣстный способъ введенія неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Именно, помножимъ каждое изъ уравненій (83) на неопредѣленныя пока числа $2A, 2B, 2C \dots 2K$ (коэффиціенты 2 введены только для упрощенія выкладки) и вычтемъ ихъ изъ уравненія (84). Въ результатѣ получимъ одно уравненіе:

$$\begin{gathered}(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \dots + (n)^2 - \\ - 2Aa_1(1) - 2Aa_2(2) - 2Aa_3(3) - \dots - 2Aa_n(n) - 2Av_1 - \\ - 2Bb_1(1) - 2Bb_2(2) - 2Bb_3(3) - \dots - 2Bb_n(n) - 2Bv_2 - \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ - 2Kk_1(1) - 2Kk_2(2) - 2Kk_3(3) - \dots - 2Kk_n(n) - 2Kv_k = \text{min.}\end{gathered}$$

или, собирая члены съ (1), съ (2) и т. д.,

$$\begin{gathered}(1)^2 - 2\,(1)\,\{Aa_1 + Bb_1 + \dots + Kk_1\} + \\ + (2)^2 - 2\,(2)\,\{Aa_2 + Bb_2 + \dots + Kk_2\} + \\ + (3)^2 - 2\,(3)\,\{Aa_3 + Bb_3 + \dots + Kk_3\} + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ - 2\,\{Av_1 + Bv_2 + \dots + Kv_k\} = \text{min.}\end{gathered}$$

Чтобы составить полные квадраты, прибавимъ и вычтемъ въ каждой строкѣ этого уравненія по квадрату множителя въ скобкахъ $\{\ \}$; тогда получимъ:

$$((1) - \{Aa_1 + Bb_1 + \ldots + Kk_1\})^2 + ((2) - \{Aa_2 + Bb_2 + \ldots + Kk_2\})^2 + \ldots -$$
$$- (\{Aa_1 + Bb_1 + \ldots\}^2 + \{Aa_2 + Bb_2 + \ldots\}^2 + \ldots + 2\{Av_1 + Bv_2 + \ldots + Kv_k\}) = \min.$$

Искомыя поправки (1), (2) .... входятъ только въ члены первой строки этого уравненія, слѣдовательно, только этими членами и можно распоряжаться, чтобы сдѣлать всю первую часть уравненія наименьшею. Разсматривать члены второй строки нѣтъ никакой надобности, потому что, будетъ ли ихъ совокупность величиною положительною или величиною отрицательною, во всякомъ случаѣ, въ алгебраическомъ смыслѣ, когда сумма членовъ первой строки имѣетъ наименьшее значеніе, то и вся первая часть уравненія будетъ наименьшею. Но всѣ члены первой строки разсматриваемаго уравненія представляютъ квадраты, такъ что сумма ихъ будетъ наименьшею только при такихъ значеніяхъ искомыхъ (1), (2) ...., при которыхъ каждый членъ порознь равенъ нулю, т. е. когда:

$$\begin{aligned}
(1) - \{Aa_1 + Bb_1 + \ldots + Kk_1\} &= 0 \\
(2) - \{Aa_2 + Bb_2 + \ldots + Kk_2\} &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(n) - \{Aa_n + Bb_n + \ldots + Kk_n\} &= 0
\end{aligned}$$

При всѣхъ другихъ значеніяхъ каждый квадратъ, а, слѣдовательно, и ихъ сумма, будетъ больше нуля.

Итакъ, уравненія (83) съ условіемъ (84) приводятъ къ слѣдующему рѣшенію, непосредственно вытекающему изъ вышестоящихъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned}
(1) &= Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + \ldots + Kk_1 \\
(2) &= Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 + \ldots + Kk_2 \\
(3) &= Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 + \ldots + Kk_3 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n) &= Aa_n + Bb_n + Cc_n + \ldots + Kk_n
\end{aligned}\right\} \quad (85)$$

Однако для вычисленія неизвѣстныхъ поправокъ (*1*), (*2*) .... по этимъ формуламъ необходимо еще имѣть значенія введенныхъ выше неопредѣленныхъ множителей A, B .... K, называемыхъ *коррелатами*. Для этой цѣли вставимъ полученныя величины для (*1*), (*2*) .... (*n*) въ первоначальныя условныя уравненія (83); тогда получимъ:

$$a_1(Aa_1 + Bb_1 + \ldots + Kk_1) + a_2(Aa_2 + Bb_2 + \ldots + Kk_2) + \ldots$$
$$+ a_n(Aa_n + Bb_n + \ldots + Kk_n) + v_1 = 0$$
$$b_1(Aa_1 + Bb_1 + \ldots + Kk_1) + b_2(Aa_2 + Bb_2 + \ldots + Kk_2) + \ldots$$
$$+ b_n(Aa_n + Bb_n + \ldots + Kk_n) + v_2 = 0$$

. . . .

. . . .

$$k_1(Aa_1 + Bb_1 + \ldots + Kk_1) + k_2(Aa_2 + Bb_2 + \ldots + Kk_2) + \ldots$$
$$+ k_n(Aa_n + Bb_n + \ldots + Kk_n) + v_k = 0$$

Раскрывъ скобки, собравъ въ каждомъ уравненіи члены съ A, съ B и пр. и означая для краткости прямыми скобками сумму подобныхъ членовъ, т. е. полагая

$$[aa] = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 + \ldots + a_na_n$$
$$[ab] = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n$$
$$[bb] = b_1b_1 + b_2b_2 + b_3b_3 + \ldots + b_nb_n$$

. . . .

получимъ

$$\left.\begin{array}{l} [aa]A + [ab]B + [ac]C + \ldots + [ak]K + v_1 = 0 \\ [ab]A + [bb]B + [bc]C + \ldots + [bk]K + v_2 = 0 \\ [ac]A + [bc]B + [cc]C + \ldots + [ck]K + v_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ak]A + [bk]B + [ck]C + \ldots + [kk]K + v_k = 0 \end{array}\right\} \quad (86)$$

Всѣ коэффиціенты этихъ такъ называемыхъ *нормальныхъ уравненій* (86) суть сочетанія данныхъ коэффиціентовъ a, b ...., и такъ какъ число этихъ уравненій равно числу введенныхъ неопредѣленныхъ множителей A, B .... K, то рѣшеніе ихъ не представляетъ никакихъ затрудненій и можетъ быть исполнено по обыкновеннымъ правиламъ алгебры. Послѣ опредѣленія множителей A, B .... K не трудно вычислить и искомыя поправки по формуламъ (85).

Повѣркою вычисленія можетъ служить равенство:

$$(1)^2 + (2)^2 + \dots + (n)^2 = -(Av_1 + Bv_2 + \dots + Kv_k) \quad (87)$$

Наконецъ средняя ошибка угла (или направленія) получается по формулѣ:

$$m = \pm \sqrt{\frac{(1)^2 + (2)^2 + \dots + (n)^2}{k}} \quad (88)$$

Примѣнимъ разсмотрѣнныя правила къ простому треугольнику, въ которомъ измѣрены всѣ три угла. Для такого треугольника получается только одно условное уравненіе:

$$(1) + (2) + (3) + v = 0 \quad (p)$$

въ которомъ (1), (2) и (3)—искомыя поправки угловъ 1, 2 и 3, а v—ошибка треугольника. Такъ какъ всѣ коэффиціенты у неизвѣстныхъ равны единицѣ, то уравненія (85) будутъ:

$$\left.\begin{aligned}(1) &= A\\(2) &= A\\(3) &= A\end{aligned}\right\} \quad (q)$$

а единственное нормальное уравненіе (если подставить значенія (q) въ (p)):

$$3A + v = 0$$

откуда

$$A = -\frac{v}{3}$$

и слѣдовательно

$$(1) = (2) = (3) = -\frac{v}{3}$$

Такимъ образомъ для треугольника, въ которомъ измѣрены всѣ три угла, уравнительное вычисленіе приводитъ къ слѣдующему простому правилу: *къ каждому углу должно придать треть ошибки треугольника съ обратнымъ знакомъ*. Это издавна извѣстное правило очевидно и безъ теоріи, такъ какъ ошибки угловъ не зависятъ отъ ихъ величины.

Числовые примѣры. 1) Пусть даны измѣренные углы треугольника:

$$\begin{aligned}
1 &= 53^\circ 19' 34.''4\\
2 &= 78\ 17\ 25.\ 8\\
3 &= 48\ 23\ \ 2.\ 3\\
\hline
1+2+3 &= 180\ \ 0\ \ 2.\ 5\\
180^\circ + \varepsilon &= 180\ \ 0\ \ 1.\ 3\\
\hline
\text{Слѣдовательно } v &= \qquad +1.\ 2
\end{aligned}$$

поэтому

$$(1) = (2) = (3) = -0.''4$$

и уравненные углы того же треугольника будутъ (см. § 37):

	Сферическіе	Плоскіе
1 . . .	53° 19′ 34.″0	53° 19′ 33.″6
2 . . .	78 17 25. 4	78 17 25. 0
3 . . .	48 23 1. 9	48 23 1. 4
	180 0 1. 3	180 0 0. 0

2) Пусть въ нѣкоторой точкѣ (черт. 179) измѣрены углы:

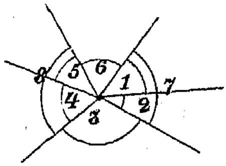
Наблюденные углы	Поправки	Уравненные углы
1 = 65° 45′ 28.″37	+ 0.″51	65° 45′ 28.″88
2 = 31 47 58. 50	+ 0. 51	31 47 59. 01
3 = 79 32 6. 25	+ 0. 02	79 32 6. 27
4 = 87 44 57. 41	− 0. 56	87 44 56. 85
5 = 34 0 3. 35	− 0. 56	34 0 2. 79
6 = 61 9 26. 17	+ 0. 02	61 9 26. 19
7 = 97 33 28. 39	− 0. 49	97 33 27. 90
8 = 121 44 59. 05	+ 0. 59	121 44 59. 64

Въ данномъ случаѣ условныя уравненія суммъ и горизонта могутъ быть изображены слѣдующею таблицею:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	v
A	$+1$	$+1$					-1		$-1.52=0$
B				$+1$	$+1$			-1	$+1.71=0$
C			$+1$			$+1$	$+1$	$+1$	$-0.14=0$

Откуда нормальныя уравненія будутъ:

A	B	C	v
$+3$	0	-1	-1.52
0	$+3$	-1	$+1.71$
-1	-1	$+4$	-0.14



Черт. 179.

Рѣшеніе ихъ даетъ

$$A = +0.514 \qquad B = -0.562 \qquad C = +0.023$$

Искомыя поправки и уравненные углы помѣщены выше. Повѣрка по формулѣ (87):

$$(1)^2 + (2)^2 + \ldots\ldots = 1.74$$

$$Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = -1.74$$

и наконецъ средняя ошибка угла по формулѣ (88) оказывается:

$$m = \pm 0''.76$$

120. Практическія указанія. Уравнительныя вычисленія далеко не всегда такъ просты, какъ въ предъидущихъ маленькихъ примѣрахъ и представляютъ для начинающихъ значительныя затрудненія. Въ нижеслѣдующихъ §§ 121—127 приведено нѣсколько разнообразныхъ и болѣе сложныхъ примѣровъ, поясняющихъ теорію; для облегченія ихъ пониманія и разъясненія уравнительныхъ вычисленій вообще здѣсь собраны нѣкоторыя общія практическія указанія.

Каждое уравнительное вычисленіе заключаетъ пять отдѣльныхъ дѣйствій: 1) Выборъ условныхъ уравненій и выписка коэффиціентовъ и извѣстныхъ членовъ этихъ уравненій, 2) Преобразованіе условныхъ уравненій въ нормальныя, 3) Рѣшеніе нормальныхъ уравненій, 4) Вычисленіе поправокъ данныхъ направленій или угловъ и 5) Повѣрка условныхъ уравненій и исправленіе направленій или угловъ полученными поправками.

1) Въ § 118 объяснены важность выбора *независимыхъ* условій въ данной сѣти и причины предпочтенія условій, выражаемыхъ уравненіями съ наименьшимъ числомъ неизвѣстныхъ. Избранныя условныя уравненія располагаются въ послѣдовательномъ порядкѣ, причемъ *сперва* выписываются условія угловъ, а *затѣмъ* условія синусовъ; такой порядокъ облегчаетъ слѣдующее затѣмъ вычисленіе коэффиціентовъ нормальныхъ уравненій. Самая выписка дѣлается на графленой бумагѣ; направленія (или углы) нумеруются и пишутся въ одномъ столбцѣ одно подъ другимъ; для каждаго уравненія назначается отдѣльный столбецъ, и противъ соотвѣтствующей неизвѣстной пишутъ только коэффиціенты, а подъ ними извѣстные члены; противъ неизвѣстныхъ, не входящихъ въ данное уравненіе, оставляютъ пустыя мѣста (чтобы не писать много нулей).

Коэффиціенты у неизвѣстныхъ въ уравненіяхъ угловъ суть *единицы*, со знакомъ $+$ или $-$. Если уравниваютъ направленія, то для каждаго угла, образуемаго двумя направленіями, коэффиціентъ у поправки одного направленія есть $+1$, а другого -1; направленія нумеруются въ порядкѣ возрастающихъ азимутовъ, и потому для составленія угла берутъ разность послѣдующаго и предъидущаго направленій, образующихъ разсматриваемый уголъ. Если уравниваютъ углы, то поправки всѣхъ угловъ имѣютъ обыкновенно коэффиціентъ $+1$.

Коэффиціенты у неизвѣстныхъ въ уравненіяхъ синусовъ суть *перемѣны логариѳмовъ синусовъ* при измѣненіи соотвѣтствующихъ угловъ на $1''$; эти перемѣны выписываются изъ логариѳмическихъ таблицъ *одновременно* съ вычисленіемъ *lg sin* самихъ угловъ; такъ какъ эти перемѣны даются въ таблицахъ обыкновенно для $10''$, то при выпискѣ ихъ слѣдуетъ дѣлить на 10. Извѣстно, что синусы возрастаютъ или убываютъ съ увеличеніемъ угла, смотря по тому, будетъ-ли уголъ меньше или больше 90°, поэтому коэффиціенты для *острыхъ* угловъ имѣютъ знакъ +, а для *тупыхъ* знакъ —. При уравниваніи направленій каждый уголъ даетъ два одинаковыхъ коэффиціента съ противоположными знаками. Знаки соотвѣтствующихъ коэффиціентовъ зависятъ еще и отъ знака, съ которымъ искомая поправка входитъ въ условное уравненіе; на это обстоятельство надо обращать особое вниманіе, такъ какъ большинство ошибокъ при составленіи условныхъ уравненій происходитъ именно отъ невѣрности знаковъ у коэффиціентовъ.

Извѣстные члены условныхъ уравненій выражаются для уравненій угловъ въ секундахъ, а для уравненій синусовъ въ единицахъ тѣхъ десятичныхъ знаковъ, въ которыхъ выражены коэффиціенты у неизвѣстныхъ. Необходимо внимательно слѣдить, чтобы и тутъ не сдѣлать ошибокъ въ знакахъ, опредѣляемыхъ при самомъ вычисленіи по формуламъ (q) § 116.

Вообще вычисленіе коэффиціентовъ у неизвѣстныхъ и извѣстныхъ членовъ условныхъ уравненій составляетъ работу нетрудную, однако не слѣдуетъ продолжать вычисленія, не убѣдившись въ вѣрности составленія условныхъ уравненій. Всего лучше работать вдвоемъ или, за неимѣніемъ товарища, послѣ составленія уравненій прервать вычисленіе и, спустя нѣкоторое время, повторить его вновь, на другихъ листахъ бумаги. Нѣтъ другого средства для повѣрки *коэффиціентовъ у неизвѣстныхъ* въ условныхъ уравненіяхъ; что же касается *извѣстныхъ членовъ* этихъ уравненій, то они могутъ быть повѣрены другимъ путемъ. Именно, для уравненій угловъ надо брать сумму угловъ въ фигурахъ, представляющихъ совокупность нѣсколькихъ треугольниковъ: ошибка каждой фигуры должна равняться суммѣ ошибокъ составляющихъ ее треугольниковъ. Извѣстные же члены уравненій полюсовъ повѣряютъ тѣмъ, что послѣ вычисленія синусовъ данныхъ угловъ вычисляютъ синусы угловъ, уменьшенныхъ на $^1/_3$ сферическихъ избытковъ соотвѣтствующихъ треугольниковъ; оба вычисленія должны привести къ одинаковымъ результатамъ. Эта повѣрка основывается на томъ соображеніи, что если назвать черезъ A, B... углы сферическіе, черезъ A_1, B_1... соотвѣтствующіе имъ плоскіе и черезъ

a, b, c лучи изъ полюса, то для сферической фигуры

$$\frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{\sin C}{\sin D} \cdot \frac{\sin E}{\sin F} = \frac{\sin a}{\sin b} \cdot \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \frac{\sin c}{\sin a}$$

а для плоской

$$\frac{\sin A_1}{\sin B_1} \cdot \frac{\sin C_1}{\sin D_1} \cdot \frac{\sin E_1}{\sin F_1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}$$

и вторыя части этихъ уравненій тождественно равны 1.

2) Вычисленіе коэффиціентовъ нормальныхъ уравненій производится по формуламъ § 119 (стр. 432); такъ какъ коэффиціенты уравненій угловъ суть +1 или — 1, то образованіе первыхъ коэффиціентовъ нормальныхъ уравненій дѣлается легко и скоро, затрудненія начинаются только съ коэффиціентовъ, въ которые входятъ уравненія синусовъ; многочисленныя перемноженія надо дѣлать при помощи логариѳмовъ или на счетной машинѣ. Во всякомъ случаѣ полезно повѣрять выкладки по суммамъ коэффиціентовъ. Пусть

$$s_1 = [a], \quad s_2 = [b], \quad s_3 = [c]$$

Составимъ произведенія as, bs,...; коэффиціенты у коррелатъ A, B... въ нормальныхъ уравненіяхъ должны удовлетворять равенствамъ

$$[as] = [aa] + [ab] + [ac] + \ldots$$
$$[bs] = [ab] + [bb] + [bc] + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

гдѣ скобки [ ] означаютъ суммы соотвѣтствующихъ членовъ.

3) Нормальныя уравненія могутъ быть рѣшены любымъ пріемомъ элементарной алгебры для рѣшенія системы уравненій со многими неизвѣстными, но всего лучше пользоваться особою схемою, основанною на самомъ законѣ коэффиціентовъ нормальныхъ уравненій (86). Если умножить всѣ коэффиціенты перваго нормальнаго уравненія послѣдовательно на отношенія $\frac{[ab]}{[aa]}$, $\frac{[ac]}{[aa]}$... и подписать результаты подъ вторымъ, третьимъ и т. д. уравненіями, то коэффиціенты у первой неизвѣстной

въ каждой парѣ уравненій будутъ равны, и, слѣдовательно, послѣ вычитаній, получится вмѣсто первоначальныхъ k уравненій съ k неизвѣстными $k-1$ уравненій съ $k-1$ неизвѣстными, и притомъ коэффиціенты этихъ новыхъ уравненій будутъ тоже слѣдовать закону коэффиціентовъ нормальныхъ. Совершивъ подобныя же дѣйствія надъ этими $k-1$ уравненіями, получимъ систему $k-2$ уравненій съ $k-2$ неизвѣстными и т. д. Такимъ образомъ совершается послѣдовательное исключеніе неизвѣстныхъ, начиная съ первой, и въ результатѣ получится одно уравненіе съ одною неизвѣстною.

Имѣя въ виду то обстоятельство, что послѣ каждаго вычитанія первые члены уравненій исчезаютъ, ихъ вовсе и не пишутъ и располагаютъ вычисленіе слѣдующимъ образомъ (стр. 445 и 450):

Коэффиціенты у неизвѣстныхъ и извѣстные члены нормальныхъ уравненій выписываются на графленую бумагу съ такимъ разсчетомъ, чтобы между первымъ и вторымъ уравненіями остались 2 свободныя строки, между вторымъ и третьимъ 4 строки, между третьимъ и четвертымъ 6 строкъ и т. д. Самые коэффиціенты пишутся въ соотвѣтствующихъ столбцахъ, означенныхъ A, B, C... Въ первомъ уравненіи выписываются всѣ коэффиціенты, во второмъ — всѣ, кромѣ перваго, въ третьемъ — всѣ, кромѣ первыхъ двухъ и т. д., такъ что въ послѣднемъ уравненіи пишется только коэффиціентъ у послѣдней неизвѣстной и извѣстный членъ этого уравненія.

Въ такой схемѣ надо привыкнуть читать уравненія не по одной строкѣ, а по столбцамъ и строкамъ, начиная *каждое уравненіе отъ первой строки по столбцу до его конца и поворачивая затѣмъ по строкѣ направо до ея окончанія.*

Правѣе всѣхъ пишутъ еще повѣрочный столбецъ (s), каждое число котораго есть сумма всѣхъ коэффиціентовъ соотвѣтствующаго уравненія и его извѣстнаго члена. Съ числами этого повѣрочнаго столбца продѣлываютъ тѣ же дѣйствія, что и съ коэффиціентами уравненій (и извѣстными членами); послѣ каждой выключки является повѣрка: сумма всѣхъ коэффиціентовъ въ каждомъ новомъ уравненіи (читая его, какъ объяснено выше) должна равняться новому числу въ повѣрочномъ столбцѣ.

Умноженіе нормальныхъ уравненій на отношенія $\frac{[ab]}{[aa]}$, $\frac{[ac]}{[aa]}\cdots$ производится при помощи четырехзначныхъ логариѳмовъ, напечатанныхъ на одномъ листѣ картона (чтобы не тратить времени на перелистываніе таблицъ); четырехзначные логариѳмы здѣсь достаточны, потому что искомыя поправки выражаются обыкновенно лишь трехзначными числами (секунды, ихъ десятыя и сотыя). Прежде всего берутъ логариѳмы всѣхъ чиселъ первой строки и пишутъ ихъ во второй; затѣмъ на отдѣльной бумажкѣ пишутъ разность логариѳмовъ $[ab]$ и $[aa]$ и, прикладывая бумажку къ каждому изъ выписанныхъ логариѳмовъ (кромѣ перваго), складываютъ ихъ въ умѣ и, пріискавъ въ таблицѣ антилогариѳмовъ соотвѣтствующія числа, подписываютъ ихъ подъ коэффиціентами второго уравненія; послѣ вычитаній получаютъ коэффиціенты перваго уравненія системы съ $k-1$ неизвѣстными. Составивъ затѣмъ разность логариѳмовъ $[ac]$ и $[aa]$ и приложивъ бумажку къ тѣмъ же логариѳмамъ (кромѣ первыхъ двухъ), вычисляютъ подобнымъ же образомъ числа, которыя подписываются подъ коэффиціентами третьяго нормальнаго уравненія, и послѣ вычитанія получаютъ коэффиціенты второго уравненія системы съ $k-1$ неизвѣстными и т. д. Вообще умноженіе коэффиціентовъ перваго нормальнаго уравненія на соотвѣтствующія отношенія начинаютъ съ того коэффиціента, который представляетъ числителя этого отношенія. Въ результатѣ получаютъ въ третьихъ строкахъ каждой группы систему $k-1$ уравненій съ $k-1$ неизвѣстными.

Съ коэффиціентами системы $k-1$ уравненій продѣлываютъ совершенно то же, что и съ коэффиціентами нормальныхъ уравненій, и въ результатѣ получаютъ въ пятыхъ строкахъ каждой группы систему $k-2$ уравненій съ $k-2$ неизвѣстными. Съ этими уравненіями производятъ опять тѣ же дѣйствія и такъ далѣе, пока не дойдутъ до одного уравненія съ одною неизвѣстною.

Послѣ вычитаній, числа *каждой новой строки* повѣряются тѣмъ, что ихъ сумма должна равняться числу, полученному на той же строкѣ въ повѣрочномъ столбцѣ. Всякое несогласіе укажетъ на ошибку, и работу отнюдь не слѣдуетъ продолжать дальше, пока ошибки не открыты и не исправлены. Такъ какъ вычисленіе ведется логариѳмами съ округленіемъ послѣдней десятичной цифры, то несогласіе суммъ съ числами повѣрочнаго столбца на 2—3 единицы въ послѣдней десятичной не указываетъ еще на ошибку вычисленія.

Исключеніе неизвѣстныхъ составляетъ самую изнурительную часть уравнительнаго вычисленія (см. § 124), но, благодаря повѣрочному столбцу, она не утомляетъ вычислителя и можетъ быть прервана на любой строкѣ съ тѣмъ, чтобы потомъ продолжать работу со свѣжими силами.

Когда получится послѣдняя неизвѣстная изъ рѣшенія уравненія съ одною неизвѣстною, то логариѳмъ ея пишется на отдѣльной бумажкѣ, и эту бумажку прикладываютъ къ строкѣ съ логариѳмами коэффиціентовъ уравненія съ двумя неизвѣстными; сложивъ логариѳмъ послѣдней неизвѣстной съ логариѳмомъ ея коэффиціента, пріискиваютъ соотвѣтствующее число, которое, будучи сложено съ извѣстнымъ членомъ, дастъ все, что нужно для вычисленія предпослѣдней неизвѣстной. Приписавъ ея логариѳмъ на той же бумажкѣ лѣвѣе логариѳма послѣдней неизвѣстной, прикладываютъ эту бумажку къ строкѣ, заключающей логариѳмы коэффиціентовъ уравненія съ тремя неизвѣстными. Продолжая опредѣленіе неизвѣстныхъ далѣе, доходятъ наконецъ до первой.

Это вычисленіе неизвѣстныхъ (кромѣ послѣдней) ничѣмъ не повѣряется и потому должно дѣлаться съ величайшимъ вниманіемъ и всего лучше въ двѣ руки; особенно часты тутъ ошибки въ знакахъ *).

4) Поправки направленій (или угловъ) вычисляются по формуламъ (85). Это вычисленіе не представляетъ затрудненій, такъ какъ коэффиціенты уравненій угловъ суть единицы, а въ прочихъ хотя они и не единицы, но логариѳмы ихъ уже вы-

*) Существуетъ надежное средство повѣрить и вычисленіе всѣхъ неизвѣстныхъ, но по продолжительности труда оно весьма рѣдко примѣняется: надо переписать всѣ нормальныя уравненія въ обратномъ порядкѣ неизвѣстныхъ и снова произвести выключку, послѣ которой получится, конечно, вмѣсто послѣдней, первая неизвѣстная; въ предѣлахъ точности вычисленій, эта неизвѣстная должна равняться полученной первымъ рѣшеніемъ.

писаны раньше. Повѣркою вычисленія поправокъ служитъ соотношеніе, выражаемое формулою (87):

$$[x^2] = -[K.v]$$

5) Когда вычислены всѣ поправки, то ихъ полезно подставить въ условныя уравненія и убѣдиться въ вѣрности всего вычисленія. Если предъидущія повѣрки дали удовлетворительное согласіе, то это показываетъ лишь вѣрность *рѣшенія уравненій*, подстановка же въ условныя уравненія убѣдитъ теперь въ вѣрности самаго *составленія уравненій*.

Послѣднее дѣйствіе уравнительнаго вычисленія есть исправленіе направленій (или угловъ) полученными поправками. Понятно, что поправки надо придавать съ соотвѣтствующими знаками $+$ или $-$. Приведенныя направленія, исправленныя уравнительными вычисленіями, называютъ *уравненными направленіями* (или углами).

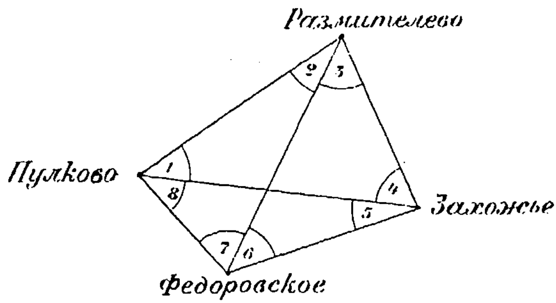
121. Уравниваніе угловъ. Въ четыреугольникѣ Пулково-Размителево-Захожье-Федоровское измѣрены всѣ 8 угловъ, означенные на чертежѣ 180 цифрами:

	Приведенные углы.	Поправки.	Уравненные углы.
1	48°33′29″.58	− 1″.08	49°33′28″.50
2	30 5 42 .94	+ 0 .28	30 5 43 .22
3	41 46 55 .76	+ 0 .39	41 46 56 .15
4	59 33 52 .07	+ 1 .28	59 33 53 .35
5	29 47 15 .94	+ 0 .17	29 47 16 .11
6	48 51 53 .83	+ 1 .54	48 51 55 .37
7	60 2 5 .96	− 0 .80	60 2 5 .16
8	41 18 43 .89	+ 0 .09	41 18 43 .98

Въ данномъ случаѣ $E = 8$, $P = 4$, и потому число всѣхъ независимыхъ уравненій по формулѣ (78*) равно 4, изъ которыхъ три уравненія фигуръ и одно уравненіе полюса.

Для составленія трехъ уравненій фигуръ возьмемъ слѣдующіе три треугольника (вычисленіе сферическихъ избытковъ см. стр. 403):

$\triangle$ *ПРЗ*		$\triangle$ *РЗФ*		$\triangle$ *ЗФП*	
1	$48^\circ 33' 29''.58$	3	$41^\circ 46' 55''.76$	5	$29^\circ 47' 15''.94$
2+3	71 52 38 .70	4+5	89 21 8 .01	6+7	108 53 59 .79
4	59 33 52 .07	6	48 51 53 .83	8	41 18 43 .89
	180 0 0 .35		179 59 57 .60		179 59 59 .62
	$\varepsilon =$ 1 .22		$\varepsilon =$ 0 .98		$\varepsilon =$ 0 .62
	$v = -0$ .87		$v = -3$ .38		$v = -1$ .00.



Черт. 180.

Для составленія уравненія полюса беремъ за полюсъ точку *Ф*, какъ ближайшую къ діагонали *Пулково-Захожье*:

$$\frac{ФП}{ФР}\cdot\frac{ФР}{ФЗ}\cdot\frac{ФЗ}{ФП}=\frac{\sin 2}{\sin(1+8)}\cdot\frac{\sin(4+5)}{\sin 3}\cdot\frac{\sin 8}{\sin 5}$$

	lg sin	Δ *lg sin*			*lg sin*	Δ *lg sin*
2	9.700 2183	+36.3		1+8	9.999 9989	0
4+5	9.999 9723	+ 0.2		3	9.823 6700	+23.6
8	9.819 6502	+23.9		5	9.696 1716	+36.7
	9.519 8408		$v = +3$		9.519 8405	

Это уравненіе будетъ:

$$+36.3(2)+0.2(4)+0.2(5)+23.9(8)-23.6(3)-36.7(5)+3=0.$$

или послѣ приведеній и раздѣленія всѣхъ членовъ на 10, чтобы они по своей абсолютной величинѣ были близки къ коэффиціентамъ уравненій фигуръ (см. § 142, п. 7):

$$+3.63(2)-2.36(3)+0.02(4)-3.65(5)+2.39(8)+0.30=0$$

Слѣдующая таблица представляетъ всѣ четыре условныя уравненія, причемъ въ ней помѣщены только коэффиціенты у неизвѣстныхъ; пробѣлы показываютъ, что коэффиціенты у соотвѣтствующихъ неизвѣстныхъ нули.

	A	*B*	*C*	*D*	*x*	x^2
1	+1				$-1''.08$	1.17
2	+1			+3.63	+0.28	0.08
3	+1	+1		−2.36	+0.39	0.15
4	+1	+1		+0.02	+1.28	1.64
5		+1	+1	−3.65	+0.17	0.03
6		+1	+1		+1.54	2.37
7			+1		−0.80	0.64
8			+1	+2.39	+0.09	0.01
v	−0.87	−3.38	−1.00	+0.30		

Послѣдніе два столбца представляютъ поправки угловъ и ихъ квадраты, вычисленные по формулѣ (85), послѣ опредѣленія коррелатъ *A*, *B*, *C* и *D* (см. стр. 445).

Коэффиціенты нормальныхъ уравненій выходятъ:

$$[aa]=1^2+1^2+1^2+1^2=+4;\quad [ab]=1.1+1.1=2;\quad [ac]=0;$$
$$[ad]=+3.36-2.63+0.02=+1.29;\quad [bb]=+4;\quad [bc]=+2;$$
$$[bd]=-2.36+0.02-3.65=-5.99;\quad [cc]=+4;$$
$$[cd]=-3.65+2.39=-1.26;$$
$$[dd]=(3.63)^2+(2.36)^2+(0.02)^2+(3.65)^2+(2.39)^2=37.78.$$

Вотъ рѣшеніе нормальныхъ уравненій по схемѣ, объясненной въ § 120:

	A	B	C	D	v	s
+ 4.688						
+ 0.482	+ 4	+ 2	0	+ 1.29	− 0.87	+ 6.42
− 0.87	0.6021	0.3010	—	0.1106	$_n$ 9.9395	0.8075
+ 4.300	− 1.608	+ 4	+ 2	− 5.99	− 3.38	− 1.37
A = − 1.075	− 2.484	+ 1	0	+ 0.65	− 0.44	+ 3.21
	− 2.94	+ 3	+ 2	− 6.64	− 2.94	− 4.58
B = + 2.344	− 7.032	0.4771	0.3010	$_n$ 0.8222	$_n$ 0.4683	$_n$ 0.6609
		+ 1.186	+ 4	− 1.26	− 1.00	+ 3.74
		+ 0.96	0	0	0	0
		+ 2.146	+ 4	− 1.26	− 1.00	+ 3.74
		0.3316	+ 1.33	− 4.43	− 1.96	− 3.05
		0.4265	+ 2.67	+ 3.17	+ 0.99	+ 6.79
C = − 0.804	$lg\, C$ =	$_n$ 9.9051	0.4265	0.5011	9.9823	0.8319
		lg (− 7.07) =	$_n$ 0.8494	+ 37.78	+ 0.30	+ 32.12
		lg (+ 18.90) =	1.2765	+ 0.42	− 0.28	+ 2.07
		$lg\, D$ =	9.5729	+ 37.36	+ 0.58	+ 30.05
		D =	+ 0.374	+ 14.70	+ 6.51	+ 10.14
				+ 22.66	− 5.93	+ 19.91
				+ 3.76	+ 1.14	+ 8.06
				+ 18.90	− 7.07	+ 11.85

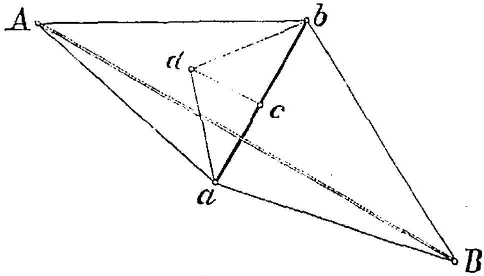
Повѣрка по формулѣ (87): $[\,x^2\,] = 6.09$

$$-[Kv] = 6.07$$

Уравненные углы см. выше (стр. 442). Легко убѣдиться, что съ этими величинами суммы угловъ во всѣхъ треугольникахъ равны $180° + \varepsilon$, и въ вычисленіи сторонъ не будетъ никакихъ противорѣчій.

122. Уравниваніе направленій. Въ сложныхъ тригонометрическихъ сѣтяхъ выгоднѣе уравнивать не углы, а направленія;

въ большинствѣ случаевъ наблюдаютъ именно направленія, такъ что даже естественнѣе уравнивать направленія, т. е. то, что дѣйствительно наблюдалось. Въ способахъ вычисленія разницы нѣтъ, только вмѣсто опредѣленія поправокъ угловъ ищутъ поправки направленій; поправки же угловъ получаются затѣмъ, какъ разности поправокъ направленій.



Черт. 181.

Для примѣра разсмотримъ Орскую базисную сѣть, изображенную на черт. 36 и 181 (см. Записки Военно-Топ. Отдѣла Гл. Штаба, часть XLVII, стр. 40—44). Базисъ ab раздѣленъ точкою c на двѣ части, составляющія между собою уголъ, очень близкій къ 180°, и такъ какъ каждая часть измѣрена самостоятельно, то въ этой сѣти имѣется въ сущности два базиса, приведенныя длины которыхъ, въ саженяхъ, суть:

южная часть . . $ac = 2166.588$ $\qquad lg\, ac = 3.335\,7762.5$

сѣверная часть . $bc = 1993.779$ $\qquad lg\, bc = 3.299\,6770.9$

Вотъ исправленныя приведеніями къ центрамъ направленія (въ порядкѣ возростающихъ азимутовъ) на всѣхъ шести точкахъ сѣти:

a		b	
$1 =$ 0° 0′ 0″.00	0″.00	$9 =$ 0° 0′ 0″.00	0″.00
$2 =$ 38 46 43 .59	41 .54	$10 =$ 63 54 21 .94	23 .57
$3 =$ 79 15 33 .80	33 .72	$11 =$ 63 54 29 .45	29 .76
$4 =$ 79 15 39 .46	39 .39	$12 =$ 103 11 7 .70	6 .41
$5 =$ 154 42 18 .85	18 .14	$13 =$ 124 53 56 .01	55 .69

c		d	
$6 =$ 0 0 0 .00	0 .00	$14 =$ 0 0 0 .00	0 .00
$7 =$ 85 41 32 .65	32 .87	$15 =$ 46 24 59 .96	61 .93
$8 =$ 179 59 49 .12	48 .15	$16 =$ 100 14 30 .86	31 .24

	A			*B*	
17 =	0° 0′ 0″.00	0″.00	*20* =	0° 0′ 0″.00	0″.00
18 =	27 3 3 .12	2 .90	*21* =	12 35 44 .66	44 .31
19 =	39 45 1 .58	0 .62	*22* =	40 38 46 .16	46 .09

Въ правыхъ, отдѣленныхъ черточками столбцахъ даны секунды уже уравненныхъ направленій.

Въ разсматриваемой сѣти 6 точекъ, 22 направленія, 11 сплошныхъ линій и 2 базиса, и потому по формуламъ (79), (80) и (81) имѣемъ: $A = 6$, $B = 2$ и $C = 1$, всего 9 условныхъ уравненій.

Для составленія шести условныхъ уравненій фигуръ беремъ треугольники:

abB	*abA*	*AbB*
5— 3 = 75°26′45″.05	*3— 1* = 79°15′33″.80	*13— 9* = 124°53′56″.01
11— 9 = 63 54 29 .45	*13—11* = 60 59 26 .56	*18—17* = 27 3 3 .12
22—20 = 40 38 46 .16	*19—17* = 39 45 1 .58	*22—21* = 28 3 1 .50
180 0 0 .66	180 0 1 .94	180 0 0 .63
ε = 0 .27	ε = 0. 27	ε = 0 .37
v = + 0 .39	v = + 1 .67	v = + 0 .26

abd	*acd*	*cbd*
3— 2 = 40 28 50 .21	*4— 2* = 40 28 55 .87	*8— 7* = 94 18 16 .47
12—11 = 39 16 38 .25	*7— 6* = 85 41 32 .65	*12—10* = 39 16 45 .76
16—14 = 100 14 30 .86	*16—15* = 53 49 30 .90	*15—14* = 46 24 59 .96
179 59 59 .32	179 59 59 .42	180 0 2 .19
ε = 0 .08	ε = 0 .04	ε = 0 .04
v = − 0 .76	v = − 0 .62	v = + 2 .15

Отсюда условныя уравненія фигуръ выходятъ:

$$(5)-(3)+(11)-(9)+(22)-(20)+0.39=0$$
$$(3)-(1)+(13)-(11)+(19)-(17)+1.67=0$$
$$(13)-(9)+(18)-(17)+(22)-(21)+0.26=0$$
$$(3)-(2)+(12)-(11)+(16)-(14)-0.76=0$$
$$(4)-(2)+(7)-(6)+(16)-(15)-0.62=0$$
$$(8)-(7)+(12)-(10)+(15)-(14)+2.15=0$$

Для составленія двухъ условныхъ уравненій полюсовъ беремъ четыреугольники $aAbB$ и $acbd$ и за полюсы ихъ вершины b и d *):

$$\frac{bB}{ba}\cdot\frac{ba}{bA}\cdot\frac{bA}{bB}=\frac{\sin(5-3)\,.\,\sin(19-17)\,.\,\sin(22-21)}{\sin(22-20)\,.\,\sin(3-1)\,.\,\sin(18-17)}=1$$

5— 3	9.985 8352.3	+ 5.47		22—20	9.813 8381.9	+ 24.52
19—17	9.805 8031.0	+ 25.32		3— 1	9.992 3241.2	+ 4.00
22—21	9.672 3272.3	+ 39.51		18—17	9.657 8026.5	+ 41.24
	9.463 9655.6		$v = + 6.0$		9.463 9649.6	

$$\frac{db}{dc}\cdot\frac{dc}{da}\cdot\frac{da}{db}=\frac{\sin(8-7)\,.\,\sin(4-2)\,.\,\sin(12-11)}{\sin(12-10)\,.\,\sin(7-6)\,.\,\sin(3-2)}=1$$

8— 7	9.998 7731.7	— 1.58		12—10	9.801 4739.0	+ 25.74
4— 2	9.812 3863.0	+ 24.67		7— 6	9.998 7714.2	+ 1.59
12—11	9.801 4545.9	+ 25.75		3— 2	9.812 3723.2	+ 24.67
	9.612 6140.6		$v = - 35.8$		9.612 6176.4	

Отсюда условныя уравненія полюсовъ выходятъ:

$$+0.547(5)-0.547(3)+2.532(19)-2.532(17)+3.951(22)-$$
$$-3.951(21)-2.452(22)+2.452(20)-0.400(3)+0.400(1)-$$
$$-4.124(18)+4.124(17)+0.60=0$$

$$-0.158(8)+0.158(7)+2.467(4)-2.467(2)+2.575(12)-$$
$$-2.575(11)-2.574(12)+2.574(10)-0.159(7)+0.159(6)-$$
$$-2.467(3)+2.467(2)-3.58=0$$

Наконецъ условное уравненіе базисовъ получается вычисленіемъ общей стороны cd изъ треугольниковъ acd и cbd, по двумъ базисамъ ac и bc. Такъ какъ

$$cd = ac\,.\,\frac{\sin(4-2)}{\sin(16-15)} = bc\,.\,\frac{\sin(12-10)}{\sin(15-14)}$$

то должно быть

$$\frac{ac\,.\,\sin(4-2)\,.\,\sin(15-14)}{bc\,.\,\sin(12-10)\,.\,\sin(16-15)}=1$$

*) Для большей точности вычисленія поправокъ угловъ слѣдовало бы взять полюсами вершины a и c, но углы при a и b въ треугольникѣ abc такъ малы, что перемѣны логариѳмовъ синусовъ ихъ нельзя считать пропорціональными перемѣнамъ самихъ угловъ.

ac	3.335 7762.5			*bc*	3.299 6770.9	
4—2	9.812 3862.8	+ 24.67		*12—10*	9.801 4738.8	+ 25.74
15—14	9.859 9618.0	+ 20.04		*16—15*	9.906 9921.7	+ 15.40
	3.008 1243.3		— 188.1		3.008 1431.4	

Отсюда условное уравненіе базисовъ выходитъ:

$$+2.467(4)-2.467(2)+2.004(15)-2.004(14)-2.574(12)+$$
$$+2.574(10)-1.540(16)+1.540(15)-18.81=0$$

Сопоставляя эти уравненія вмѣстѣ, послѣ выписки коэффиціентовъ по порядку искомыхъ поправокъ и послѣ обыкновенныхъ приведеній получаемъ:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	Полученныя поправки направленій.
1		—1					+0.400			+0″.582
2				—1	—1				—2.467	—1 .472
3	—1	+1		+1			—0.947	—2.467		+0 .504
4					+1			+2.467	+2.467	+0 .512
5	+1						+0.547			—0 .126
6					—1			+0.159		+0 .250
7					+1	—1		—0.001		+0 .473
8						+1		—0.158		—0 .723
9	—1		—1							—0 .065
10						—1		+2.574	+2.574	+1 .567
11	+1	—1		—1				—2.575		+0 .242
12				+1		+1		+0.001	—2.574	—1 .358
13		+1	+1							—0 .387
14				—1		—1			—2.004	—0 .783
15					—1	+1			+3.544	+1 .185
16				+1	+1				—1.540	—0 .401
17		—1	—1				+1.592			+0 .393
18			+1				—4.124			+0 .177
19		+1					+2.532			—0 .570
20	—1						+2.452			+0 .137
21			—1				—3.951			—0 .208
22	+1		+1				+1.499			+0 .071
v	+0.39	+1.67	+0.26	—0.76	—0.62	+2.15	+0.60	—3.58	—18.81	

Рѣшеніе нормальныхъ уравненій:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	v	s
+6.000	−2.000	+2.000	−2.000	0	0	+0.541	−0.108	0	+0.39	+ 4.823
0.7782	n 0.3010	0.3010	n 0.3010	—	—	9.7332	n 9.0334	—	9.5911	0.6833
+1.160	+6.000	+2.000	+2.000	0	0	−0.407	+0.108	0	+1.67	+ 9.371
+0.386	+0.667	−0.667	+0.667	0	0	−0.180	+0.036	0	−0.13	− 1.608
−1.186	+5.333	+2.667	+1.333	0	0	−0.227	+0.072	0	+1.80	+10.979
+0.002	0.7270	0.4260	0.1249	—	—	n 9.3560	8.8573	—	0.2553	1.0406
+0.016										
+0.39	+0.515	+6.000	0	0	0	−0.266	0	0	+0.26	+ 9.994
	+0.791	+0.667	−0.667	0	0	+0.180	−0.036	0	+0.13	+ 1.608
+0.768	−0.001	+5.333	+0.667	0	0	−0.446	+0.036	0	+0.13	+ 8.386
$A=$ −0.128	−0.011	+1.333	+0.667	0	0	−0.113	+0.036	0	+0.90	+ 5.490
	+1.80	+4.000	0	0	0	−0.333	0	0	−0.77	+ 2.896
		0.6021	—	—	—	n 9.5228	—	—	n 9.8865	0.4618
	+3.094									
	$B=$ −0.580	−0.001	+6.000	+2.000	+2.000	−0.947	+0.109	+0.357	−0.76	+ 8.759
		−0.77	+0.667	0	0	−0.180	+0.036	0	−0.13	− 1.608
			+5.333	+2.000	+2.000	−0.767	+0.073	+0.357	−0.63	+10.367
		−0.771	+0.333	0	0	−0.057	+0.018	0	+0.45	+ 2.745
		$C=$ +0.193	+5.000	+2.000	+2.000	−0.710	+0.055	+0.357	−1.08	+ 7.622
			0	0	0	0	0	0	0	0
			+5.000	+2.000	+2.000	−0.710	+0.055	+0.357	−1.08	+ 7.622
			0.6990	0.3010	0.3010	n 9.8513	8.7404	9.5527	n 0.0334	0.8821
			−0.548	+6.000	−2.000	0	+2.307	−0.150	−0.62	+ 7.537
			−1.493	0	0	0	0	0	0	0
			−0.003	+6.000	−2.000	0	+2.307	−0.150	−0.62	+ 7.537
			−0.008	0	0	0	0	0	0	0
			+0.167	+6.000	−2.000	0	+2.307	−0.150	−0.62	+ 7.537
			−1.08	0	0	0	0	0	0	0
				+6.000	−2.000	0	+2.307	−0.150	−0.62	+ 7.537
			−2.965	+0.800	+0.800	−0.284	+0.022	+0.143	−0.432	+ 3.049
			$D=$ +0.593	+5.200	−2.800	+0.284	+2.285	−0.293	−0.188	+ 4.488
				0.7160	n 0.4472	9.4533	0.3589	n 9.4669	n 9.2742	0.6520
				+2.090	+6.000	0	−2.730	+0.400	+2.15	+ 5.820
				+0.001	0	0	0	0	0	0
				−0.340	+6.000	0	−2.730	+0.400	+2.15	+ 5.820
				−0.137	0	0	0	0	0	0
				−0.188	+6.000	0	−2.730	+0.400	+2.15	+ 5.820
					0	0	0	0	0	0
				+1.426	+6.000	0	−2.730	+0.400	+2.15	+ 5.820
				0.1541	+0.800	−0.284	+0.022	+0.143	−0.432	+ 3.049
				0.7160	+5.200	+0.284	−2.752	+0.257	+2.582	+ 2.771
					+1.508	−0.153	−1.230	+0.158	+0.101	− 2.416
				n 9.4381	+3.692	+0.437	−1.522	+0.099	+2.481	+ 5.187
				$E=$ −0.274	0.5672	9.6405	n 0.1824	8.9956	0.3947	0.7149

	G	H	I	v	s
+0.002	+51.17	+ 2.336	0	+ 0.60	+53.027
+0.227	+ 0.05	— 0.010	0	+ 0.035	+ 0.435
+0.046	+51.12	+ 2.346	0	+ 0.565	+52.592
+2.481	+ 0.01	— 0.003	0	— 0.077	— 0.467
	+51.11	+ 2.349	0	+ 0.642	+53.059
+2.756	+ 0.03	0	0	+ 0.064	— 0.241
0.4403	+51.08	+ 2.349	0	+ 0.578	+53.300
0.5672	+ 0.10	— 0.008	— 0.051	+ 0.153	— 1.082
	+50.98	+ 2.357	+ 0.051	+ 0.425	+54.382
n 9.8731	+ 0.016	+ 0.125	— 0.016	— 0.010	+ 0.245
	+50.964	+ 2.232	+ 0.067	+ 0.435	+54.137
F = —0.747	+ 0.052	— 0.180	+ 0.012	+ 0.294	+ 0.614
	+50.912	+ 2.412	+ 0.055	+ 0.141	+53.523
	1.7068	0.3824	8.7404	9.1492	1.7286
	—0.359	+25.48	+12.709	— 3.58	+36.631
	+0.026	+ 0.002	0	— 0.007	— 0.087
	+0.141	+25.478	+12.709	— 3.573	+36.718
		+ 0.001	0	+ 0.024	+ 0.148
	—0.192	+25.477	+12.709	— 3.597	+36.570
	n 9.2833	0	0	0	0
	1.7068	+25.477	+12.709	— 3.597	+36.570
		+ 0.001	+ 0.004	— 0.012	+ 0.084
	$lg\ G$ = 7.5765	+25.476	+12.705	— 3.585	+36.486
		+ 1.004	— 0.129	— 0.083	+ 1.972
		+24.472	+12.834	— 3.502	+34.514
		+ 0.628	— 0.041	— 1.023	— 2.139
		+23.844	+12.875	— 2.479	+36.653
		+ 0.114	+ 0.003	+ 0.007	+ 2.536
		+23.730	+12.872	— 2.486	+34.117
		1.3753	1.1096	n 0.3955	1.5330
		+6.019	+44.371	—18.81	+38.877
		—2.486	0	0	0
			+44.371	—18.81	+38.877
		+3.533	0	0	0
		0.5482	+44.371	—18.81	+38.877
		1.3753	0	0	0
			+44.371	—18.81	+38.877
		$lg\ H$ = n 9.1729	+ 0.026	— 0.077	+ 0.544
			+44.345	—18.733	+38.333
			+ 0.017	+ 0.011	— 0.253
			+44.328	—18.744	+38.586
			+ 0.003	+ 0.067	+ 0.139
			+44.325	—18.811	+38.447
			+ 0.000	+ 0.000	+ 0.058
			+44.325	—18.811	+38.389
			+ 6.980	— 1.348	+18.505
			+37.345	—17.463	+19.884

n 1.2421
1.5722
$lg\ I$ = 9.6699

Подставивъ значенія вычисленныхъ коррелатъ A, B, C.... въ таблицу стр. 449, *получимъ* поправки направленій, помѣщенныя тамъ же, въ послѣднемъ столбцѣ.

Повѣрка по формулѣ (87):

$$\Sigma x^2 = +\ 11.114 \qquad \Sigma Kv = -\ 11.114$$

Средняя ошибка измѣреннаго направленія выходитъ (формула 88):

$$\pm \sqrt{\frac{11.114}{9}} = \pm\ 1''.11$$

а средняя ошибка измѣреннаго угла:

$$\pm\ 1''.11 \,.\, \sqrt{2} = \pm\ 1''.57$$

Придавъ вычисленныя поправки къ приведеннымъ направленіямъ и принимая для начальныхъ направленій на каждой точкѣ 0°0′0″.00, послѣ округленія до сотыхъ долей секунды, получимъ наконецъ уравненныя направленія, помѣщенныя въ добавочныхъ столбцахъ табличекъ стр. 446 и 447.

123. Оцѣнка вычислительнаго труда. Изъ вышеприведенныхъ примѣровъ легко усмотрѣть, что наибольшая часть вычислительнаго труда при уравниваніи тріангуляціи заключается въ составленіи и рѣшеніи нормальныхъ уравненій. *Составленіе* уравненій требуетъ меньше времени, чѣмъ ихъ рѣшеніе, и притомъ эта работа облегчаетъ послѣдующее вычисленіе тріангуляціи. Дѣйствительно, подысканные логариѳмы синусовъ разныхъ угловъ (для опредѣленія извѣстныхъ членовъ нормальныхъ уравненій) пригодятся впослѣдствіи для вычисленія самой тріангуляціи; имѣя перемѣны логариѳмовъ синусовъ при измѣненіи соотвѣтствующихъ угловъ на 1″, легко потомъ перейти отъ синусовъ приведенныхъ угловъ къ синусамъ угловъ уравненныхъ, стоитъ лишь къ каждому изъ нихъ придать съ соотвѣтствующимъ знакомъ произведеніе изъ перемѣны логариѳма синуса на вычисленную поправку угла. *Рѣшеніе* же нормальныхъ уравненій, составляющее главную часть вычислительнаго труда, ни для чего больше не можетъ понадобиться, а между тѣмъ, по мѣрѣ увеличенія числа условныхъ уравненій, этотъ трудъ возрастаетъ такъ быстро, что, при большомъ числѣ уравненій, ихъ рѣшеніе дѣлается почти неисполнимымъ на практикѣ.

Разсмотримъ, сколько именно отдѣльныхъ чиселъ надо найти для рѣшенія k нормальныхъ уравненій. Если принять въ разсчетъ извѣстные члены уравненій и повѣрочный столбецъ s для случая, когда все вычисленіе ведется по объясненной въ § 120 сокращенной схемѣ, то для перваго нормальнаго уравненія надо найти $k+2$ чиселъ, для второго $k+1$, для третьяго k, для четвертаго $k-1$ и т. д., наконецъ для послѣдняго 3, такъ что всего надо найти

$$3+4+\ldots+(k+2)=\frac{k(k+5)}{2} \text{ чиселъ}$$

Послѣ каждой выключки число уравненій и число коэффиціентовъ въ каждомъ изъ нихъ уменьшается на единицу, и послѣ окончанія выключекъ останется одно уравненіе съ одною неизвѣстною; поэтому полное число количествъ, подлежащихъ опредѣленію, получится, если вышеприведенное выраженіе суммировать для всѣхъ значеній k отъ 1 до k, т. е. составить сумму:

$$\sum_1^k \frac{k(k+5)}{2}=\frac{1}{2}\sum_1^k k^2+\frac{5}{2}\sum_1^k k$$

Подставляя сюда значенія суммъ квадратовъ и первыхъ степеней натуральныхъ чиселъ и называя черезъ n полное число количествъ, подлежащихъ вычисленію при рѣшеніи k нормальныхъ уравненій съ k неизвѣстными, получимъ:

$$n=\frac{k(k+1)(k+8)}{6} \tag{89}$$

Напримѣръ, для рѣшенія двухъ нормальныхъ уравненій $n=10$, для трехъ 22, для четырехъ 40, для десяти 330, для ста 181 800 и т. д. Такимъ образомъ въ сложныхъ тріангуляціяхъ, покрывающихъ цѣлую страну сплошною сѣтью треугольниковъ, почти нѣтъ никакой возможности производить строгое уравнительное вычисленіе. Если каждый опытный вычислитель въ силахъ рѣшить 10 нормальныхъ уравненій въ одинъ день, то для рѣшенія десятковъ и сотенъ уравненій необходимы мѣсяцы и годы. Правда, *Дазе* (1824 — 1861), вычислитель при

Управленія Береговой съемки Пруссіи (Küstenvermessung) рѣшилъ однажды 86 уравненій въ $3^1/_2$ мѣсяца, но такихъ усидчивыхъ тружениковъ немного. Извѣстно, что этотъ же Дазе вычислилъ отношеніе окружности къ діаметру (π) съ 200 десятичными знаками въ два мѣсяца.

Чтобы уменьшить вычислительный трудъ, обыкновенно уравниваютъ не всю сѣть сразу, а разбиваютъ ее на нѣсколько частей и, уравнявъ одну какую нибудь часть, полученныя величины принимаютъ въ смежныхъ частяхъ за неизмѣнныя, съ которыми ихъ потомъ и уравниваютъ отдѣльно; далѣе послѣдовательно переходятъ къ другимъ частямъ, пока не уравняютъ всю сѣть. Для уравниванія тріангуляціи Великобританіи и Ирландіи вся сѣть была раздѣлена на 21 часть, въ которыхъ число условныхъ уравненій было отъ 12 до 77; даже при такомъ упрощеніи, уравниваніе произведено лишь въ $2^1/_2$ года, причемъ въ среднемъ этою работой занималось 8 опытныхъ вычислителей.

Вообще надо стараться по возможности сокращать предстоящій трудъ вычисленія и уже при рекогносцировкахъ стремиться располагать треугольники простѣйшимъ образомъ, чтобы не наблюдать много излишнихъ діагоналей. Тогда сѣть всегда можно разбить на отдѣльныя системы, которыя вычисляются безъ подавляющей затраты времени. Общее же уравнительное вычисленіе примѣняется почти исключительно только для базисныхъ сѣтей. Переходъ отъ малаго, непосредственно измѣреннаго базиса къ большой основной сторонѣ первокласснаго треугольника производится обыкновенно сложнымъ перекрещиваніемъ діагональныхъ направленій, съ довольно острыми связывающими углами. Въ такой сѣти никакія упрощенія не могутъ быть сдѣланы безъ ущерба точности вычисленія основной стороны, но, къ счастью, базисныя сѣти никогда не представляютъ чрезмѣрнаго числа условныхъ уравненій, и вычисленіе ихъ не сопряжено съ большою потерею времени; затраченный же трудъ съ избыткомъ вознаграждается увѣренностью въ высокой точности полученныхъ результатовъ.

Когда первоклассная тріангуляція представляетъ не сплошную сѣть, а отдѣльныя или взаимно-пересѣкающіяся цѣпи треугольниковъ, то вычислительный трудъ для ихъ уравниванія значительно сокращается. *Бессель* доказалъ, что если изъ существующихъ въ сѣти условныхъ уравненій принять въ разсчетъ не всѣ, а только нѣкоторыя, и, опредѣливъ по нимъ вѣроятнѣйшія поправки всѣхъ угловъ, вновь уравнять всю сѣть, принявъ въ разсчетъ остальныя условныя уравненія, вмѣстѣ съ прежними, то окончательные результаты будутъ тѣ же, какъ если бы вычисленіе велось сразу для всѣхъ существующихъ въ сѣти условныхъ уравненій. Вообще говоря, такой пріемъ не выгоденъ въ практическомъ отношеніи, потому что первоначальное вычисленіе для одной группы условныхъ уравненій не уменьшаетъ труда послѣдующаго общаго уравниванія, но въ нѣкоторыхъ случаяхъ, довольно часто встрѣчающихся на практикѣ, *пріемъ послѣдовательнаго уравниванія* можетъ значительно сократить вычисленія.

Въ нижеслѣдующихъ §§ 124—126 объяснены пріемы послѣдовательнаго уравниванія для фигуръ наиболѣе часто встрѣчающихся на дѣйствительныхъ тріангуляціяхъ *).

124. Цѣпь между двумя основными сторонами. Пусть между двумя основными сторонами b и a (черт. 172) проложена непрерывная цѣпь изъ n треугольниковъ. Въ такой цѣпи существуетъ $n+1$ условныхъ уравненій, изъ которыхъ n уравненій фигуръ, для всѣхъ отдѣльныхъ треугольниковъ, и одно базисное уравненіе. Взамѣнъ совмѣстнаго рѣшенія $n+1$ уравненій, можно, безъ всякаго ущерба точности результатовъ, поступить слѣдующимъ образомъ: сперва уравнять всѣ отдѣльные треугольники (что, какъ уже извѣстно, не представляетъ въ сущности никакого труда, потому что уравниваніе сводится къ раздѣленію ошибки каждаго треугольника на три равныя части) и затѣмъ рѣшить только одно базисное условное уравненіе. Послѣднее должно быть выполнено такъ, чтобы новыя поправки угловъ не нарушили уравненныхъ уже суммъ угловъ отдѣльныхъ треугольниковъ; это легко сдѣлать, если, означивъ новыя

---

*) Желающимъ ближе ознакомиться съ подробностями уравниванія тріангуляцій можно посовѣтовать изучать отчеты большихъ тригонометрическихъ работъ и сочиненія: *Liagre*—Calcul des probabilités et théorie des erreurs, Bruxelles, 1879 и *Wright*—A treatise on the adjustment of observations, New York, 1884.

поправки угловъ каждаго треугольника черезъ x, y и z, поставить условіемъ, чтобы

$$z = -(x + y)$$

Итакъ положимъ, что въ цѣпи изъ n треугольниковъ всѣ углы уже приведены къ суммѣ $180^\circ + \varepsilon$. Базисное условное уравненіе представляется подъ видомъ (см. форм. f, § 116):

$$\Sigma\alpha . x - \Sigma\beta . y + v = 0 \qquad (a)$$

гдѣ α и β суть перемѣны логариѳмовъ синусовъ связывающихъ угловъ, x и y искомыя поправки этихъ угловъ, а v—разность между логариѳмами вычисленной длины основной стороны и ея истинной длины (полученной отъ ближайшаго базиса), т. е.

$$v = lg\, a_1 - lg\, a$$

Поправки x, y и z должны быть найдены подъ условіемъ:

$$\Sigma \left\{x^2 + y^2 + (x + y)^2\right\} = \text{minimum} \qquad (b)$$

Диффеенцируя уравненія (a) и (b), получимъ:

$$\Sigma\alpha\, dx - \Sigma\beta\, dy = 0$$

$$\Sigma\,(2x + y)\, dx + \Sigma\,(x + 2y)\, dy = 0$$

Если умножить первое изъ этихъ уравненій на нѣкоторое число A и произведеніе сложить со вторымъ уравненіемъ, то, по неопредѣленности числа A, величины dx и dy въ полученной суммѣ можно считать совершенно произвольными, и, слѣдовательно, она удовлетворится не иначе, какъ положивъ:

$$2x + y = A . \alpha$$

$$x + 2y = -A . \beta$$

Откуда

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} A\,(2\alpha + \beta) \\ y &= -\frac{1}{3} A\,(\alpha + 2\beta) \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Подставивъ теперь эти x и y для всѣхъ треугольниковъ цѣпи въ условное уравненіе (a), получимъ:

$$\sum \alpha . \frac{1}{3} A\,(2\alpha + \beta) + \sum \beta . \frac{1}{3} A\,(\alpha + 2\beta) + v = 0$$

или:

$$A \cdot \sum \frac{1}{3} \{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2\} + v = 0$$

откуда, вводя обозначеніе, принятое въ § 44, формула (40):

$$A = -\frac{v}{\Sigma\mathfrak{S}}$$

Подставивъ это значеніе для A въ формулы (c) и вспоминая, что $z = -(x + y)$, получимъ наконецъ слѣдующія поправки всѣхъ трехъ угловъ каждаго треугольника:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{v}{3\Sigma\mathfrak{S}}\,(2\alpha + \beta) \\ y &= +\frac{v}{3\Sigma\mathfrak{S}}\,(\alpha + 2\beta) \\ z &= +\frac{v}{3\Sigma\mathfrak{S}}\,(\alpha - \beta) \end{aligned}\right\} \qquad (90)$$

гдѣ $v = lg\, a_1 - lg\, a$, $\mathfrak{S} = \frac{1}{3}\{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2\}$, а α и β—перемѣны логариѳмовъ синусовъ связывающихъ угловъ при измѣненіи самихъ угловъ на $1''$.

Для повѣрки вычисленія служитъ формула:

$$\Sigma\,(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{v^2}{\Sigma\mathfrak{S}} \qquad (91)$$

Числовой примѣръ. На чертежѣ 182 изображена часть перво-классной тріангуляціи С.-Петербургской губерніи между стороною Борницы—Гатчино и Молосковицкимъ базисомъ.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ, заключающей всѣ данныя для послѣдующаго вычисленія, приведенные углы (т. е. наблюденные углы, исправленные приведеніями къ центрамъ) исправлены сперва за ошибки треугольниковъ и приведены къ плоскимъ, т. е. къ угламъ каждаго треугольника придана просто треть разности между 180° и суммою угловъ соотвѣтствующаго треугольника, и съ этими плоскими углами вычислены всѣ связывающія стороны, исходя изъ основной стороны *Борницы—Гатчино*, логариѳмъ которой (въ саженяхъ) равенъ 3.851 1110.

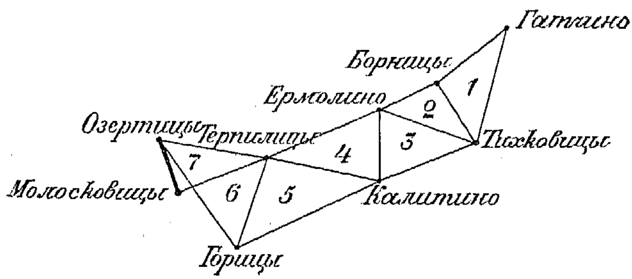
Вычисленіе произведено семизначными логариѳмами съ сохраненіемъ восьмого знака, получаемаго интерполированіемъ; попутно выписывались изъ таблицъ и перемѣны логариѳмовъ синусовъ связывающихъ угловъ, т. е. величины β и α.

Названія точекъ.	Приведенные углы.	Плоскіе углы.	β, α и $\mathfrak{S}$	Поправки y, z и x. (90)	(92)	(93)
Тихковицы . . .	48°47′59″.25	56″.98	+18.4	−1″.14	−1″.36	−1″.12
Борницы	94 10 24 .16	21 .88		−0 .17	0	0
Гатчино	37 1 43 .41	41 .14	+27.9	+1 .31	+1 .36	+1 .12
	180 0 6 .82		1087			
Ермолино	46 46 29 .40	28 .45	+19.8	−0 .67	−0 .53	−1 .12
Тихковицы . . .	38 18 30 .88	29 .93		+0 .38	0	0
Борницы	94 55 2 .58	1 .62	− 1.8	+0. 29	+0 .53	+1 .12
	180 0 2 .86		240			
Калитино	70 22 1 .08	3 .93	+ 7.5	−0 .72	−0 .98	−1 .12
Ермолино	70 21 20 .35	23 .19		−0 .32	0	0
Тихковицы . . .	39 16 30 .04	32 .88	+25.8	+1 .04	+0 .98	+1 .12
	179 59 51 .47		610			
Терпилицы . . .	35 12 36 .49	35 .66	+29.9	−1 .21	−1 .13	−1 .12
Калитино	76 53 5 .02	4 .19		+0 .38	0	0
Ермолино	67 54 20 .98	20 .15	+ 8.6	+0 .83	+1 .13	+1 .12
	180 0 2 .49		817			
Горицы	47 23 59 .38	59 .28	+19.4	−1 .19	−1 .41	−1 .12
Терпилицы . . .	96 19 57 .39	57 .28		−0 .16	0	0
Калитино	36 16 3 .54	3 .44	+28.7	+1 .35	+1 .41	+1 .12
	180 0 0 .31		1171			
Озертицы	44 57 3 .50	2 .39	+21.1	− 0.81	−0 .73	−1 .12
Терпилицы . . .	55 2 51 .06	49 .95		+0 .31	0	0
Горицы	80 0 8 .77	7 .66	+ 3.7	+0 .50	+0 .73	+1 .12
	180 0 3 .33		358			
Молосковицы . .	90 28 30 .33	27 .59	− 0.1	−0 .66	−1 .10	−1 .12
Озертицы	60 11 59 .79	57 .06		−0 .66	0	0
Терпилицы . . .	29 19 38 .08	35 .35	+37.5	+1 .32	+1 .10	+1 .12
	180 0 8 .20		935			

Логариѳмъ базиса *Озертицы—Молосковицы* по вычисленію получается 3.663 0752.1, тогда какъ логариѳмъ истинной длины базиса равенъ 3.663 1028, слѣдовательно, въ данномъ случаѣ $v = -275.9$; $\Sigma\mathfrak{S} = 5218$, поэтому

$$\frac{v}{3\Sigma\mathfrak{S}} = -0.0176$$

Поправки угловъ, вычисленныя по формуламъ (90), даны въ столбцѣ, озаглавленномъ y, z и x (въ порядкѣ угловъ каждаго треугольника).



Черт. 182.

Повѣрка по формулѣ (91):

$$\Sigma(x^2 + y^2 + z^2) = 14.60$$

$$\frac{v^2}{\Sigma\mathfrak{S}} = 14.59$$

Легко убѣдиться, что съ углами, исправленными вычисленными поправками, не будетъ болѣе разногласія, и для базиса получится величина, согласная съ измѣреніемъ, въ предѣлахъ точности логариѳмическихъ вычисленій.

Главная работа при уравниваніи цѣпи между двумя основными сторонами заключается въ вычисленіи поправокъ угловъ по формуламъ (90). Для уменьшенія труда прибѣгаютъ иногда къ приближеннымъ пріемамъ, не дающимъ уже такихъ поправокъ, чтобы сумма ихъ квадратовъ была наименьшею, но зато ведущимъ къ цѣли кратчайшимъ путемъ. Вотъ два такихъ пріема.

1) Такъ какъ промежуточные углы вовсе не входятъ въ вычисленіе конечной стороны, то можно вовсе не мѣнять ихъ и исправлять только связывающіе углы всѣхъ треугольниковъ цѣпи; но чтобы не нарушать ранѣе уравненныхъ суммъ, уже приведенныхъ къ 180°, поправки связывающихъ угловъ въ каждомъ треугольникѣ вычисляются по формулѣ:

$$x = -y = -(\alpha + \beta) \cdot \frac{v}{\Sigma(\alpha + \beta)^2} \tag{92}$$

2) Если считать поправки связывающихъ угловъ во всѣхъ треугольникахъ цѣпи равными, то онѣ получаются по формулѣ:

$$x = -y = -\frac{v}{\Sigma(\alpha + \beta)} \tag{93}$$

Значеніе буквъ здѣсь то же, что и въ формулахъ (90). Поправки, вычисленныя по такимъ упрощеннымъ формуламъ, даны въ предпослѣднемъ и послѣднемъ столбцахъ предъидущей таблицы. Какія бы системы поправокъ введены ни были, тріангуляція будетъ уравнена, что легко повѣрить непосредственными вычисленіями, но нѣтъ никакого сомнѣнія, что всего разумнѣе вычислять поправки по формуламъ (90), основаннымъ на способѣ наименьшихъ квадратовъ. Формулу (92) и особенно (93) можно рекомендовать только для уравниванія второклассныхъ цѣпей треугольниковъ, связывающихъ какія нибудь стороны треугольниковъ первоклассныхъ.

Для приведеннаго примѣра сумма квадратовъ поправокъ всѣхъ угловъ, вычисленныхъ по формуламъ (90), равна 14.60, тогда какъ по формуламъ (92) и (93) эта же сумма оказывается 16.10 и 17.56, не смотря на то, что по этимъ послѣднимъ формуламъ поправки промежуточныхъ угловъ равны нулямъ.

Если въ тріангуляціи имѣется не два, а нѣсколько базисовъ или основныхъ сторонъ *), то обыкновенно уравниваютъ

---

*) Разногласія между результатами вычисленій и непосредственныхъ измѣреній базисовъ служатъ одною изъ надежнѣйшихъ данныхъ для сужденія о точности тріангуляцій вообще. См. *Ferrero*—Rapport sur les triangulations, Florence, 1895. Этотъ мемуаръ, составляющій приложеніе къ Отчету Международнаго Геодезическаго Союза, вообще весьма поучителенъ, особенно въ отношеніи статистическихъ свѣдѣній.

каждую цѣпь между двумя ближайшими базисами или основными сторонами отдѣльно, по вышеобъясненному способу и формуламъ (90); для совмѣстнаго же уравниванія нѣсколькихъ базисовъ (или основныхъ сторонъ) можно пользоваться формулами, выведенными *Струве* (Дуга Меридіана, I, 161 — 165), или формулами, предложенными нашимъ геодезистомъ *Обломіевскимъ* (Записки В. Т. О. Главнаго Штаба, L, 9—14).

125. Центральная система. Въ тригонометрическихъ сѣтяхъ и даже цѣпяхъ (черт. 26) весьма часто встрѣчаются системы треугольниковъ, расположенныхъ вокругъ одной общей вершины; такія системы называются *центральными*. Если система состоитъ изъ n треугольниковъ, то, даже взятая отдѣльно, она имѣетъ $n+1$ условныхъ уравненій, изъ которыхъ n уравненій фигуръ, по числу треугольниковъ, и одно уравненіе полюса. Взамѣнъ совмѣстнаго рѣшенія всѣхъ $n+1$ уравненій, можно, безъ всякаго ущерба для точности результатовъ, примѣнить здѣсь слѣдующій упрощенный пріемъ уравниванія:

Сперва суммы угловъ во всѣхъ треугольникахъ приводятся къ 180° простымъ дѣленіемъ разностей $A+B+C-180°$ на три равныя части. Съ этими плоскими углами, исходя изъ какой нибудь связывающей стороны a, вычисляются всѣ прочія. Разногласіе между вычисленною связывающею стороною (a_1) и принятою первоначально (a) даетъ условное уравненіе, совершенно подобное базисному, т. е. такое:

$$\Sigma\, \alpha.x - \Sigma\, \beta.y + v = 0 \qquad (a)$$

гдѣ α и β — перемѣны логариѳмовъ синусовъ связывающихъ угловъ, x и y—искомыя поправки соотвѣтствующихъ угловъ, а

$$v = lg\, a_1 - lg\, a$$

Поправки промежуточныхъ угловъ, т. е., въ данномъ случаѣ, угловъ около центральной точки (полюса), должны удовлетворять уравненіямъ:

$$z = -(x+y)$$

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 360° - \Sigma\, C = -v_1 \qquad (b)$$

Первое уравненіе необходимо, чтобы сумма угловъ въ каждомъ треугольникѣ, разъ уже приведенная къ 180°, не измѣнилась, а второе, чтобы сумма сферическихъ угловъ $C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ около полюса была равна 360°.

Уравненія (a) и (b) должны быть рѣшены подъ условіемъ:

$$\Sigma\left\{x^2 + y^2 + (x+y)^2\right\} = \text{minimum} \qquad (c)$$

Дифференцируя уравненія (a), (b) и (c), получаемъ:

$$\Sigma\,\alpha\,.\,dx - \Sigma\,\beta\,.\,dy = 0$$

$$\Sigma\,dx + \Sigma\,dy = 0$$

$$\Sigma\,(2x+y)\,dx + \Sigma\,(x+2y)\,dy = 0$$

Если умножить первое и второе изъ этихъ уравненій соотвѣтственно на неопредѣленныя пока числа A и B и сложить съ третьимъ уравненіемъ, то по неопредѣленности чиселъ A и B величины dx и dy въ полученной суммѣ можно считать совершенно произвольными, и потому она удовлетворится не иначе, какъ положивъ въ каждомъ треугольникѣ:

$$2x + y = A\alpha + B$$

$$x + 2y = -A\beta + B$$

Откуда

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{3}\left\{A\,(2\alpha+\beta) + B\right\} \\ y &= -\tfrac{1}{3}\left\{A\,(\alpha+2\beta) - B\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

Подставивъ теперь эти x и y для всѣхъ треугольниковъ системы въ условныя уравненія (a) и (b) и вводя величину $\mathfrak{S}$ (см. § 44), получимъ:

$$A\,\Sigma\,\mathfrak{S} - \tfrac{1}{3}\,B\,\Sigma\,(\beta-\alpha) + v = 0$$

$$\tfrac{1}{3}\,A\,\Sigma\,(\beta-\alpha) - \tfrac{2}{3}\,B\,.\,n + v_1 = 0$$

Рѣшеніемъ этихъ двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными A и B легко найти, что

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{-2n.v + v_1\Sigma(\beta-\alpha)}{2n\Sigma\mathfrak{S} - \frac{1}{3}\{\Sigma(\beta-\alpha)\}^2} \\ B &= \frac{3v_1\Sigma\mathfrak{S} - v\Sigma(\beta-\alpha)}{2n\Sigma\mathfrak{S} - \frac{1}{3}\{\Sigma(\beta-\alpha)\}^2} \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

гдѣ

$$v = lg\,a_1 - lg\,a$$

$$v_1 = \Sigma C - 360^\circ \qquad \text{и } \mathfrak{S} = \frac{1}{3}\{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha+\beta)^2\}$$

Вспоминая, что $z = -(x+y)$, получимъ наконецъ слѣдующія поправки всѣхъ трехъ угловъ каждаго треугольника:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}\{A(2\alpha+\beta)+B\} \\ y &= -\frac{1}{3}\{A(\alpha+2\beta)-B\} \\ z &= \frac{1}{3}\{A(\beta-\alpha)-2B\} \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

въ которыхъ A и B вычисляются по формуламъ (94). Для повѣрки вычисленія полезно пользоваться формулою:

$$\Sigma(x^2+y^2+z^2) = -Av + Bv_1 \tag{96}$$

Числовой примѣръ. На черт. 183 изображена огромная центральная система, покрывающая бо̀льшую часть Ирландіи. Въ нижеслѣдующей таблицѣ приведены всѣ данныя для уравнительнаго вычисленія, причемъ за исходную сторону взята сторона Keeper-Baurtregaum, логариомъ которой въ саженяхъ равенъ 4.759 2323.

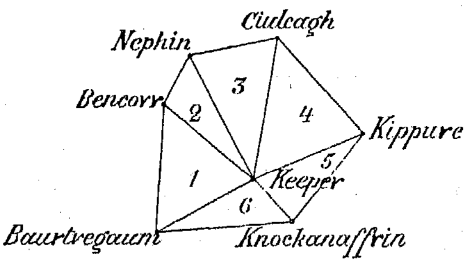
Названія точекъ и сферич. избытки.	Приведенные углы.	Плоскіе углы.	β, α и $\mathfrak{S}$	Поправки y, z и x.
Bencorr	52°16′22″.32	10″.10	+16.3	+0″.22
Keeper	68 58 8 .90	56 .67	—	+0 .02
Baurtregaum	58 46 5 .46	53 .23	+12.8	−0 .24
ε = 38″.36 . . .	180 0 36 .68		425	

Названія точекъ и сферич. избытки.	Приведенные углы.	Плоскіе углы.	β, α и $\mathfrak{S}$	Поправки y, z и x.
Nephin	54 38 27 .77	22 .15	+15.0	+0 .12
Keeper	22 47 43 .81	38 .20	—	−0 .07
Bencorr	102 34 5 .26	59 .65	− 4.7	−0 .05
$\varepsilon = 20.60$ . . .	180 0 16 .84		118	
Cuilcagh	68 22 0 .37	46 .40	+ 8.4	+0 .10
Keeper	37 32 47 .29	33 .31	—	+0 .03
Nephin	74 5 54 .27	40 .29	+ 6.0	−0 .13
$\varepsilon = 40.12$ . . .	180 0 41 .93		105	
Kippure	69 17 33 .41	17 .24	+ 8.0	+0 .15
Keeper	58 48 2 .80	46 .63	—	+0 .08
Cuilcagh	51 55 12 .30	56 .13	+16.5	−0 .23
$\varepsilon = 49.03$ . . .	180 0 48 .51		312	
Knockanaffrin	81 34 25 .36	15 .48	+ 3.1	+0 .21
Keeper	68 45 22 .28	12 .39	—	+0 .21
Kippure	29 40 42 .02	32 .13	+37.0	−0 .42
$\varepsilon = 22.50$ . . .	180 0 29 .66		996	
Baurtregaum	25 57 17 .09	10 .96	+43.3	+0 .53
Keeper	103 7 54 .92	48 .80	—	−0 .10
Knockanaffrin	50 55 6 .36	0 .24	+17.1	−0 .43
$\varepsilon = 20.88$ . . .	180 0 18 .37		1938	

По вычисленію логариѳмъ стороны Keeper-Baurtregaum оказывается 4.759 2384.4, слѣдовательно

$$v = +61.4;\ \Sigma\mathfrak{S} = 3894 \text{ и } \Sigma(\beta - \alpha) = +9.4$$

Приведенные сферическіе углы около полюса суть:



Черт. 183.

68°	58′	9.″46
22	47	45. 07
37	32	46. 68
58	48	2. 97
68	45	19. 89
103	7	55. 76
359	59	59. 83

$$v_1 = \Sigma C - 360° = -0.''17;\ n = 6$$

Съ этими данными по формуламъ (94) получаемъ:

$$A = -0.0158 \qquad B = -0.0549$$

Вычисленныя по формуламъ (95) поправки угловъ x, y и z помѣщены въ предъидущей таблицѣ, въ послѣднемъ столбцѣ.

Повѣрка по формулѣ (96):

$$\Sigma(x^2 + y^2 + z^2) = +0.978$$

$$-Av + Bv_1 = +0.979$$

126. Геодезическій четыреугольникъ. Четыреугольникъ съ двумя діагоналями представляетъ фигуру, особенно часто встрѣчающуюся на тріангуляціяхъ; между тѣмъ уравниваніе его по общимъ правиламъ, т. е. при помощи рѣшенія всѣхъ его четырехъ условныхъ уравненій (трехъ уравненій фигуръ и одного уравненія полюса), требуетъ не менѣе 3-хъ часовъ времени. Нижеслѣдующій пріемъ уравниванія, приводящій къ тѣмъ же результатамъ и представляющій въ сущности предварительную выключку неизвѣстныхъ, позволяетъ уравнять углы всякаго четыреугольника въ одинъ часъ.

Означимъ восемь угловъ четыреугольника послѣдовательными цифрами, какъ показано на черт. 169, а искомыя поправки ихъ тѣми же цифрами въ скобкахъ.

Называя ошибки треугольниковъ OBC, BCA и CAO соотвѣтственно черезъ v_1, v_2 и v_3, имѣемъ слѣдующія три условныя уравненія угловъ:

$$(1) + (2) + (3) + (4) \qquad + v_1 = 0$$

$$(3) + (4) + (5) + (6) \qquad + v_2 = 0$$

$$(5) + (6) + (7) + (8) \quad + v_3 = 0$$

изъ которыхъ по общимъ правиламъ получаются нормальныя уравненія:

$$4A + 2B \qquad + v_1 = 0$$

$$2A + 4B + 2C + v_2 = 0$$

$$2B + 4C + v_3 = 0$$

Рѣшеніе ихъ даетъ:

$$A = \frac{1}{8}(-3v_1 + 2v_2 - v_3)$$

$$B = \frac{1}{8}(2v_1 - 4v_2 + 2v_3)$$

$$C = \frac{1}{8}(-v_1 + 2v_2 - 3v_3)$$

Поправки же угловъ получаются по формуламъ:

$$(1) = (2) = \frac{1}{8}(-3v_1 + 2v_2 - v_3) = -\frac{1}{4}v_1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}v_1 - v_2 + \frac{1}{2}v_3\right)$$

$$(3) = (4) = \frac{1}{8}(-v_1 - 2v_2 + v_3) = -\frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}v_1 - v_2 + \frac{1}{2}v_3\right)$$

$$(5) = (6) = \frac{1}{8}(v_1 - 2v_2 - v_3) = -\frac{1}{4}v_3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}v_1 - v_2 + \frac{1}{2}v_3\right)$$

$$(7) = (8) = \frac{1}{8}(-v_1 + 2v_2 - 3v_3) = -\frac{1}{4}v_3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}v_1 - v_2 + \frac{1}{2}v_3\right)$$

Или, означая для краткости

$$u = \frac{1}{2}v_1 - v_2 + \frac{1}{2}v_3$$

будетъ:

$$\left.\begin{aligned} (1) &= (2) = -\frac{v_1 + u}{4} \\ (3) &= (4) = -\frac{v_1 - u}{4} \\ (5) &= (6) = -\frac{v_3 - u}{4} \\ (7) &= (8) = -\frac{v_3 + u}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (98)$$

Введя полученныя по этимъ формуламъ поправки, составляемъ условное уравненіе полюса. Если означить новыя поправки тѣхъ же восьми угловъ соотвѣтственно черезъ x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4 и y_4, то это условное уравненіе (если взять за полюсъ воображаемую точку пересѣченія діагоналей) выразится такъ:

$$\Sigma \alpha . x - \Sigma \beta . y + v = 0 \qquad (a)$$

Чтобы не разстроить уже уравненные за угловыя условія треугольники, поправки x и y должны еще удовлетворять уравненіямъ:

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 0$$
$$x_2 + y_2 + x_3 + y_3 = 0$$
$$x_3 + y_3 + x_4 + y_4 = 0$$

Полагая для краткости

$$\begin{array}{l|l} x_1 + y_1 = +2t & x_1 - y_1 = 2t_1 \\ x_2 + y_2 = -2t & x_2 - y_2 = 2t_2 \\ x_3 + y_3 = +2t & x_3 - y_3 = 2t_3 \\ x_4 + y_4 = -2t & x_4 - y_4 = 2t_4 \end{array}$$

предъидущія уравненія дадутъ:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = +t + t_1 & y_1 = +t - t_1 \\ x_2 = -t + t_2 & y_2 = -t - t_2 \\ x_3 = +t + t_3 & y_3 = +t - t_3 \\ x_4 = -t + t_4 & y_4 = -t - t_4 \end{array}\right\} \tag{102}$$

Подставляя эти значенія въ (a), получимъ:

$$\alpha_1 (t + t_1) + \alpha_2 (-t + t_2) + \alpha_3 (t + t_3) + \alpha_4 (-t + t_4) -$$
$$- \beta_1 (t - t_1) - \beta_2 (-t - t_2) - \beta_3 (t - t_3) - \beta_4 (-t - t_4) + v = 0$$

или, собирая члены съ t, t_1, t_2 ....:

$$\{(\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2) + (\alpha_3 - \beta_3) - (\alpha_4 - \beta_4)\} t +$$
$$+ (\alpha_1 + \beta_1) t_1 + (\alpha_2 + \beta_2) t_2 + (\alpha_3 + \beta_3) t_3 + (\alpha_4 + \beta_4) t_4 + v = 0 \quad (b)$$

Но такъ какъ уравненіе (a) должно быть рѣшено подъ условіемъ, чтобы сумма квадратовъ поправокъ была наименьшею, то, согласно принятымъ обозначеніямъ, имѣемъ:

$$(t + t_1)^2 + (t - t_1)^2 + (t - t_2)^2 + (t + t_2)^2 + (t + t_3)^2 +$$
$$+ (t - t_3)^2 + (t - t_4)^2 + (t + t_4)^2 = \text{minimum}$$

или, послѣ возвышенія въ квадратъ и приведеній:

$$4t^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 = \text{minimum} \qquad (c)$$

Дифференцируя уравненія (b) и (c), получимъ:

$$\{(\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2) + (\alpha_3 - \beta_3) - (\alpha_4 - \beta_4)\} \,.\, dt +$$
$$+ (\alpha_1 + \beta_1)\, dt_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\, dt_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\, dt_3 + (\alpha_4 + \beta_4)\, dt_4 = 0$$
$$4t \,.\, dt + t_1\, dt_1 + t_2\, dt_2 + t_3\, dt_3 + t_4\, dt_4 = 0$$

Умножая первое изъ этихъ уравненій на неопредѣленное пока число A и сравнивая коэффиціенты у dt, dt_1, dt_2, dt_3 и dt_4, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} 4t &= A\,\{(\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2) + (\alpha_3 - \beta_3) - (\alpha_4 - \beta_4)\} \\ t_1 &= A\,(\alpha_1 + \beta_1) \qquad\qquad t_3 = A\,(\alpha_3 + \beta_3) \\ t_2 &= A\,(\alpha_2 + \beta_2) \qquad\qquad t_4 = A\,(\alpha_4 + \beta_4) \end{aligned}\right\} \qquad (101)$$

а послѣ подстановки этихъ величинъ въ условное уравненіе (b):

$$A \cdot \frac{1}{4}\,\{(\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2) + (\alpha_3 - \beta_3) - (\alpha_4 - \beta_4)\}^2 +$$
$$+ A\,\Sigma\,(\alpha + \beta)^2 + v = 0$$

откуда

$$A = \frac{-v}{\frac{1}{4}\,\{(\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2) + (\alpha_3 - \beta_3) - (\alpha_4 - \beta_4)\}^2 + \Sigma\,(\alpha + \beta)^2} \qquad (100)$$

Вставляя наконецъ это A въ уравненія (101), легко вычислить t, t_1 .... t_4, а затѣмъ по формуламъ (102) и искомыя поправки x и y всѣхъ восьми угловъ четыреугольника.

Такимъ образомъ порядокъ уравниванія геодезическаго четыреугольника заключается въ слѣдующемъ:

Сперва находятъ ошибки v_1, v_2 и v_3 трехъ треугольниковъ по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= (1 + 2 + 3 + 4) - (180^\circ + \varepsilon_1) \\ v_2 &= (3 + 4 + 5 + 6) - (180^\circ + \varepsilon_2) \\ v_3 &= (5 + 6 + 7 + 8) - (180^\circ + \varepsilon_3) \end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

гдѣ *1*, *2* .... *8* данные приведенные углы, а ε сферическіе избытки треугольниковъ. Затѣмъ по формуламъ (98) вычисляютъ вспомогательную величину u и предварительныя поправки (*1*), (*2*) .... (*8*) всѣхъ восьми угловъ.

Придавъ поправки (*1*), (*2*) .... къ угламъ *1*, *2* ...., вычисляютъ логариѳмы ихъ синусовъ, и, попутно, берутъ изъ таблицъ величины α и β.

Съ этими величинами вычисляютъ:

$$\left.\begin{aligned} v = \{&lg\,sin(1+(1))+lg\,sin(3+(3))+\\ &+lg\,sin(5+(5))+lg\,sin(7+(7))\}-\\ -\{&lg\,sin(2+(2))+lg\,sin(4+(4))+\\ &+lg\,sin(6+(6))+lg\,sin(8+(8))\}\end{aligned}\right\} \qquad (99)$$

и число A по формулѣ (100).

Наконецъ вычисляютъ вспомогательныя величины t, t_1, t_2, t_3, t_4 по формуламъ (101) и добавочныя поправки x и y всѣхъ восьми угловъ по формуламъ (102).

Числовой примѣръ. Возьмемъ геодезическій четыреугольникъ, уже уравненный по общему способу въ § 121 (черт. 180):

	Приведенные углы	Углы, исправл. перв. поправками	$lg\,sin$	α и β	Вторыя поправки
1	48°33′29.″58	29.″19	9.874 8454	+ 18.6	− 0.″69
2	30 5 42. 94	42. 55	9.700 2169	+ 36.3	+ 0. 68
3	41 46 55. 76	56. 59	9.823 6720	+ 23.6	− 0. 45
4	59 33 52. 07	52. 90	9.935 6089	+ 12.4	+ 0. 45
5	29 47 15. 94	16. 80	9.696 1748	+ 36.7	− 0. 69
6	48 51 53. 83	54. 69	9.876 8895	+ 18.4	+ 0. 68
7	60 2 5. 96	5. 60	9.937 6832	+ 12.1	− 0. 45
8	41 18 43 89	43. 53	9.819 6493	+ 23.9	+ 0. 45

Ошибки треугольниковъ *ПРЗ*, *РЗФ* и *ЗФП* суть соотвѣтственно:

$$v_1 = -0.''87 \qquad v_2 = -3.''38 \qquad v_3 = -1.''00$$

Слѣдовательно по формуламъ (98.) имѣемъ:

$$u = -0.44 + 3.38 - 0.50 = +2.''44$$

$$(1) = (2) = -0.''39$$

$$(3) = (4) = +0.83$$

$$(5) = (6) = +0.86$$

$$(7) = (8) = -0.36$$

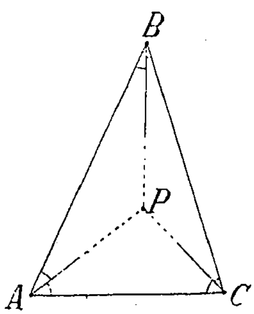
Секунды угловъ, исправленныхъ этими поправками, помѣщены въ третьемъ столбцѣ предъидущей таблицы и для этихъ исправленныхъ угловъ взяты логариѳмы синусовъ и ихъ перемѣны, помѣщенные въ четвертомъ и пятомъ столбцахъ. Далѣе, по формуламъ (99), (100) и (101) имѣемъ:

$$v = +0.000\,0108 \qquad lg\,A = {}_n8.0968 \qquad t = -0.''004$$

$$t_1 = -0.''686 \quad t_2 = -0.''450 \quad t_3 = -0''.689 \quad t_4 = -0.''450$$

Легко видѣть, что послѣ введенія вторыхъ поправокъ, вычисленныхъ по формуламъ (102) и помѣщенныхъ въ послѣднемъ столбцѣ таблицы, окончательно уравненные углы, въ предѣлахъ точности вычисленій, т. е. до 0.''01, равны угламъ, полученнымъ въ § 121 (стр. 442).

127. Уравниваніе сторонъ. Положимъ, что уединенная точка P (черт. 184) наблюдалась съ трехъ вершинъ первокласснаго треугольника ABC, который уже окончательно вычисленъ, такъ что ни его углы A, B и C, ни стороны a, b и c не подлежатъ исправленію. Полученные изъ наблюденій на уединенную точку P углы $1 = CAP$, $2 = ABP$ и $3 = ACP$ не входили въ общее уравниваніе сѣти, поэтому, послѣ вычисленія отдѣльныхъ треугольниковъ BCP, CAP и ABP, для общихъ ихъ сторонъ AP, BP и CP получатся, вообще говоря, различныя величины. Условное уравненіе можно составить сравненіемъ



Черт. 184.

любой изъ этихъ сторонъ; возьмемъ, напримѣръ, сторону AP. Означивъ избытки треугольниковъ ACP и ABP черезъ ε_1 и ε_2, имѣемъ по чертежу:

$$\text{Изъ } \triangle\text{-ка } ACP \ldots AP = b \cdot \frac{\sin\left(3 - \frac{1}{3}\varepsilon_1\right)}{\sin\left(180^\circ + \varepsilon_1 - (1+3) - \frac{1}{3}\varepsilon_1\right)}$$

$$\text{Изъ } \triangle\text{-ка } ABP \ldots AP = c \cdot \frac{\sin\left(2 - \frac{1}{3}\varepsilon_2\right)}{\sin\left(180^\circ + \varepsilon_2 - (A - 1 + 2) - \frac{1}{3}\varepsilon_2\right)}$$

Откуда должно быть

$$b.\sin\left(3 - \frac{1}{3}\varepsilon_1\right) \cdot \sin\left(A - 1 + 2 - \frac{2}{3}\varepsilon_2\right) =$$

$$= c.\sin\left(2 - \frac{1}{3}\varepsilon_2\right) \cdot \sin\left(1 + 3 - \frac{2}{3}\varepsilon_1\right)$$

На самомъ дѣлѣ отъ ошибокъ наблюденій полнаго равенства существовать не будетъ, и, взявъ логариѳмы обѣихъ частей, получимъ:

$$lg\, b + lg\sin\left(3 - \frac{1}{3}\varepsilon_1\right) + lg\sin\left(A - 1 + 2 - \frac{2}{3}\varepsilon_2\right) -$$

$$- lg\, c - lg\sin\left(2 - \frac{1}{3}\varepsilon_2\right) - lg\sin\left(1 + 3 - \frac{2}{3}\varepsilon_1\right) = v \qquad (103)$$

гдѣ v—ошибка стороны, выраженная въ десятичныхъ знакахъ логариѳма. Называя, для краткости, перемѣны логариѳмовъ синусовъ угловъ 3, $A - 1 + 2$, 2 и $1 + 3$ буквами α, β, γ и δ, а искомыя поправки угловъ соотвѣтствующими цифрами въ скобкахъ, получимъ слѣдующее условное уравненіе:

$$\alpha(3) - \beta(1) + \beta(2) - \gamma(2) - \delta(1) - \delta(3) + v = 0$$

или

$$-(\beta + \delta)(1) + (\beta - \gamma)(2) + (\alpha - \delta)(3) + v = 0 \qquad (a)$$

Откуда по общей теоріи рѣшенія условныхъ уравненій имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}(1) &= -(\beta+\delta).\,K\\(2) &= \quad(\beta-\gamma).\,K\\(3) &= \quad(\alpha-\delta).\,K\\K &= -\frac{v}{(\beta+\delta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2}\end{aligned}\right\}\qquad(104)$$

Если уединенная точка наблюдалась не съ трехъ, а со многихъ, вообще съ n точекъ, то придется составить $n-2$ уравненій вида (a) и рѣшить ихъ по общимъ правиламъ рѣшенія многихъ совмѣстныхъ условныхъ уравненій.

Необходимо замѣтить, что если на одной изъ точекъ, напримѣръ, на A измѣренъ не только уголъ $1 = CAP$, но еще и уголъ BAP, то, прежде чѣмъ приступать къ составленію условныхъ уравненій, надо привести сумму ихъ къ величинѣ угла $A = BAC$ (т. е. раздѣлить ошибку пополамъ) и затѣмъ уже дѣйствовать по предъидущему, или же ввести отдѣльное условное уравненіе суммы.

Имѣя въ виду малую точность наблюденій на уединенныя точки (обыкновенно меньшимъ числомъ пріемовъ) и то обстоятельство, что положеніе уединенной точки не служитъ основаніемъ дальнѣйшихъ вычисленій, многіе уравниваютъ ихъ, не обращая вниманія на сферическіе избытки, отчего уравненіе (103) пріобрѣтаетъ болѣе простой видъ; при большомъ числѣ такихъ точекъ это упрощеніе имѣетъ практическое значеніе. Кромѣ того, для уравниванія направленій на уединенныя точки нерѣдко прибѣгаютъ къ графическому построенію, объясненному въ § 128.

Числовой примѣръ. Въ трехъ точкахъ первокласснаго треугольника ABC (черт. 184), окончательные элементы котораго суть:

Названіе вершинъ	Сферич. углы	Плоскіе	lg сторонъ въ саж.
A. Троицкая	$64^\circ 43' 51.''74$	$51''.40$	4.049 0100
B. Толбухинъ маякъ .	42 3 30. 94	30 .60	3.918 6940
C. Лисій носъ.	73 12 38. 34	38 .00	4.073 7721
	180 0 1. 02	0.00	

наблюдались углы на уединенную точку P—трубу пароходнаго завода въ Кронштадтѣ, и получено:

$$CAP = 1 = 37^\circ \ 6' \ 41''$$
$$ABP = 2 = 24 \ \ 12 \ \ 57$$
$$ACP = 3 = 47 \ \ 58 \ \ 29$$

Сферическіе избытки треугольниковъ ACP и ABP суть: $\varepsilon_1 = 0.''36$ и $\varepsilon_2 = 0.''39$. Условное уравненіе стороны по формулѣ (103) выходитъ:

$$lg\, AC = 3.918\,6940$$
$$lg\, sin\left(3 - \tfrac{1}{3}\,\varepsilon_1\right) = lg\, sin\, 47^\circ\, 58'\, 28.''88 = 9.870\,9007 \quad \alpha = +\,19.0$$
$$lg\, sin\left(A - 1 + 2 - \tfrac{2}{3}\,\varepsilon_2\right) = lg\, sin\, 51^\circ\, 50'\, 7.''48 = 9.895\,5545 \quad \beta = +\,16.5$$
$$3.685\,1492$$

$$lg\, AB = 4.073\,7721$$
$$lg\, sin\left(2 - \tfrac{1}{3}\,\varepsilon_2\right) = lg\, sin\ 24^\circ 12' 56.''87 = 9.612\,9687 \quad \gamma = +\,46.8$$
$$lg\, sin\left(1 + 3 - \tfrac{2}{3}\,\varepsilon_1\right) = lg\, sin\, 85 \ \ 5 \ \ 9\,.76 = 9.998\,4008 \quad \delta = + \ \ 1.8$$
$$3.685\,1416$$

Здѣсь $v = +\,76$, поэтому по формуламъ (104) получается:

$lg K = {}_n 8.\,6908$, $(1) = +\,0.''90$, $(2) = +\,1.''49$ и $(3) = -\,0.''84$

и исправленные сферическіе углы суть:

$$1 = 37^\circ \ \ 6' \ 41.''90$$
$$2 = 24 \ \ 12 \ \ 58.\ 49$$
$$3 = 47 \ \ 58 \ \ 28.\ 16$$

Нижеслѣдующее окончательное вычисленіе треугольниковъ показываетъ, что смежныя стороны одинаковы, въ предѣлахъ точности логариѳмическихъ вычисленій. Углы при P получены, какъ дополненія суммъ другихъ двухъ угловъ соотвѣтствующихъ треугольниковъ до $180° + \varepsilon$.

	Сфер. углы.	Плоск.	lg сторонъ въ саж.	Вычисленія.
B	17° 50′ 32″.45	32″.36	3.700 8765	9.486 2867
C	25 14 10 .18	10 .09	3.844 3559	4.214 5898
P	136 55 17 .65	17 .55	4.049 0100	9.629 7661
	180 0 0 .28	0 .00	9.834 4202	
C	47 58 28 .16	28. 04	3.791 1923	9.870 8991
A	37 6 41 .90	41 .78	3.700 8765	3.920 2932
P	94 54 50 .30	50 .18	3.918 6940	9.780 5833
	180 0 0 .36	0. 00	9.998 4008	
A	27 37 9 .84	9 .71	3.844 3558	9.666 1392
B	24 12 58 .49	58 .36	3.791 1922	4.178 2166
P	128 9 52 .06	51 .93	4.073 7721	9.612 9756
	180 0 0 .39	0. 00	9.895 5555	

128. Графическое уравниваніе. Если нужно вычислить положеніе уединенной точки, наблюдавшейся изъ n уже уравненныхъ точекъ тріангуляціи, то, при строгомъ примѣненіи способа наименьшихъ квадратовъ, необходимо рѣшить $n - 2$ условныхъ уравненій сторонъ. Вслѣдствіе сложности коэффиціентовъ рѣшеніе этихъ уравненій довольно затруднительно, а между тѣмъ не доставляетъ существеннаго преимущества, потому что уединенныя точки не служатъ основаніемъ дальнѣйшихъ вычисленій, и небольшія погрѣшности въ ихъ положеніи не могутъ имѣть практическаго значенія. Вовсе же не уравнивать ихъ опасно, такъ какъ разности въ вычисленныхъ сторонахъ поведутъ къ сомнѣніямъ при вычисленіи географическихъ координатъ (см. стр. 406). Въ этихъ случаяхъ весьма часто примѣняютъ способъ *графическаго уравниванія*, сущность котораго заключается въ слѣдующемъ:

Съ углами, полученными непосредственно изъ наблюденій (исправленными конечно за приведенія къ центрамъ), вычисляютъ всѣ треугольники, имѣющіе вершинами уединенную точку. Смежныя стороны этихъ треугольниковъ окажутся, вообще говоря, неодинаковыми; по ихъ разностямъ чертятъ въ произвольномъ масштабѣ фигуру погрѣшности; всего удобнѣе начинать построеніе съ наибольшей разности и строить углы обыкновеннымъ транспортиромъ. Отдѣльныя точки пересѣченія сторонъ фигуры погрѣшности изобразятъ разныя положенія уединенной точки, какъ они получаются изъ наблюденій. Далѣе, назначается истинное положеніе точки просто на глазъ такъ, чтобы она заняла нѣкоторое среднее положеніе; при этомъ обыкновенно отбрасываютъ очень удаленныя пересѣченія, происходящія отъ весьма острыхъ засѣчекъ. Наконецъ изъ назначенной точки опускаютъ перпендикуляры на всѣ имѣющіяся направленія и вычисляютъ поправки соотвѣтствующихъ угловъ по формулѣ:

$$k'' = \varkappa \,.\, \frac{p}{s} = [5.3144]\, \frac{p}{s} \tag{105}$$

гдѣ k—поправка угла въ секундахъ, p и s—длины перпендикуляра и соотвѣтствующей стороны, а $\varkappa = 206\,265$. Знакъ поправки угла легко усматривается прямо съ чертежа.

Разности сторонъ, необходимыя для построенія фигуры погрѣшности, можно опредѣлить конечно переходомъ отъ логариөмовъ сторонъ къ числамъ, но еще проще вычислять ихъ по формулѣ:

$$\Delta s = s \,.\, \frac{\Delta\, lg\, s}{M} = [3.3622]\,.\, s \,.\, \Delta\, lg\, s \tag{106}$$

въ которой разность логариөмовъ сторонъ $\Delta\, lg\, s$ выражена въ единицахъ седьмого десятичнаго знака, а разность сторонъ Δs получается въ тѣхъ же единицахъ длины, въ которыхъ выражена общая сторона s; M—модуль Бригговыхъ логариөмовъ.

Разности сторонъ оказываются обыкновенно столь малыми, что чертежъ можно строить въ натуральную величину. Если же придется строить съ уменьшеніемъ, напримѣръ въ 10 разъ, то полнаго уравниванія, вслѣдствіе ошибокъ построенія, можетъ не произойти; тогда съ исправленными углами повторяютъ вычисленіе по предъидущему, послѣ чего новое построеніе уже навѣрно можно будетъ сдѣлать въ натуральную величину. Назначеніе окончательной точки не затрудняетъ опытнаго вычислителя; для неопытнаго же можно посовѣтовать дѣлать построеніе на графленой бумагѣ и опредѣлять положеніе окончательной точки такъ, чтобы прямоугольныя ея координаты равнялись среднимъ ариѳметическимъ изъ соотвѣтствующихъ координатъ всѣхъ точекъ пересѣченія.

Для поясненія разсмотримъ графическое уравниваніе уединенной точки, уравненной по общимъ правиламъ въ § 127. Предварительное вычисленіе треугольниковъ съ помѣщенными тамъ данными даетъ (черт. 184):

		Сферич. углы.	Плоскіе.	lg сторонъ.
$\triangle BCP$	B	17°50′33″.94	33″.85	3.700 8848
	C	25 14 9 .34	9 .25	3.844 3507
	P	136 55 17 .00	16 .90	4.049 0100
		180 0 0 .28	0 .00	
$\triangle CAP$	C	47 58 29 .00	28 .88	3.791 1939
	A	37 6 41 .00	40 .88	3.700 8741
	P	94 54 50 .36	50 .24	3.918 6940
		180 0 0 .36	0 .00	
$\triangle ABP$	A	27 37 10 .74	10 .61	3.844 3605
	B	24 12 57 .00	56 .87	3.791 1862
	P	128 9 52 .65	52 .52	4.073 7721
		180 0 0 .39	0 .00	

Разности логариѳмовъ смежныхъ сторонъ AP, BP и CP оказываются (въ единицахъ седьмого знака):

77, 98 и 107

откуда по формулѣ (106) разности сторонъ будутъ (въ саженяхъ):

0.109 0.157 и 0.124

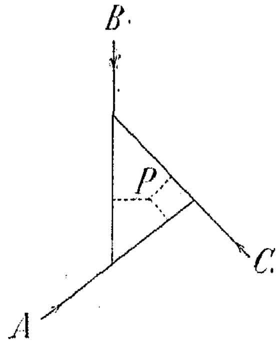
По этимъ тремъ отрѣзкамъ построенъ треугольникъ погрѣшности (черт. 185), внутри котораго назначена точка P; разстоянія ея отъ соотвѣтствующихъ сторонъ оказались (въ саженяхъ):

0.028 0.041 и 0.032

Далѣе, по формулѣ (105) вычислены поправки угловъ

$$(1) = +0''.94 \qquad (2) = +1''.20 \qquad (3) = -1''.32$$

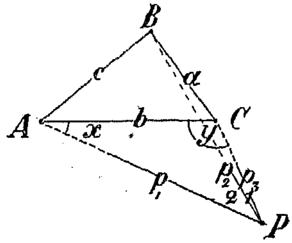
Эти поправки не равны, конечно, поправкамъ, вычисленнымъ въ § 127, но все же разности ихъ невелики; во всякомъ случаѣ легко убѣдиться, что вычисленіе треугольниковъ не представитъ противорѣчій. Вотъ результатъ этого вычисленія:



Черт. 185.

	Углы.	lg разстояній.
$CAP = 1 =$	$37^\circ\ 6'41''.94$	3.791 1914
$ABP = 2 =$	24 12 58 .20	3.844 3563
$ACP = 3 =$	47 58 27 .68	3.700 8767

129. Задача Потенота. Иногда является необходимость опредѣлить точку, въ свое время, при производствѣ тріангуляціи, вовсе не наблюдавшуюся. Такую точку можно, разумѣется, опредѣлить по общимъ правиламъ, т. е. произвести новыя наблюденія не менѣе, какъ на двухъ прежнихъ, а для повѣрки на трехъ и болѣе. Но гораздо проще и скорѣе произвести наблюденія только на одной этой новой точкѣ, именно измѣрить углы между старыми видимыми съ нея тригонометрическими знаками. Такое опредѣленіе представляетъ такъ называемую задачу *Потенота*, весьма часто рѣшаемую графически на мензульной съемкѣ. Здѣсь разсмотрѣно аналитическое рѣшеніе этой задачи сперва на плоскости, а затѣмъ на сферической поверхности.



Черт. 186.

1) Пусть съ точки P (черт. 186) измѣрены углы 1 и 2 на три точки A, B и C прежней, уже вычисленной тріангуляціи. Чтобы имѣть возможность найти разстоянія p_1, p_2 и p_3 точки P отъ A, B и C, достаточно опредѣлить лишь углы $PAC = x$ и $PCA = y$. Изъ треугольника ACP имѣемъ:

$$x + y + 1 + 2 = 180^\circ$$

$$x + 1 = 180^\circ - (y + 2)$$

или

$$\sin(x + 1) = \sin(y + 2) \qquad (a)$$

а изъ четыреугольника $ABCP$, принявъ за полюсъ точку B:

$$\frac{a \cdot p_2 \cdot c}{p_2 \cdot c \cdot a} = \frac{\sin 1}{\sin(C + y)} \cdot \frac{\sin(A + x)}{\sin 2} \cdot \frac{\sin C}{\sin A} = 1$$

или

$$\sin 1 \cdot \sin(A + x) \cdot \sin C = \sin(C + y) \cdot \sin 2 \cdot \sin A \qquad (b)$$

Помноживъ обѣ части уравненія (a) на $\sin A \cdot \sin C$ и вычитая изъ результата ур. (b), получаемъ послѣ сокращеній:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin A \cdot \sin(C - 2)}{\sin C \cdot \sin(A - 1)} \qquad (c)$$

Означивъ теперь вторую часть этого уравненія черезъ $\cot g\, \theta$, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій и замѣны $x + y$ черезъ $180° - (1 + 2)$ легко получить:

$$tg\, \frac{x - y}{2} = tg\,(45° - \theta) \cdot \cot g\, \frac{1 + 2}{2}.$$

Такимъ образомъ для аналитическаго рѣшенія задачи Потенота на плоскости получаемъ слѣдующую систему формулъ:

$$\left.\begin{aligned} \cot g\, \theta &= \frac{\sin A \cdot \sin(C - 2)}{\sin C \cdot \sin(A - 1)} \\ tg\, \frac{x - y}{2} &= tg\,(45° - \theta) \cdot \cot g\, \frac{1 + 2}{2} \\ \frac{x + y}{2} &= 90° - \frac{1 + 2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(107)}$$

Легко видѣть, что рѣшеніе задачи невозможно, когда для $\cot g\, \theta$ получается величина неопредѣленная, т. е. когда данные углы связаны уравненіями:

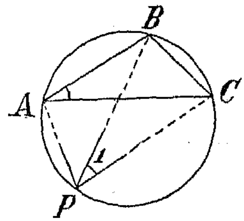
$$\sin A \cdot \sin(C - 2) = 0$$

$$\sin C \cdot \sin(A - 1) = 0$$

Такъ какъ углы A и C, вообще говоря, не нули и не $180°$, то эти уравненія даютъ

$$C = 2 \text{ и } A = 1$$

Изъ черт. 187 понятно, что въ такомъ случаѣ точка P находится на окружности, описанной около треугольника ABC, обстоятельство, извѣстное и изъ графическаго рѣшенія задачи Потенота.



Черт. 187.

Знаки угловъ A, C, x и y зависятъ отъ положенія опредѣляемой точки P относительно треугольника ABC. Формулы (107) выведены изъ чертежа 186, т. е. для случая, когда точка P находится внѣ треугольника ABC, противъ одной изъ его сторонъ. Если P находится внутри треугольника ABC, то знаки угловъ x и y надо считать отрицательными; это однако не измѣнитъ знака θ, потому что въ выраженіи (c) x и y измѣнятъ знаки одновременно. Если же точка P находится внѣ треугольника ABC, но противъ угла (т. е. если точка B оказывается внутри треугольника ACP), то углы A и C надо считать отрицательными: другими словами, для такого случая уголъ θ надо вычислять по формулѣ

$$\cot \theta = \frac{\sin A \,.\, \sin (C + 2)}{\sin C \,.\, \sin (A + 1)}$$

Числовой примѣръ. Въ точкѣ P наблюдены углы (черт. 186):

$$1 = 5^\circ 59' 14''.0$$

$$2 = 36 \quad 3 \quad 14 \,.8$$

составленные направленіями на вершины треугольника, элементы котораго суть:

	Углы.	lg сторонъ въ саж.
A	39°14′ 0″.1	3.594 1876
B	85 46 30 .0	3.791 9587
C	54 59 29 .9	3.706 4607

Вычисленіе формулъ (107) даетъ:

$$\theta = 65^\circ 26' \; 3''.4$$

$$x = 24 \; 51 \; 54 \; .0$$

$$y = 113 \;\; 5 \; 37 \; .2$$

а логариѳмы разстояній p_1, p_2 и p_3 послѣ рѣшенія треугольниковъ ABP, BCP и ACP равны соотвѣтственно 3.929 8241, 3.890 7010 и 3.589 8472.

2) На сферической поверхности связь между углами x, y, 1 и 2 будетъ

$$x + y + 1 + 2 = 180^\circ + \varepsilon$$

гдѣ ε — сферическій избытокъ треугольника ACP (черт. 186). Поэтому уравненіе (a) принимаетъ видъ.

$$\sin (x + 1) = \sin (y + 2 - \varepsilon)$$

Или, замѣняя, по малости ε, $\sin \varepsilon$ черезъ $\frac{\varepsilon}{\varkappa}$ и $\cos \varepsilon$ черезъ 1:

$$\sin (x + 1) = \sin (y + 2) - \frac{\varepsilon}{\varkappa} . \cos (y + 2)$$

Умножая обѣ части этого уравненія на $\sin A . \sin C$ и вычитая изъ него почленно уравненіе (b), остающееся справедливымъ и для сферической поверхности, получимъ послѣ сокращеній:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin A \, . \, \sin \, (C - 2)}{\sin C \, . \, \sin \, (A - 1)} \cdot \left\{ 1 - \frac{\varepsilon \, . \, \sin C \, . \, \cos (y + 2)}{\varkappa \, . \, \sin \, (C - 2) \, . \, \sin y} \right\} \qquad (d)$$

Но ε, по формулѣ (34), можетъ быть представлено такъ:

$$\varepsilon = [4] . \frac{b^2 . \sin x \; \sin y}{\sin \, (1 + 2)}$$

Подставляя это въ предъидущую формулу (d) и означая для краткости выраженіе

$$[4] \; \frac{b^2 . \sin x \, . \, \sin C \, . \, \cos (y + 2)}{\varkappa \, . \, \sin \, (1 + 2) \, . \, \sin \, (C - 2)}$$

черезъ u, получимъ:

$$\cot g \, \theta = \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin A \, . \, \sin \, (C - 2)}{\sin C \, . \, \sin \, (A - 1)} . (1 - u) \qquad (e)$$

Такъ какъ u всегда очень малая величина, то въ логариѳмическомъ видѣ будетъ:

$$lg\, cotg\, \theta = lg\, \frac{sin\, A\, .\, sin\, (C-2)}{sin\, C\, .\, sin\, (A-1)} - M\, .\, u$$

гдѣ второй членъ $M.u$ (M—модуль Бригговыхъ логариѳмовъ) выражаетъ поправку перваго члена, въ единицахъ послѣдняго десятичнаго знака.

Такимъ образомъ для аналитическаго рѣшенія задачи Потенота на сферической поверхности получаемъ слѣдующую систему формулъ:

$$\left.\begin{aligned}
u &= [4]\, .\, \frac{b^2 .\, sin\, x\, .\, sin\, C\, .\, cos\, (y+2)}{\varkappa\, .\, sin\, (1+2)\, .\, sin\, (C-2)} \\
\varepsilon &= [4]\, .\, \frac{b^2 .\, sin\, x\, .\, sin\, y}{sin\, (1+2)} \\
cotg\, \theta &= \frac{sin\, A\, .\, sin\, (C-2)}{sin\, C\, .\, sin\, (A-1)}\,(1-u) \\
tg\, \frac{x-y}{2} &= tg\, (45^\circ - \theta)\, .\, cotg\, \frac{1+2-\varepsilon}{2} \\
\frac{x+y}{2} &= 90^\circ - \frac{1+2-\varepsilon}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

Къ замѣчаніямъ, сдѣланнымъ по поводу аналогичныхъ этимъ формуламъ (107), здѣсь необходимо добавить, что для вычисленія u и ε надо предварительно рѣшить задачу на плоскости. Это предварительное вычисленіе, по формуламъ (107), достаточно произвести четырехзначными логариѳмами.

Числовой примѣръ. Оставляя данныя предъидущаго примѣра, имѣемъ изъ предварительнаго вычисленія (средняя широта $\varphi = 46^\circ 26'$, сф. изб. треуг. $ABC = 0''.23$):

$$\theta = 65^\circ 26' \qquad \varepsilon = 0''.26$$
$$x = 24\ 52 \qquad u = -0.000\,0029$$
$$y = 113\ \ 6 \qquad M.u = -0.000\,0013$$

Откуда по формуламъ (108) получаемъ окончательно:

$$\theta = 65^\circ 26'\ 3''.11 \qquad lg\, p_1 = 3.929\,8246$$
$$x = 24\ 51\ 54\ .36 \qquad lg\, p_2 = 3.890\,7018$$
$$y = 113\ \ 5\ 37\ .10 \qquad lg\, p_3 = 3.589\,8486$$

130. Уравниваніе точекъ Потенота. Если со вновь опредѣляемой точки наблюдены только три точки старой тріангуляціи, то получаются всѣ данныя для ея вычисленія, но безъ всякой повѣрки. Если же наблюдены четыре или болѣе точекъ старой тріангуляціи, то отдѣльныя вычисленія могутъ быть повѣрены; вмѣстѣ съ тѣмъ необходимо произвести еще уравнительное вычисленіе, чтобы привести въ полное согласіе опредѣленіе новой точки по разнымъ исходнымъ даннымъ. Въ этомъ случаѣ число условныхъ уравненій равно числу наблюденныхъ направленій безъ трехъ (необходимыхъ).

Для полученія условныхъ уравненій *) проще всего воспользоваться сравненіями числовыхъ величинъ, получаемыхъ по формулѣ (*e*) § 129 (для плоскости $u = 0$). Именно, изъ двухъ системъ опредѣленій получится уравненіе:

$$\frac{\sin A \,.\, \sin (C - 2)}{\sin C \,.\, \sin (A - 1)} (1 - u) = \frac{\sin A_1 .\, \sin (C_1 - 2_1)}{\sin C_1 .\, \sin (A_1 - 1_1)} (1 - u_1) \qquad (a)$$

Если вставить сюда наблюденные углы, то уравненіе, вообще говоря, не будетъ удовлетворено, такъ что, послѣ логариомированія обѣихъ частей и переноса всѣхъ членовъ въ лѣвую часть, получится не 0, а нѣкоторая величина v, т. е. будетъ

$$lg \sin A + lg \sin (C - 2) - lg \sin C - lg \sin (A - 1) - lg \sin A_1 -$$
$$- lg \sin (C_1 - 2_1) + lg \sin C_1 + lg \sin (A_1 - 1_1) - M (u - u_1) = v \qquad (b)$$

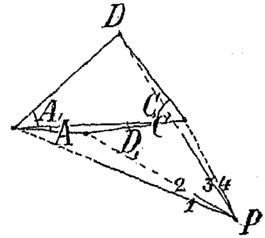
Рѣшеніе подобныхъ условныхъ уравненій ничѣмъ не отличается отъ рѣшенія условныхъ уравненій синусовъ (см. § 116). Этотъ видъ особенно удобенъ потому, что если бы въ тріангуляціи оказалась точка, опредѣляемая многими направленіями при помощи задачи Потенота, то подобныя уравненія можно рѣшать совмѣстно съ прочими условными уравненіями.

---

*) Способъ уравниванія, изложенный въ текстѣ, предложенъ нашимъ геодезистомъ *С. Д. Рыльке* (см. Записки В. Т. О. Г. Ш., часть I., стр. 147—149). Другой способъ уравниванія, при помощи прямоугольныхъ координатъ, предложенный *Гауссомъ*, можно изучить въ сочиненіи *Савича* (Приложеніе теоріи вѣроятностей къ вычисленію наблюденій 1857 г., стр. 112—117). См. еще *Börsch*—Anleitung zur Berechnung Geod. Coordinaten, 1885.

Числовой примѣръ. Съ точки P (черт. 188) наблюдены направленія:

$1 =$	$0° \; 0' \; 0''.0$	$-0''.43$
$2 =$	$6 \; 18 \; 41 \; .6$	$+0 \; .34$
$3 =$	$36 \; 3 \; 14 \; .8$	$+0 \; .23$
$4 =$	$42 \; 2 \; 28 \; .8$	$-0 \; .13$


Черт. 188.

на вершины четыреугольника, котораго углы, означенные на чертежѣ, суть:

$$A = 6°52'18''.02 \qquad A_1 = 39°14' \; 0''.18$$

$$C = 3 \; 57 \; 0 \; .20 \qquad C_1 = 54 \; 59 \; 29 \; .98$$

а логариѳмъ діагонали $AC = 3.791\,9587$.

Вспомогательныя величины u и u_1 для треугольниковъ ADC и AD_1C послѣ предварительнаго вычисленія по формуламъ (107) равны соотвѣтственно -0.00000026 и -0.00000292.

Здѣсь можно составить только одно условное уравненіе вида (a), именно:

$$\frac{\sin A \,.\, \sin\,(C + (2-1))}{\sin C \,.\, \sin\,(A + (4-2))}\,(1-u) = \frac{\sin A_1 \,.\, \sin\,(C_1 - (3-1))}{\sin C_1 \,.\, \sin\,(A_1 - (4-3))}\,(1-u_1)$$

Вотъ логариѳмы синусовъ и ихъ перемѣны при измѣненіи угловъ на $1''$:

A	9.077 8981.1		A_1	9.801 0472.6	
$C + (2-1)$	9.250 7686.3	+ 116.3	$C_1 - (3-1)$	9.511 2647.1	+ 61.4
C	8.838 1365.0		C_1	9.913 3202.7	
$A + (4-2)$	9.830 5210.5	+ 22.9	$A_1 - (4-3)$	9.738 9685.0	+ 32.2
	9.660 0091.9			9.660 0232.0	

$M\,(u - u_1) = +\,0.000\,0011.6$, и потому въ формулѣ ($b$) въ единицахъ седьмого десятичнаго знака получается $v = -151.7$.

Условное уравненіе послѣ приведенія подобныхъ членовъ будетъ:

$$-177.7\,(1) + 139.2\,(2) + 93.6\,(3) - 55.1\,(4) - 151.7 = 0$$

а нормальное $[aa]\ K + v = 0$:

$$62750\ K - 151.7 = 0$$

откуда:

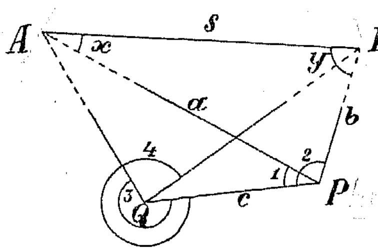
$$lg\ K = 7.3834$$

Самыя поправки $(1) = a_1 K$, $(2) = a_2 K$ и пр. приведены выше, правѣе данныхъ направленій. Уравненныя направленія выходятъ:

$$1 = 0^{\circ}\ 0'\ 0''.00$$
$$2 = 6\ 18\ 42\ .37$$
$$3 = 36\ \ 3\ 15\ .46$$
$$4 = 42\ \ 2\ 29\ .10$$

Легко убѣдиться, что съ этими величинами противорѣчій въ вычисленіи не будетъ.

131. Задача Ганзена. Иногда можетъ встрѣтиться надобность опредѣлить положеніе новой точки, съ которой видны только двѣ точки прежней тріангуляціи. Въ этомъ случаѣ избираютъ еще одну вспомогательную точку, съ которой должны быть видны новая и тѣ же двѣ точки прежней тріангуляціи. Такое опредѣленіе представляетъ задачу, самое удобное рѣшеніе которой предложено *Ганзеномъ* (1795—1874).



Черт. 189.

Пусть A и B (черт. 189) изображаютъ двѣ точки тріангуляціи, положеніе которыхъ, а, слѣдовательно, и разстояніе ихъ s извѣстно. Для опредѣленія новой точки P необходимо вычислить углы x и y, составляемые при данныхъ точкахъ A и B съ направленіями на точку P.

На новой точкѣ P и вспомогательной Q измѣряютъ углы *1*, *2*, *3* и *4*, считаемые такъ, какъ показано на чертежѣ, т. е. началомъ счета угловъ берутъ прямую PQ.

Изъ треугольника ABP:

$$x + y + (2 - 1) = 180^\circ \tag{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin y}{\sin x} \tag{b}$$

Для исключенія неизвѣстныхъ сторонъ a и b имѣемъ далѣе:

изъ треугольника APQ . . . . $\frac{a}{c} = \frac{\sin(360^\circ - 3)}{\sin(180^\circ - 1 - (360 - 3))}$

» » BPQ . . . . $\frac{b}{c} = \frac{\sin(360^\circ - 4)}{\sin(180^\circ - 2 - (360^\circ - 4))}$

откуда по раздѣленіи:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 3 \,.\, \sin(2 - 4)}{\sin 4 \,.\, \sin(1 - 3)} \tag{c}$$

Означивъ вторую часть черезъ $tg\,\theta$, и сравнивая уравненіе (b) съ (c), получимъ послѣ нѣкоторыхъ преобразованій и пользуясь ур. (a):

$$tg\,\frac{y - x}{2} = tg\,(\theta - 45^\circ) \,.\, cotg\,\frac{2 - 1}{2}$$

Такимъ образомъ для аналитическаго рѣшенія задачи Ганзена получаемъ слѣдующую систему формулъ:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\theta &= \frac{\sin 3 \,.\, \sin(4 - 2)}{\sin 4 \,.\, \sin(3 - 1)} \\ tg\,\frac{y - x}{2} &= tg\,(\theta - 45^\circ) \,.\, cotg\,\frac{2 - 1}{2} \\ \frac{y + x}{2} &= 90^\circ - \frac{2 - 1}{2} \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

Числовой примѣръ. На опредѣляемой точкѣ P и на вспомогательной Q наблюдены углы:

$$1 = 36^\circ 3' 14''.8 \qquad 3 = 295^\circ 54' 5''.9$$
$$2 = 42\ 2\ 28\ .8 \qquad 4 = 335\ \ 8\ 6\ .0$$

По формуламъ (109) имѣемъ:

$$\theta = 63^\circ 25' 32''.5$$
$$x = 5\ 55\ 38\ .8$$
$$y = 168\ \ 5\ \ 7\ .2$$

132. Окончательное вычисленіе тріангуляціи. Послѣ уравнительныхъ вычисленій приступаютъ къ окончательному вычисленію всѣхъ треугольниковъ тріангуляціи. Вычисленіе начинается съ базиса или основной стороны и производится по правиламъ, изложеннымъ въ § 37 (1-й случай), т. е. пользуясь *теоремою Лежандра.* Смотря по требуемой точности, вычисленіе ведется съ различнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ: для первоклассныхъ треугольниковъ пользуются обыкновенно семизначными, а для прочихъ шестизначными логариѳмическими таблицами. Такъ какъ для уравнительныхъ вычисленій подъискивались уже логариѳмы синусовъ многихъ угловъ, то при окончательномъ вычисленіи ихъ можно уже не вычислять вновь, а исправлять прежніе произведеніями изъ перемѣнъ логариѳмовъ синусовъ (α, β...) на полученныя поправки угловъ. Но все таки лучше подъискивать всѣ логариѳмы вновь и *повѣрять* ихъ прежними со введенными поправками. При сложной сѣти многія стороны можно вычислять разными путями; этимъ отнюдь не слѣдуетъ пренебрегать и, сравнивая результаты, полученные разными путями, можно легко открывать, а затѣмъ исправлять ошибки. Логариѳмы общихъ сторонъ должны выходить одинаковыми въ предѣлахъ точности таблицъ, т. е. расходиться не болѣе, какъ на одну или двѣ единицы послѣдняго десятичнаго знака. Если же удерживать слѣдующую цифру, получаемую интерполированіемъ, то обыкновенно и послѣднія цифры оказываются согласными.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ (стр. 487) помѣщено окончательное вычисленіе сторонъ четыреугольника съ двумя діагоналями, служившаго примѣромъ въ §§ 114, 121 и 126.

Когда тріагуляція представляетъ рядъ смежныхъ простыхъ треугольниковъ, въ видѣ непрерывной цѣпи, то отдѣльнаго уравниванія вовсе не производятъ, а оно ведется попутно съ окончательнымъ вычисленіемъ сторонъ. Выписывая въ таблицы всѣ приведенные углы (наблюденные, исправленные приведеніями), составляютъ ихъ суммы въ каждомъ треугольникѣ и, раздѣливъ разность между суммою угловъ и 180° на три, приводятъ эти суммы ровно къ 180°. Такимъ путемъ одновременно и уравниваютъ углы, и приводятъ сферическіе углы къ плос-

№	Названія точекъ.	Углы сферическіе.	Углы плоск.	lg сторонъ въ сажен.	Вычисленія.
				9.935 6090	
1	Захожье	59°33′53″.36	52″.95	4.053 4847	9.977 9035
	Размителево . .	71 52 39 .37	38 .96	4.095 7792	4.117 8757
	Пулково	48 33 28 .50	28 .09	3.992 7190	9.874 8433
		180 0 1 .23	0 .00		
				9.876 8902	
2	Федоровское . .	48 51 55 .37	55 .04	3.992 7190	9.999 9723
	Захожье	89 21 9 .47	9 .14	4.115 8011	4.115 8288
	Размителево . .	41 46 56 .15	55 .82	3.939 4989	9.823 6701
		180 0 0 .99	0 .00		
				9.819 6499	
3	Пулково	41 18 43 .98	43 .77	3.939 4989	9.975 9301
	Федоровское . .	108 54 0 .53	0 .33	4.095 7791	4.119 8490
	Захожье	29 47 16 .11	15 .90	3.816 0205	9.696 1715
		180 0 0 .62	0 .00		
				9.700 2182	
4	Размителево . .	30 5 43 .22	42 .93	3.816 0205	9.999 9989
	Пулково . . .	89 52 12 .48	12 .20	4.115 8012	4.115 8023
	Федоровское . .	60 2 5 .16	4 .87	4.053 4846	9.937 6823
		180 0 0 .86	0 .00		

кимъ. Чтобы не сбиться въ вычисленіи, углы треугольниковъ выписываются въ слѣдующемъ порядкѣ: первымъ берется уголъ, лежащій противъ основной стороны (вообще противъ первой данной стороны, или базиса), а послѣднимъ—уголъ, лежащій противъ стороны, смежной со слѣдующимъ треугольникомъ; между ними пишется третій (промежуточный) уголъ треугольника. При такомъ расположеніи, логариѳмъ послѣдней стороны каждаго треугольника переписывается въ строку перваго угла слѣдующаго треугольника и представляетъ, очевидно, логариѳмъ его первой стороны.

Для поясненія порядка вычисленія, въ нижеслѣдующей таблицѣ приведена часть окончательнаго вычисленія нѣсколькихъ смежныхъ треугольниковъ русскаго градуснаго измѣренія по 52-й параллели.

№	Названія точекъ.	Углы приведенные.	Углы сфер.	Углы плоск.	lg сторонъ въ метрахъ.	Вычисленія.
					9.914 3466.7	
1	Островная . . .	55°11′ 8″.86	8″.942	8″.480	4.449 3496.0	9.999 9959.5
	Студенецъ . . .	90 14 55 .02	55 .102	54 .640	4.534 9988.8	4.535 0029.3
	Благословенная.	34 33 57 .26	57 .342	56 .880	4.288 8557.8	9.753 8528.5
		180 0 1 .14	1 .386	0 .000		8.984 35
		ε = 1.386				8.738 20
		v = − 0.246				
					9.984 5901.1	
2	Черноострожская	74 49 37 .61	37 .060	36 .860	4.288 8557.8	9.836 1392.1
	Островная . . .	43 17 29 .46	28 .910	28 .710	4.140 4048.8	4.304 2656.7
	Студенецъ . . .	61 52 55 .18	54 .630	54 .430	4.249 7229.8	9.945 4573.1
		180 0 2 .25	0 .600	0 .000		8.429 26
		ε = 0.600				8.374 72
		v = + 1.650				
					9.911 2183.2	
3	Красногорскъ. .	54 35 55 .88	55 .295	55 .080	4.249 7229.8	9.819 5754.8
	Черноострожская	41 18 13 .50	12 .915	12 .700	4.158 0801.4	4.338 5046.6
	Островная . . .	84 5 53 .02	52 .434	52 .220	4.336 1963.3	9.997 6916.7
		180 0 2 .40	0 .644	0 .000		8.407 80
		ε = 0.644				8.405 49
		v = + 1.756				
					9.965 3955.4	
4	Алексѣевка. . .	67 25 48 .25	48 .692	48 .440	4.336 1963.3	9.985 6063.5
	Красногорскъ. .	75 19 47 .90	48 .342	48 .090	4.356 4071.4	4.370 8007.9
	Черноострожская	37 14 23 .28	23 .721	23 .470	4.152 6660.0	9.781 8652.1
		179 59 59 .43	0 .755	0 .000		8.692 60
		ε = 0.755				8.474 47
		v = − 1.325				
					9.854 6218.1	
5	Воздвиженская .	45 41 8 .98	9 .173	9 .030	4.152 6660.0	9.781 9406.9
	Красногорскъ. .	37 14 50 .67	50 .863	50 .720	4.079 9848.8	4.298 0441.9
	Алексѣевка. . .	97 4 0 .20	0 .393	0 .250	4.294 7325.3	9.996 6883.4
		179 59 59 .85	0 .429	0 .000		8.232 65
		ε = 0.429				8.229 34
		v = − 0.579				

133. Полярныя координаты. Подъ *полярными координатами* какой нибудь тригонометрической точки разумѣютъ азимутъ на эту точку съ начальной и разстояніе между ними. За начальную точку принимается обыкновенно астрономическая, т. е. та изъ точекъ тріангуляціи, на которой были произведены астрономическія наблюденія и для которой, слѣдовательно, опредѣлено абсолютное положеніе на земномъ сфероидѣ. Знаніе полярныхъ координатъ разныхъ точекъ тріангуляціи необходимо для непосредственнаго переноса географическихъ координатъ съ начальной астрономической точки на любую точку тригонометрической сѣти, а также для сравненія разстоянія между двумя конечными точками, полученнаго изъ вычисленія тріангуляціи, съ тѣмъ же разстояніемъ, извѣстнымъ изъ прежнихъ геодезическихъ работъ или изъ астрономическихъ опредѣленій.

Пусть между двумя крайними точками A и Q (черт. 17) проложена цѣпь треугольниковъ, всѣ углы и стороны которыхъ уже окончательно вычислены, и кромѣ того въ начальной точкѣ A опредѣленъ азимутъ стороны AB, т. е. уголъ $OAB = \alpha$ (AO — направленіе географическаго меридіана въ точкѣ A). Требуется вычислить уголъ $OAQ = S$ и разстояніе $AQ = s$, т. е. полярныя координаты точки Q относительно начальной A. Такое вычисленіе можетъ быть сдѣлано не иначе, какъ послѣдовательнымъ рѣшеніемъ треугольниковъ ABD, ADF и AFQ. Для повѣрки вычисляютъ и другія діагонали, и каждая вычисляется дважды изъ двухъ треугольниковъ. Такъ, діагональ AD опредѣляется рѣшеніемъ треугольниковъ ABD и ACD; углы которыхъ при B и C получаются простымъ сложеніемъ соотвѣтствующихъ угловъ первоначальныхъ треугольниковъ ABC и BCD; діагональ AE — рѣшеніемъ треугольниковъ ADE и ACE, діагональ AF — рѣшеніемъ треугольниковъ ADF и AEF и т. д.

Послѣ рѣшенія каждой пары полярныхъ треугольниковъ являются слѣдующія повѣрки: общая сторона (діагональ) должна быть одинакова, суммы или разности угловъ у начальной и конечной точки діагонали должны равняться угламъ при тѣхъ же точкахъ предъидущаго полярнаго треугольника и, наконецъ, сумма или разность сферическихъ избытковъ пары новыхъ полярныхъ треугольниковъ должна равняться сферическому избытку предъидущаго. Указанныя величины не будутъ конечно сходиться безусловно, а лишь въ предѣлахъ точности логариѳмическихъ таблицъ; бо̀льшее разногласіе укажетъ на ошибочность вычисленія, которое необходимо повѣрить и не вести работу дальше, пока ошибка не будетъ открыта и исправлена; при допустимомъ же разногласіи берется среднее изъ полученныхъ результатовъ, съ которымъ и продолжаютъ вычисленіе дальше.

Вообще вычисленіе полярныхъ координатъ сводится къ послѣдовательному рѣшенію сферическихъ треугольниковъ, по двумъ сторонамъ и углу между ними, и производится по формуламъ, даннымъ въ § 37 (2-ой случай).

Для поясненія хода вычисленія, въ нижеслѣдующихъ таблицахъ приведено послѣдовательное вычисленіе полярныхъ координатъ тригонометрической точки Воздвиженская относительно начальной—Благословенная, на которой былъ наблюденъ азимутъ стороны Благословенная-Студенецъ и получено $\alpha = 60°7'6''.74$. Всѣ стороны и углы основныхъ треугольниковъ взяты изъ послѣдняго примѣра предъидущаго § 132.

№	Названія вершинъ треугольниковъ.	Углы: сферическіе.	Углы: плоск.	lg сторонъ въ метрахъ.	Вычисленія.				
					9.669	7446.8	3.810	1495.6	1.40331
	Черноострожская	18°46′36″.440	36″.287	4.449 3496.0	4.140	4048.8	4.605	9062.8	8.58975
1	Студенецъ . . .	152 7 49 .732	49 .578	4.611 3983.9	n 9.946	4592.3	9.994	5078.9	9.66974
	Благословенная.	+ 9 5 34 .288	34 .135	4.140 4048.8	+ 156	5566.8	9.204	2432.8	
		ε = 0 .460	0 .000		4.449	3496.0			9.66280
					n 4.086	8641.1	0.362	4854.9	
					9.995	2292.2	4.244	9522.0	1.40331
	Черноострожская	56 3 0.631	0 .123	4.534 9988.8	4.249	7229.8	4.566	9844.4	8.78472
1	Островная . . .	98 28 37 .852	37 .343	4.611 3983.7	n 9.168	5359.6	9.955	5860.7	9.99523
	Благословенная.	— 25 28 23 .042	22 .534	4.249 7229.8	+ 31	9855.6	9.677	9677.6	
		ε = 1 .525	0 .000		4.534	9988.8			0.18326
					n 3.418	2589.4	1.116	7399.4	

$\angle = 74°49'37''.071$ 69 12 41.028
41.040

$S = 69°12'41''.034$ $lg\,s = 4.611\ 3983.8$

					9.996 4132.4 4.332 6095.7 1.40331
	Красногорскъ. .	56 24 44 .725	43 .984	4.611 3983.8	4.336 1963.3 4.639 9359.8 8.94758
2	Черноострожская	97 21 13 .540	12 .798	4.687 1462.3	*n* 9.107 1817.6 9.952 7897.5 9.99642
	Благословенная.	+ 26 14 3 .960	3 .218	4.336 1963.3	+ 28 5376.0 9.692 6735.9
		ε = 2 .225	0 .000		4.611 3983.8 0.34731
					3.443 3780.9 1.168 0202.9
					8.652 5226.7 2.810 6028.1 1.40331
	Красногорскъ. .	1 48 49 .415	49 .397	4.534 9988.8	4.158 0801.4 4.687 1078.7 8.69308
2	Островная . . .	177 25 29 .714	29 .695	4.687 1462.0	9.999 5612.7 9.999 9616.7 8.65251
	Благословенная.	+ 0 45 40 .927	40 .908	4.158 0801.4	+ 152 1089.9 8.123 4949.4
		ε = 0 .056	0 .000		4.534 9988.8 8.74890
					4.157 6414.1 0.377 3574.7

$\angle = 54°35'55''.310$ 95 26 44.994
45.009
$S = 95°26'45''.002$ $lg\, s = 4.687\ 1462.2$

					9.852 5442.6 4.208 9514.0 1.40331
	Алексѣевка. . .	29 30 46 .496	45 .938	4.611 3983.8	4.356 4071.4 4.754 5047.0 8.96781
3	Черноострожск.	134 35 37 .261	36 .703	4.771 4328.2	*n* 9.846 3820.4 9.983 0718.8 9.85255
	Благословенная.	+ 15 53 37 .917	37 .359	4.356 4071.4	+ 143 1063.2 9.454 4467.0
		ε = 1 .674	0 .000		4.611 3983.8 0.22367
					4.202 7891.8 0.408 6092.0
					9.872 8236.6 4.025 4896.6 1.40331
	Алексѣевка. . .	37 55 2 .185	1 .749	4.687 1462.2	4.152 6660.0 4.764 3214.4 8.83981
3	Красногорскъ. .	131 44 33 .060	32 .625	4.771 4329.3	*n* 9.823 3325.0 9.992 8885.1 9.87282
	Благословенная.	− 10 20 26 .061	25 .626	4.152 6660.0	+ 77 1752.2 9.261 1682.2
		ε = 1 .306	0 .000		4.687 1462.2 0.11594
					3.975 9985.0 0.711 1477.2

$\angle = 67°25'48''.681$ 85 6 18.951
18.941
$S = 85°6'18''.946$ $lg\, s = 4.771\ 4328.7$

					9.849 6067.7 3.929 5916.5 1.40331
	Воздвиженская .	37 50 39 .371	38 .947	4.771 4328.7	4.079 9848.8 4.829 8025.6 8.85142
4	Алексѣевка. . .	134 59 2 .583	2 .159	4.833 2138.6	*n* 9.849 3631.6 9.996 5887.0 9.84961
	Благословенная.	+ 7 10 19 .318	18 .894	4.079 9848.8	+ 58 3696.9 9.099 7890.9
		ε = 1 .272	0 .000		4.771 4328.7 0.10434
					3.929 3480.4 0.842 0848.3
					9.280 9911.3 3.575 7236.6 1.40331
	Воздвиженская .	7 50 29 .784	29 .630	4.687 1462.2	4.294 7325.3 4.832 5494.5 8.98188
4	Красногорскъ. .	168 59 23 .923	23 .768	4.833 2138.4	*n* 9.991 9317.4 9.999 3356.1 9.28100
	Благословенная.	− 3 10 6 .757	6 .602	4.294 7325.3	+ 145 4032.3 8.743 1742.1
		ε = 0 .464	0 .000		4.687 1462.2 9.66619
					4.286 6642.7 0.400 4819.5

$\angle = 45°41'9''.155$ 92 16 38.642
38.245
$S = 92°16'38''.255$ $lg\, s = 4.833\ 2138.5$

При вычисленіи градусныхъ измѣреній необходимо знать разстояніе между параллелями конечныхъ точекъ тріангуляціи по меридіану, или разстояніе между меридіанами этихъ же точекъ по извѣстной параллели. Соотвѣтствующія величины легко найти проектируя готовыя полярныя координаты на меридіанъ или на параллель. Для этого служатъ формулы, выражающія искомыя проекціи быстро сходящимися рядами, въ которые входятъ обыкновенно широты и азимуты обѣихъ конечныхъ точекъ *). Ниже приведены формулы *Гельмерта*, поясненныя числовыми примѣрами.

1) *Проектированіе разстоянія между двумя точками поверхности сфероида на меридіанъ.*

$$M = \frac{s \cdot \cos\alpha}{\cos\frac{\Delta\alpha}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{s}{a}\right)^2 \sin^2\alpha\,(1 + e^2 \cos 2\varphi) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{240}\left(\frac{s}{a}\right)^4 \sin^2\alpha\,(-2 + [5\, tg^2\varphi + 3]\cos^2\alpha) + \ldots \right\}$$

Значеніе буквъ:

s—данное разстояніе между точками,

$$\alpha = \frac{(\alpha_2 \mp 180^\circ) + \alpha_1}{2},\ \Delta\alpha = (\alpha_2 - 180^\circ) - \alpha_1 \text{ и } \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

гдѣ φ_1 и φ_2 — географическія широты начальной и конечной точекъ, α_1 и α_2 — азимуты второй точки съ первой и первой со второй, a и e^2—элементы земного сфероида, а M—искомая проекція разстоянія s на меридіанъ.

Числовой примѣръ (Струве, Дуга меридіана, I. 328). Даны:

Разстояніе Водолуй—Супрунковцы, $lg\ s$ (въ саженяхъ) $=$ $= 5.079\ 9576$.

Водолуй . . { Географическая широта $\varphi_1 = 47^\circ\ 1'25''$
Азимутъ на Супрунковцы $\alpha_1 = 40\ 40\ 10.2$

*) См. *Струве*—Дуга меридіана I, 322—334; Записки В. Т. Отдѣла Гл. Шт. Часть L, 166—167 и 273—281; Геодезія *Кларка*, русскій переводъ *Витковскаго*, 1890 г. стр. 286; Bessel—«Abhandlungen», III, 30, 136—137 и *Helmert* «Die Math. und Physik. Theorieen der Höheren Geodäsie», I, 304—311.

Супрунковцы $\begin{cases} \text{Географическая широта } \varphi_2 = 48^\circ 45' 3'' \\ \text{Азимутъ на Володуй . . } \alpha_2 = 222\ 21\ 19\ .7 \end{cases}$

Отсюда

$$\alpha = 41^\circ 30' 44''.95 \qquad \varphi = 47^\circ 53' 14''$$

$$\frac{\Delta\alpha}{2} = 0\ 50\ 34\ .75 \qquad 2\varphi = 95\ 46\ 28$$

Съ этими величинами и принимая элементы земли Кларка (см. стр. 67) получаемъ

$$lg\, M = 4.954\,4027 \text{ и } M = 90033.21 \text{ саж.}$$

2) *Проектированіе разстоянія между двумя точками поверхности сфероида на ихъ среднюю или любую параллель.*

$$P = s . sin\, \alpha \left\{ 1 - \frac{1}{24}\left(\frac{s}{a}\right)^2 \left[(1 - e^2 . sin^2 \varphi)(1 - sec^2 \varphi . sin^2 \alpha) - \right.\right.$$

$$\left. - e^2 . cos^2 \alpha\, (10\, sin^2 \varphi - 1) \right] +$$

$$\left. + \frac{1}{1920}\left(\frac{s}{a}\right)^4 (1 - sec^2 \varphi . sin^2 \alpha)(1 - 9\, sec^2 \varphi . sin^2 \alpha) + \ldots \right\}$$

Значеніе буквъ см. выше; P—разстояніе по средней параллели, т. е. подъ широтою $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$. Для вычисленія проекціи на какую нибудь параллель подъ широтою φ_0 имѣемъ слѣдующее соотношеніе дугъ параллелей между тѣми же меридіанами:

$$P_0 = P . \frac{cos\, \varphi_0}{cos\, \varphi} \sqrt{\frac{1 - e^2\, sin^2 \varphi}{1 - e^2\, sin^2 \varphi_0}}$$

Числовой примѣръ (Записки В. Т. Отдѣла Гл. Шт., Часть XLVII, 323). Даны:

Разстояніе Ченстоховъ—Варшава, $lg\ s$ (въ саженяхъ) $=$ $= 4.981\,5661$.

Ченстоховъ $\begin{cases} \text{Географическая широта } \varphi_1 = 50^\circ 48' 51''.1 \\ \text{Азимутъ на Варшаву . . } \alpha_1 = 39\ 24\ 18\ .5 \end{cases}$

Варшава. . $\begin{cases} \text{Географическая широта } \varphi_2 = 52\ 13\ \ 4\ .9 \\ \text{Азимутъ на Ченстоховъ } \alpha_2 = 220\ 53\ 39\ .8 \end{cases}$

Отсюда

$$\alpha = 40°8'59''15 \quad \text{и} \quad \varphi = 51°30'58''.0$$

Съ этими величинами и принимая элементы земного сфероида Кларка (стр. 67) получаемъ:

$$lg\, P = 4.790\,9846 \quad \text{и} \quad P = 61\,799.45 \text{ саж.}$$

Проекція на параллель 52°:

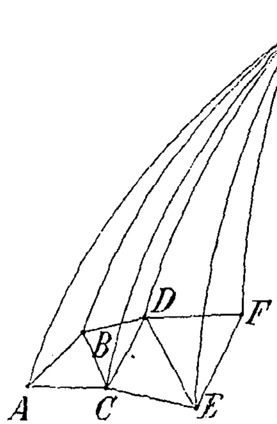
$$lg\, P_0 = 4.786\,3428 \quad \text{и} \quad P_0 = 61\,142.44 \text{ саж.}$$

X.

Вычисленіе географическихъ координатъ.

134. Пріемы вычисленія. Конечная цѣль тріангуляціи, какъ основанія для точныхъ съемокъ, заключается въ вычисленіи географическихъ координатъ всѣхъ ея точекъ. По географическимъ координатамъ, т. е. по широтамъ и долготамъ, тригонометрическія точки наносятся на съемочные планшеты и на картографическую сѣтку. Когда углы и стороны всѣхъ треугольниковъ извѣстны, то вычисленіе географическихъ координатъ не представляетъ уже затрудненій; необходимо лишь въ числѣ тригонометрическихъ точекъ имѣть хоть одну астрономическую, т. е. точку, на которой широта и долгота, а также азимутъ исходной стороны получены изъ астрономическихъ опредѣленій (или даны вычисленіями прежней тріангуляціи).

Пусть $ABCD$... (черт. 190) представляетъ цѣпь треугольниковъ, и A астрономическую точку, на которой, кромѣ географическихъ широты φ и долготы ω, опредѣленъ азимутъ α стороны AB. Проведя меридіаны тригонометрическихъ точекъ A, B, C... до общей ихъ встрѣчи въ полюсѣ P, получимъ систему сферическихъ (предполагая пока Землю правильнымъ шаромъ) треугольниковъ PAB, PBC, PCD... Въ первомъ изъ нихъ извѣстны: сторона AP, равная дополненію до $90°$ широты точки A, сторона AB, извѣстная изъ вычисленія тріангуляціи, и уголъ PAB — азимутъ стороны AB въ точкѣ A. Рѣшеніемъ этого треугольника легко опредѣлить прочія его части, т. е. сторону BP, равную дополненію до $90°$ широты точки B, уголъ APB, представляющій разность долготъ точекъ B и A, и уголъ PBA, составляющій дополненіе до 360° азимута стороны BA въ точкѣ B. Если изъ этого азимута вычесть уголъ ABC треугольника ABC, то получится азимутъ стороны BC въ точкѣ B и тогда, рѣшая треугольникъ PBC по даннымъ: сторонѣ BP (90°—широта точки B), сторонѣ BC (извѣстной изъ тріангуляціи), и углу PBC (азимуту стороны BC), легко, въ свою очередь, вычислить географическое положеніе точки C и обратный азимутъ стороны CB (360°—уголъ PCB). Продолжая подобныя же вычисленія дальше, можно опредѣлить географическія координаты вообще всѣхъ точекъ тріангуляціи.



Черт. 190.

Однако такой прямой и повидимому естественный путь вычисленія въ дѣйствительности никогда не примѣняется, и вотъ по какимъ причинамъ:

1) Треугольники PAB, PBC.., составленные двумя весьма большими сторонами (меридіанами PA, PB...) и одной сравнительно короткой (стороны AB, BC... тріангуляціи), всегда неприятно вычислять по обыкновеннымъ формуламъ сферической тригонометріи: подъискиваніе логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ малыхъ угловъ (углы при P и противолежащія имъ стороны) въ таблицахъ весьма мѣшкотно. Къ тому же эти треугольники не суть сферическіе, а сфероидическіе, причемъ, какъ ни мало сжатіе земного сфероида, а все же вычисленіе по обыкновеннымъ формуламъ сферической тригонометріи было бы не точно; формулы же сфероидической тригонометріи вообще весьма сложны и мало извѣстны.

2) Большія стороны PB, PC..., представляющія дополненія до 90° искомыхъ широтъ, даже при вычисленіи семизначными логариѳмами получаются лишь съ точностью до $\pm 0''.05$.

Послѣ рѣшенія ряда треугольниковъ *PAB*, *PBC*.., ошибки широтъ, послѣдовательно накопляясь, могутъ дойти до цѣлой секунды и даже болѣе; на поверхности Земли это составитъ 15 и болѣе саженей, чего нельзя допускать даже для съемокъ мелкаго масштаба. Болѣе точное вычисленіе потребовало бы логариѳмическихъ таблицъ съ бо̀льшимъ числомъ десятичныхъ знаковъ, обращеніе съ которыми крайне затруднительно и сопряжено съ огромною потерею времени.

3) Стороны тріангуляціи *AB*, *BC*... извѣстны всегда въ линейной мѣрѣ, напримѣръ въ саженяхъ. Чтобы вводить ихъ въ обыкновенныя формулы сферической тригонометріи, необходимо было бы каждую сторону перевести предварительно въ угловую мѣру (градусы, минуты и секунды). На сфероидѣ такой переводъ дѣлается легко и удобно только для дугъ меридіановъ или первыхъ вертикаловъ; для дугъ же, расположенныхъ подъ всевозможными азимутами, такой переводъ требовалъ бы новыхъ довольно сложныхъ вычисленій.

Эти обстоятельства издавна побудили вычислять географическія координаты не прямымъ, а косвенными путями, удобными и точными на практикѣ. Такихъ путей изобрѣтено нѣсколько, и сущность ихъ заключается въ томъ, что вмѣсто абсолютныхъ широтъ, долготъ и азимутовъ вычисляются *разности* широтъ, долготъ и азимутовъ между соотвѣтствующими величинами опредѣляемой и данной точекъ. Разности эти для смежныхъ точекъ тріангуляціи обыкновенно такъ малы, что могутъ быть весьма точно вычислены съ небольшимъ числомъ десятичныхъ знаковъ логариѳмовъ. При большихъ же разстояніяхъ, когда вмѣсто сторонъ непосредственно наблюдавшихся треугольниковъ приходится имѣть дѣло съ полярными координатами, необходимо вычислять, конечно, абсолютные широты, долготы и азимуты, т. е. рѣшать сфероидическіе треугольники *PAB*, *PBC*..., но тогда отъ географическихъ широтъ точекъ переходятъ къ ихъ приведеннымъ широтамъ и рѣшаютъ опять-таки не сфероидическіе, а сферическіе треугольники.

При опредѣленіи географическихъ координатъ послѣдовательныхъ вершинъ цѣпи треугольниковъ является весьма надежная повѣрка вычисленій. Послѣ опредѣленія второй точки *B* (черт. 190) каждая слѣдующая можетъ быть вычислена двояко: C съ A и B, D съ B и C и т. д. Помимо полнаго согласія въ широтахъ и долготахъ, повѣряются и обратные азимуты, потому что разности ихъ въ каждой вновь опредѣленной точкѣ должны равняться соотвѣтствующимъ сферическимъ угламъ основныхъ треугольниковъ. Здѣсь каждая ошибка замѣчается немедленно, и до ея исправленія вычислитель, разумѣется, не долженъ продолжать свою работу. Не лишне повторить уже сказанное въ § 115, что полное согласіе (въ предѣлахъ точности логариомическихъ таблицъ) будетъ только въ томъ случаѣ, если вся тріангуляція была предварительно уравнена. Если же уравниванія сдѣлано не было, то вычислитель будетъ въ постоянной тревогѣ, и маленькія разногласія будетъ склоненъ приписывать ошибкамъ наблюденій, а не ошибкамъ своего вычисленія.

Вопросъ о вычисленіи географическихъ координатъ какой нибудь точки, по даннымъ координатамъ исходной и разстоянію и азимуту на опредѣляемую, извѣстенъ подъ названіемъ *прямой геодезической задачи*. Весьма часто приходится рѣшать и обратный вопросъ: по даннымъ географическимъ координатамъ двухъ точекъ на сфероидѣ опредѣлить ихъ разстояніе и взаимные азимуты; этотъ вопросъ извѣстенъ подъ названіемъ *обратной геодезической задачи*. Ниже разсмотрѣны разные способы для рѣшенія прямой и обратной геодезическихъ задачъ какъ для малыхъ, такъ и для большихъ разстояній между точками на сфероидѣ.

135. Формулы Кларка. Разсмотримъ рѣшеніе прямой геодезической задачи для небольшихъ разстояній, не превосходящихъ 100 верстъ (1°), болѣе чего стороны треугольниковъ почти не бываютъ. Пусть даны широта φ и долгота ω точки A (черт. 191), азимутъ α и разстояніе s точки B; требуется вычислить широту φ_1 и долготу ω_1 точки B и обратный азимутъ α_1 съ B на A.

Проведемъ изъ B дугу большого круга BC, перпендикулярную къ меридіану точки A. Если назвать черезъ ε сферическій избытокъ прямоугольнаго сферическаго треугольника

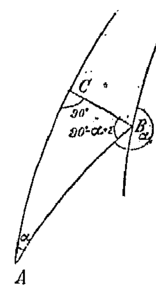
ABC, то сферическіе углы его будутъ α, 90° и $90^\circ - \alpha + \varepsilon$. Рѣшая этотъ треугольникъ по теоремѣ Лежандра (§ 36), получимъ (сфероидическій треугольникъ ABC можно считать сферическимъ, см. §§ 38 и 39):

$$AC = \frac{s \cdot \sin\left(90^\circ - \alpha + \varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon\right)}{\sin\left(90^\circ - \frac{\varepsilon}{3}\right)} = \frac{s \cdot \cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon\right)}{\cos\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$BC = \frac{s \cdot \sin\left(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon\right)}{\sin\left(90^\circ - \frac{\varepsilon}{3}\right)} = \frac{s \cdot \sin\left(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon\right)}{\cos\frac{\varepsilon}{3}}$$

Такъ какъ сторона s не превосходитъ 100 верстъ, то сферическій избытокъ треугольника ABC не болѣе нѣсколькихъ секундъ, и потому $\cos\frac{\varepsilon}{3}$ всегда можно считать равнымъ единицѣ, такъ что

$$AC = s \cdot \cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon\right)$$
$$BC = s \cdot \sin\left(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon\right) \qquad (a)$$



Черт. 191.

Самый же избытокъ ε можно вычислить по формулѣ:

$$\varepsilon = [4]\, s^2 \cdot \sin\alpha\, \cos\alpha$$

Для дальнѣйшаго вычисленія разностей широтъ и долготъ необходимо знать дуги AC и BC не въ линейной, а въ угловой мѣрѣ, поэтому вышестоящія величины (a) должно умножить на $\frac{\varkappa}{R}$, гдѣ R—радіусъ кривизны соотвѣтствующихъ дугъ. За радіусъ кривизны дуги меридіана AC можно взять радіусъ для точки, имѣющей среднюю широту изъ широтъ ея концовъ, такъ что, если назвать широту точки C черезъ φ_0, то для радіуса кривизны дуги AC можно взять радіусъ кривизны меридіана для точки съ широтою

$$\varphi_n = \frac{\varphi + \varphi_0}{2}$$

Для дуги же BC надо взять радіусъ кривизны дуги перваго вертикала для широты φ_0. Согласно обозначеніямъ, принятымъ въ § 28 для перевода дугъ AC и BC изъ линейной мѣры въ угловую, надо умножить ихъ соотвѣтственно на

$$\frac{\varkappa}{\rho_n} = [1]_n \quad \text{и} \quad \frac{\varkappa}{p_0} = [2]_0$$

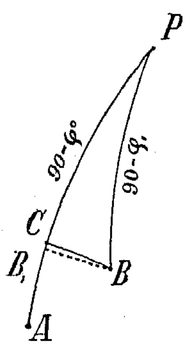
называя дуги AC и BC въ секундахъ черезъ u и v, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} u &= [1]_n . s . \cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \\ v &= [2]_0 . s . \sin\left(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon\right) \end{aligned} \right\} \qquad (b)$$

и широта точки C будетъ:

$$\varphi_0 = \varphi + u \qquad (c)$$

Но широта точки C больше широты опредѣляемой точки B на весьма малую величину, потому что при небольшомъ разстояніи CB эта дуга очень мало отклонится отъ дуги параллели BB_1 (черт. 192). Для опредѣленія разности широтъ точекъ B и C построимъ на шарѣ радіуса p_0 прямоугольный треугольникъ BCP по гипотенузѣ $PB = 90° - \varphi_1$ и катету $PC = 90° - \varphi_0$, причемъ другой его катетъ BC будетъ очевидно равенъ величинѣ v. Въ этомъ треугольникѣ имѣемъ:



Черт. 192.

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_0 . \cos v$$

откуда

$$\sin\varphi_0 - \sin\varphi_1 = 2\sin^2\frac{v}{2} . \sin\varphi_0$$

и

$$\sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} . \cos\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} = \sin^2\frac{v}{2} . \sin\varphi_0$$

Дуги $\varphi_0 - \varphi_1$ и v такъ малы, что синусы ихъ можно замѣнить самими дугами, а $\cos\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}$ замѣнить черезъ $\cos\varphi_0$; тогда получимъ въ секундахъ:

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \frac{v^2}{2\varkappa} . tg\,\varphi_0$$

Величина $\varphi_0 - \varphi_1$ не есть, строго говоря, разность широтъ точекъ C и B, потому что треугольникъ BCP построенъ, какъ упомянуто выше, на шарѣ радіуса p_0, тогда какъ разность широтъ C и B должна соотвѣтствовать радіусу кривизны меридіана въ точкѣ C, т. е. величинѣ ρ_0. Поэтому предъидущее выраженіе надо еще умножить на отношеніе $\frac{p_0}{\rho_0}$ и, слѣдовательно, будетъ:

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \frac{p_0}{2\rho_0 \varkappa} \cdot v^2 \cdot tg\,\varphi_0$$

Полагая для краткости

$$\frac{p_0}{2\rho_0 \varkappa} = [3]_0$$

$$[3]_0 \cdot v^2 \cdot tg\,\varphi_0 = \eta \qquad (d)$$

получимъ:

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \eta$$

Для полученія разности долготъ точекъ B и A, т. е. угла $BPA = \lambda$ и обратнаго азимута дуги BA въ точкѣ B, обратимся еще разъ къ черт. 192 и обозначимъ уголъ PBC, всегда близкій къ $90°$, черезъ $90° - t$. Изъ этого треугольника по правиламъ сферической тригонометріи имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin\lambda &= \frac{\sin v}{\cos\varphi_1} \\ tg\,t &= tg\,\lambda \cdot \sin\varphi_1 \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

Первая изъ этихъ формулъ даетъ непосредственно разность долготъ точекъ B и A, такъ что

$$\omega_1 = \omega + \lambda$$

Вторая же позволяетъ вычислить величину t, весьма просто связанную съ обратнымъ азимутомъ; именно, изъ сопоставленія чертежей 191 и 192 легко видѣть, что

$$\alpha_1 = 360° - (90° - \alpha + \varepsilon) - (90° - t)$$

откуда:

$$\alpha_1 = 180° + \alpha - \varepsilon + t \qquad (f)$$

Хотя формулы (e) и даютъ искомыя λ и t, однако онѣ неудобны для практическаго примѣненія, потому что требуютъ вычисленія тригонометрическихъ величинъ весьма малыхъ угловъ v, λ и t. Гораздо цѣлесообразнѣе воспользоваться разложеніями ихъ въ быстро сходящіеся ряды, въ которыхъ всегда можно отбросить члены четвертаго и высшихъ порядковъ, ибо когда величины v, λ и t не болѣе 1°, т. е. около $^1/_{60}$, то четвертыя ихъ степени будутъ меньше 1.10^{-8}, т. е. меньше величинъ, могущихъ вліять на седьмой десятичный знакъ. Итакъ, разлагая $\sin\lambda$ и $\sin v$ первой формулы (e) въ ряды и ограничиваясь третьими степенями, получаемъ:

$$\lambda - \frac{\lambda^3}{6} = \frac{v - \frac{v^3}{6}}{\cos\varphi_1}$$

откуда

$$\lambda = \frac{v\left(1 - \frac{v^2}{6}\right)}{\cos\varphi_1\left(1 - \frac{\lambda^2}{6}\right)} = \frac{v}{\cos\varphi_1\left(1 + \frac{v^2}{6} - \frac{\lambda^2}{6}\right)}$$

Такъ какъ въ первомъ приближеніи $\lambda = \frac{v}{\cos\varphi_1}$, то вставивъ въ знаменателя второй части равенства вмѣсто λ^2 величину $\left(\frac{v}{\cos\varphi_1}\right)^2$, получимъ:

$$\lambda = \frac{v}{\cos\varphi_1\left(1 - \frac{v^2}{6}\,tg^2\,\varphi_1\right)}$$

Воспользовавшись еще формулою (d) и считая безъ ущерба точности этого малаго поправочнаго члена $\rho = p$ и $tg\,\varphi_0 = tg\,\varphi_1$, т. е. полагая

$$\frac{v^2}{2\varkappa}\,tg\,\varphi_1 = \eta$$

получимъ, выражая λ, v и η въ секундахъ:

$$\lambda = \frac{v}{\cos\varphi_1\left(1 - \frac{1}{3\varkappa}\cdot\eta\,tg\,\varphi_1\right)}$$

Если x малая величина, то вообще

$$\cos(\varphi_1 + x) = \cos\varphi_1 - \frac{x}{\varkappa}\cdot\sin\varphi_1 = \cos\varphi_1\left(1 - \frac{x}{\varkappa}\cdot tg\,\varphi_1\right)$$

Такъ какъ η малая величина, то подобно этому

$$\cos\varphi_1\left(1 - \frac{1}{3\varkappa}\cdot\eta\,.\,tg\,\varphi_1\right) = \cos\left(\varphi_1 + \frac{1}{3}\eta\right)$$

и слѣдовательно:

$$\lambda = \frac{v}{\cos\left(\varphi_1 + \frac{1}{3}\eta\right)}$$

Разлагая теперь $tg\,t$ и $tg\,\lambda$ второй формулы (e) въ ряды и ограничиваясь тоже третьими степенями, получаемъ:

$$t + \frac{t^3}{3} = \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{3}\right)\sin\varphi_1$$

откуда

$$t = \lambda\,.\,\sin\varphi_1 \cdot \frac{1 + \frac{\lambda^2}{3}}{1 + \frac{t^2}{3}} = \lambda\,.\,\sin\varphi_1\left(1 + \frac{\lambda^2}{3} - \frac{t^2}{3}\right)$$

Но въ первомъ приближеніи $\lambda = \frac{v}{\cos\varphi_1}$ и $t = \lambda.\sin\varphi_1 = v.\,tg\,\varphi_1$ поэтому

$$\lambda^2 - t^2 = v^2$$

такъ что

$$t = \lambda\,.\,\sin\varphi_1\left(1 + \frac{v^2}{3}\right)$$

Полагая по предъидущему

$$\frac{v^2}{2\varkappa}\cdot tg\,\varphi_1 = \eta$$

и выражая t, λ, v и η въ секундахъ, получимъ:

$$t = \lambda\,.\,\sin\varphi_1\left(1 + \frac{2}{3\varkappa}\,\eta\,.\,cotg\,\varphi_1\right)$$

Если x малая величина, то вообще

$$\sin(\varphi_1 + x) = \sin\varphi_1 + \frac{x}{\varkappa}\cdot\cos\varphi_1 = \sin\varphi_1\left(1 + \frac{x}{\varkappa}\;cotg\,\varphi_1\right)$$

Такъ какъ η малая величина, то подобно этому

$$\sin\varphi_1\left(1 + \frac{2}{3\varkappa}\cdot\eta\,.\,cotg\,\varphi_1\right) = \sin\left(\varphi_1 + \frac{2}{3}\eta\right)$$

и слѣдовательно:

$$t = \lambda \,.\, sin\left(\varphi_1 + \frac{2}{3}\eta\right)$$

Собирая вмѣстѣ всѣ предъидущіе выводы, получимъ слѣдующую систему формулъ для рѣшенія прямой геодезической задачи:

$$\left.\begin{array}{ll}
\varepsilon = [4]\, s^2 \,.\, sin\,\alpha \,.\, cos\,\alpha & \varphi_1 = \varphi_0 - \eta \\
u = [1]_n\, s.\, cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon\right) & \lambda = \dfrac{v}{cos\left(\varphi_1 + \frac{1}{3}\eta\right)} \\
v = [2]_0\, s.\, sin\left(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon\right) & t = \lambda \,.\, sin\left(\varphi_1 + \frac{2}{3}\eta\right) \\
\varphi_0 = \varphi + u & \omega_1 = \omega + \lambda \\
\varphi_n = \dfrac{\varphi + \varphi_0}{2} & \alpha_1 = 180^\circ + \alpha - \varepsilon + t \\
\eta = [3]_0 \,.\, v^2 \,.\, tg\,\varphi_0 &
\end{array}\right\} \quad (110)$$

гдѣ

$$[1] = lg\frac{\varkappa}{\rho} \qquad [2] = lg\frac{\varkappa}{p} \qquad [3] = lg\frac{p}{2\rho\varkappa} \quad \text{и} \quad [4] = lg\frac{\varkappa}{2\rho p}$$

Когда разстояніе s не превосходитъ 10—15 верстъ, то величины ε и η оказываются столь малыми, что онѣ не измѣняютъ тригонометрическихъ величинъ α и φ_1; тогда предъидущія формулы могутъ быть замѣнены болѣе простыми:

$$\left.\begin{array}{ll}
\varepsilon = [4]\, s^2 \,.\, sin\,\alpha\, cos\,\alpha & \varphi_1 = \varphi_0 - \eta \\
u = [1]_n \,.\, s.\, cos\,\alpha & \lambda = \dfrac{v}{cos\,\varphi_1} \\
v = [2]_0 \,.\, s.\, sin\,\alpha & t = \lambda \,.\, sin\,\varphi_1 \\
\varphi_0 = \varphi + u & \omega_1 = \omega + \lambda \\
\varphi_n = \dfrac{\varphi + \varphi_0}{2} & \alpha_1 = 180^\circ + \alpha - \varepsilon + t \\
\eta = [3]_0 \,.\, v^2 .\, tg\,\varphi_0 &
\end{array}\right\} \quad (111)$$

Примѣчанія: 1) По обѣимъ системамъ формулъ (110) и (111) вычисленіе начинается съ приближеннаго опредѣленія величины u, которая необходима для первоначальнаго знанія φ_0 и φ_n, чтобы найти въ геодезическихъ таблицахъ значенія

[1], [2], [3] и [4]. Послѣднія мѣняются съ широтою весьма медленно и знаніе широтъ φ_0 и φ_n до $5''$ уже достаточно, чтобы пріискать ихъ вѣрно до седьмого десятичнаго знака. Такое приближенное вычисленіе дѣлается по формулѣ:

$$u = [1] . s. \cos \alpha$$

въ которой [1], равно какъ [4] въ формулѣ для вычисленія избытка ε берутся для данной широты φ.

2) Величины [1], [2], [3] и [4] даны въ концѣ книги по аргументу φ, черезъ каждыя $10'$, что вполнѣ достаточно, потому что разности ихъ для сосѣднихъ аргументовъ почти постоянны. Но если приходится вычислять географическія координаты многихъ точекъ, имѣющихъ близкія широты, напримѣръ координаты точекъ цѣлой сѣти треугольниковъ, покрывающихъ одну губернію, то для удобства интерполированія не лишне развить таблицы названныхъ величинъ и вычислить ихъ черезъ $1'$; въ этомъ случаѣ интерполированіе дѣлается уже просто на глазъ.

3) Величина ε, представляющая сферическій избытокъ треугольника ABC (черт. 191), конечно всегда положительная величина, но при вычисленіи формулъ (110) и (111) она какъ поправочный членъ оказывается величиною отрицательною для азимутовъ, лежащихъ во второй и четвертой четвертяхъ. Тутъ нѣтъ никакого противорѣчія, потому что, построивъ треугольникъ ABC для $\alpha > 90°$ и $< 180°$ или для $\alpha > 270°$ и $< 360°$, легко видѣть, что уменьшеніе угла BAC на $^1/_3$ избытка (по теоремѣ Лежандра) увеличиваетъ на ту же величину азимутъ α.

4) Если тріангуляція велась по плоскогорію, средняя высота котораго очень значительна, то приведеніе базиса и, слѣдовательно, всѣхъ сторонъ къ уровню океана можетъ оказаться неудобнымъ, въ смыслѣ неточности послѣдующей съемки. Въ такомъ случаѣ цѣлесообразнѣе привести базисъ только къ средней высотѣ страны. Но тогда нельзя, конечно, вычислять географическія координаты съ таблицами, составленными для уровенной поверхности океана. Однако нѣтъ никакой надобности составлять новыя таблицы; достаточно ко всѣмъ величинамъ [1], [2].... прибавить разности логариѳмовъ увеличен-

ныхъ радіусовъ кривизны по меридіану и первому вертикалу и ихъ значеній для принятаго сфероида.

Числовые примѣры.

1) Большое разстояніе, формулы (110).

Даны для сигнала Пулково:

$$\varphi = 59^\circ 46' 16''.000,\ \ \omega = -0^\circ 0' 13''.650$$

Азимутъ и разстояніе на Молосковицы:

$$\alpha = 240^\circ 24' 20''.94,\ lg\,s = 4.573\,5591$$

$$\begin{aligned}
[4] &= 2.0608\\
lg\,s^2 &= 9.1471\\
lg\,sin\,\alpha &=_n 9.9393\\
lg\,cos\,\alpha &=_n 9.6936\\
lg\,\varepsilon &= 0.8408\\
\varepsilon &= +6''.93\\
\frac{\varepsilon}{3} &= +2\ .31\\
lg\,s\,cos\,\alpha &=_n 4.2672\\
[1] &= 8.8385\\
lg\,u &=_n 3.1057\\
u &= -21'15''\\
lg\,v^2 &= 6.70117\\
lg\,tg\,\varphi_0 &= 0.22841\\
[3]_0 &= 4.38531\\
lg\,\eta &= 1.31486
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon &= 240^\circ 24' 18''.63\\
\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon &= 240\ 24\ 16\ .32\\
lg\,sin\left(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon\right) &=_n 9.939\,2894\\
[2]_0 &= 8.837\,7351\\
lg\,s &= 4.573\,5591\\
[1]_n &= 8.838\,4924\\
lg\,cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon\right) &=_n 9.693\,6154\\
lg\,u &=_n 3.105\,6669\\
180^\circ + \alpha - \varepsilon &= 60^\circ 24' 14''.01\\
t &= -\ \ 1\ \ 3\ 12\ .60\\
\lambda &= -\ \ 1\ 13\ 25\ .518
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= 59^\circ 46' 16''.000\\
u &= -\ 21\ 15\ .460\\
\varphi_0 &= 59\ 25\ \ 0\ .540\\
-\eta &= \ \ \ -\ 20\ .649\\
\varphi_1 &= 59\ 24\ 39\ .891\\
\varphi_1 + \frac{1}{3}\eta &= 59\ 24\ 46\ .774\\
\varphi_1 + \frac{2}{3}\eta &= 59\ 24\ 53\ .657\\
lg\,v &=_n 3.350\,5836\\
lg\,cos\left(\varphi_1 + \frac{1}{3}\eta\right) &= 9.706\,5866\\
lg\,\lambda &=_n 3.643\,9970\\
lg\,sin\left(\varphi_1 + \frac{2}{3}\eta\right) &= 9.934\,9398\\
lg\,t &=_n 3.578\,9368
\end{aligned}$$

Получено:

$$\varphi_1 = 59^\circ 24' 39''.891 \quad \omega_1 = -1^\circ 13' 39''.168 \quad \alpha_1 = 59^\circ 21' 1''.41$$

2) Малое разстояніе, формулы (111)

Даны: $\varphi = 46°24'53''.317$ $\omega = +17°33'36''.958$

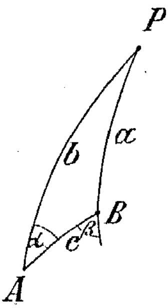
$\alpha = 26\ 24\ 44\ .2$ $lg\, s = 3.588\,213$

$[4] = 2.0621$	$lg\, sin\, \alpha = 9.648\,191$
$lg\, s^2 = 7.1764$	$[2]_0 = 8.838\,054$
$lg\, sin\, \alpha = 9.6482$	$lg\, s = 3.588\,213$
$lg\, cos\, \alpha = 9.9521$	$[1]_n = 8.839\,465$
$lg\, \varepsilon = 8.8388$	$lg\, cos\, \alpha = 9.952\,122$
	$lg\, u = 2.379\,800$
$\varepsilon = +0''.07$	
	$lg\, v = 2.074\,458$
$lg\, .\, s\, cos\, \alpha = 3.5403$	$lg\, cos\, \varphi_1 = 9.837\,960$
$[1] = 8.8395$	$lg\, \lambda = 2.236\,498$
$lg\, u = 2.3798$	$lg\, sin\, \varphi_1 = 9.860\,428$
$u = +4'0''$	$lg\, t = 2.096\,926$
$lg\, v^2 = 4.14892$	$u = +3'59''.7728$
$lg\, tg\, \varphi_0 = 0.02247$	$\varphi_0 = 46°28'53''.0898$
$[3]_0 = 4.38595$	$\eta = \quad -0\ .0361$
$lg\, \eta = 8.55734$	$\lambda = +2'52\ .384$
	$t = +2\ \ 5\ .00$
	$180° + \alpha - \varepsilon = 206°24\ 44\ .13$

Получено:

$\varphi_1 = 46°28'53''.054$ $\omega_1 = +17°36'29''.342$ $\alpha_1 = 206°26'49''.13$

136. Формулы Гаусса. Для вывода формулъ Гаусса, при помощи которыхъ прямая (и обратная) геодезическая задача можетъ быть рѣшаема при разстояніяхъ въ 200 и даже болѣе верстъ, допустимъ сперва, что данная и опредѣляемая точки лежатъ не на сфероидѣ, а на шарѣ. Въ такомъ случаѣ дуга большого круга, соединяющая эти точки и ихъ меридіаны, образуютъ обыкновенный сферическій треугольникъ PAB (черт. 193) со сторонами c, a и b, для котораго имѣемъ слѣдующія три формулы, извѣстныя подъ названіемъ *аналогій Непера:*



Черт. 193.

$$1)\quad tg\,\frac{b-a}{2} = tg\,\frac{c}{2}\cdot\frac{sin\,\frac{B-A}{2}}{sin\,\frac{B+A}{2}}$$

$$2)\quad tg\,\frac{b+a}{2} = tg\,\frac{c}{2}\cdot\frac{cos\,\frac{B-A}{2}}{cos\,\frac{B+A}{2}}$$

$$3)\quad tg\,\frac{B-A}{2} = cotg\,\frac{P}{2}\cdot\frac{sin\,\frac{b-a}{2}}{sin\,\frac{b+a}{2}}$$

Если широты точекъ A и B назовемъ черезъ φ и φ_1, разность ихъ долготъ черезъ λ, а азимуты дуги AB въ точкѣ A черезъ α, и въ точкѣ B черезъ $\alpha_1 = 180^\circ + \beta$, то въ вышестоящихъ формулахъ надо положить:

$$b = 90^\circ - \varphi \qquad a = 90^\circ - \varphi_1$$
$$A = \alpha \qquad B = 180^\circ - \beta \qquad P = \lambda$$

такъ что получится

$$1)\quad tg\,\frac{\varphi_1-\varphi}{2} = tg\,\frac{c}{2}\cdot\frac{cos\,\frac{\beta+\alpha}{2}}{cos\,\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$2)\quad cotg\,\frac{\varphi_1+\varphi}{2} = tg\,\frac{c}{2}\cdot\frac{sin\,\frac{\beta+\alpha}{2}}{sin\,\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$3)\quad cotg\,\frac{\beta+\alpha}{2} = cotg\,\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{sin\,\frac{\varphi_1-\varphi}{2}}{cos\,\frac{\varphi_1+\varphi}{2}}$$

Введя для краткости обозначенія:

$$\theta = \varphi_1 - \varphi \qquad \delta = \beta - \alpha$$
$$\varphi_n = \frac{\varphi_1+\varphi}{2} \qquad \alpha_n = \frac{\beta+\alpha}{2}$$

и вставляя въ третью формулу вмѣсто $sin\,\frac{\theta}{2}$ равнозначущее ему выраженіе $tg\,\frac{c}{2}\cdot\frac{cos\,\alpha_n}{cos\,\frac{\delta}{2}}\cdot cos\,\frac{\theta}{2}$ изъ первой, получимъ:

$$1)\ tg\,\frac{\theta}{2} = tg\,\frac{c}{2}\cdot\frac{\cos\alpha_n}{\cos\frac{\delta}{2}}$$

$$2)\ \sin\frac{\delta}{2} = tg\,\frac{c}{2}\cdot\sin\alpha_n\,.\,tg\,\varphi_n$$

$$3)\ tg\,\frac{\lambda}{2} = tg\,\frac{c}{2}\,.\,\sin\alpha_n\,.\,\sec\varphi_n\,.\,\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\delta}{2}}$$

Разложимъ тригонометрическія величины малыхъ угловъ θ, c, δ и λ въ ряды; ограничиваясь членами до 4-го порядка, имѣемъ:

$$1)\qquad \frac{\theta}{2}+\frac{\theta^3}{24} = \left(\frac{c}{2}+\frac{c^3}{24}\right)\cdot\frac{\cos\alpha_n}{1-\frac{\delta^2}{8}}$$

$$\theta = c\,.\,\cos\alpha_n\left(1+\frac{c^2}{12}\right)\cdot\left(1-\frac{\delta^2}{8}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{\theta^2}{12}\right)^{-1}$$

$$\theta = c\,.\,\cos\alpha_n\left(1+\frac{c^2}{12}+\frac{\delta^2}{8}-\frac{\theta^2}{12}\right)$$

$$2)\qquad \frac{\delta}{2}-\frac{\delta^3}{48} = \left(\frac{c}{2}+\frac{c^3}{24}\right).\,\sin\alpha_n\,.\,tg\,\varphi_n$$

$$\delta = c\,.\,\sin\alpha_n\,.\,tg\,\varphi_n\left(1+\frac{c^2}{12}\right)\cdot\left(1-\frac{\delta^2}{24}\right)^{-1}$$

$$\delta = c\,.\,\sin\alpha_n\,.\,tg\,\varphi_n\left(1+\frac{c^2}{12}+\frac{\delta^2}{24}\right)$$

$$3)\qquad \frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^3}{24} = \left(\frac{c}{2}+\frac{c^3}{24}\right).\,\sin\alpha_n\,.\,\sec\varphi_n\,.\,\frac{1-\frac{\theta^2}{8}}{1-\frac{\delta^2}{8}}$$

$$\lambda = c\,.\,\sin\alpha_n\,.\,\sec\varphi_n\left(1+\frac{c^2}{12}\right)\cdot\left(1-\frac{\theta^2}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{\delta^2}{8}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{\lambda^2}{12}\right)^{-1}$$

$$\lambda = c\,.\,\sin\alpha_n\,.\,\sec\varphi_n\left(1+\frac{c^2}{12}-\frac{\theta^2}{8}+\frac{\delta^2}{8}-\frac{\lambda^2}{12}\right)$$

Чтобы упростить выраженія, заключенныя въ скобки, замѣтимъ, что въ первомъ приближеніи

$$\theta = c\,.\,\cos\alpha_n$$

$$\delta = c\,.\,\sin\alpha_n\,.\,tg\,\varphi_n$$

$$\lambda = c\,.\,\sin\alpha_n\,.\,\sec\varphi_n$$

Сложивъ квадратъ первой величины съ разностью квадратовъ третьей и второй, получимъ соотношеніе:

$$\theta^2 + \lambda^2 - \delta^2 = c^2$$

Замѣнивъ теперь въ первой и третьей изъ вышестоящихъ формулъ $c^2 - \theta^2$ черезъ $\lambda^2 - \delta^2$ и $\delta^2 - \theta^2$ черезъ $\lambda^2 - c^2$, получимъ:

$$1)\qquad \theta = c \,.\, \cos\alpha_n \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} + \frac{\delta^2}{24}\right)$$

$$2)\qquad \delta = c \,.\, \sin\alpha_n \,.\, tg\,\varphi_n \left(1 + \frac{c^2}{12} + \frac{\delta^2}{24}\right)$$

$$3)\qquad \lambda = c \,.\, \sin\alpha_n \,.\, \sec\varphi_n \left(1 - \frac{c^2}{24} + \frac{\lambda^2}{24}\right)$$

Въ этихъ формулахъ величины θ, δ и λ, равно какъ и c, выражены въ дугѣ при радіусѣ 1; чтобы выразить ихъ въ секундахъ, а равно перейти отъ шара къ сфероиду, надо въ первой формулѣ, представляющей разность широтъ, вмѣсто c подставить $[1]_n \,.\, s$, а въ остальныхъ двухъ, представляющихъ разности азимутовъ и долготъ, вмѣсто того же c подставить $[2]_n \,.\, s$, гдѣ s — длина стороны c въ линейной мѣрѣ (въ саженяхъ), а величины $[1]$ и $[2]$ имѣютъ значеніе, объясненное въ предъидущемъ § и берутся изъ геодезическихъ таблицъ для средней широты φ_n. Такимъ образомъ будетъ въ секундахъ:

$$1)\qquad \theta = [1]_n \,.\, s \,.\, \cos\alpha_n \left(1 + \frac{\lambda^2}{12\chi^2} + \frac{\delta^2}{24\chi^2}\right)$$

$$2)\qquad \delta = [2]_n \,.\, s \,.\, \sin\alpha_n\, tg\,\varphi_n \left(1 + \frac{c^2}{12\chi^2} + \frac{\delta^2}{24\chi^2}\right)$$

$$3)\qquad \lambda = [2]_n \,.\, s \,.\, \sin\alpha_n \,.\, \sec\varphi_n \left(1 - \frac{c^2}{24\chi^2} + \frac{\lambda^2}{24\chi^2}\right)$$

Логариѳмируя эти выраженія, замѣчая, что для малой величины x вообще

$$lg\,(1 + x) = M \,.\, x$$

гдѣ M—модуль Бригговыхъ логариѳмовъ, и означая для краткости

$$\frac{M}{12\,\chi^2} = k$$

получимъ окончательно

$$\left.\begin{aligned}
lg\,\theta &= lg\,\theta_0 + k\lambda_0^2 + \tfrac{1}{2}\,k\delta_0^2 \quad \text{гдѣ}\quad \theta_0 = [1]_n \,.\, s \,.\, cos\,\alpha_n \\
lg\,\delta &= lg\,\delta_0 + kc^2 + \tfrac{1}{2}\,k\delta_0^2 \quad \text{»}\quad \delta_0 = [2]_n \,.\, s \,.\, sin\,\alpha_n\, tg\,\varphi_n \\
lg\,\lambda &= lg\,\lambda_0 - \tfrac{1}{2}\,kc^2 + \tfrac{1}{2}k\lambda_0^2 \quad \text{»}\quad \lambda_0 = [2]_n \,.\, s \,.\, sin\,\alpha_n\, sec\,\varphi_n
\end{aligned}\right\} \quad (112)$$

$c^2 = [1]\,[2]\,s^2$, значенія $[1]$, $[2]$ см. стр. 504, $lg\,k = 7.9298 - 20$

$$\alpha_n = \frac{\beta' + \alpha}{2} \qquad \varphi_n = \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}$$

$$\varphi_1 = \varphi + \theta \qquad \omega_1 = \omega + \lambda \qquad \alpha_1 = 180^\circ + \alpha + \delta$$

Повѣркою вычисленія поправочныхъ членовъ этихъ формулъ можетъ служить простое соотношеніе: разность поправокъ для θ и δ вдвое больше поправки для λ.

Такъ какъ во вторыя части формулъ (112) входятъ неизвѣстныя сперва величины α_n и φ_n, то по формуламъ Гаусса задача рѣшается не сразу, а послѣдовательными приближеніями. Имѐнно сперва вмѣсто α_n и φ_n берутъ просто данныя α и φ и разности θ и δ вычисляютъ по формуламъ

$$\theta = [1]\,.\,s\,.\,cos\,\alpha$$

$$\delta = [2]\,.\,s\,.\,sin\,\alpha\,.\,tg\,\varphi$$

Съ этими величинами получаютъ первыя приближенія для φ_1 и α_1; потомъ, составивъ φ_n и α_n какъ среднія изъ данныхъ и этихъ первыхъ приближеній повторяютъ вычисленія и получаютъ вторыя приближенія, затѣмъ подобнымъ же образомъ получаютъ третьи и т. д. до тѣхъ поръ, пока одно изъ слѣдующихъ приближеній не дастъ тѣхъ же результатовъ, что и предъидущее. Послѣ этого останется ужъ только однажды вычислить разность долготъ λ. На практикѣ приближенія сходятся весьма быстро, и третье приближеніе обыкновенно есть окончательное. Опытные вычислители ограничиваются даже двумя приближеніями, взявъ для перваго приближенія величину φ_1 прямо съ карты крупнаго масштаба и оцѣнивъ разность азимутовъ по соображенію.

Формулы Гаусса особенно хороши какъ повѣрочныя. Если задача уже рѣшена по другимъ формуламъ, напримѣръ по формуламъ Кларка, и слѣдовательно искомыя извѣстны, то по формуламъ Гаусса можно вторично вычислить разности широтъ, азимутовъ и долготъ сразу, безъ всякихъ приближеній, и такъ какъ вычислитель пройдетъ черезъ другія числа, то тождество результатовъ послужитъ весьма надежною повѣркою.

Необходимо еще замѣтить, что поправочные члены логариѳмовъ формулъ (112) обыкновенно очень малы, и при разстояніи въ 20 — 25 верстъ, больше чего стороны треугольниковъ вообще встрѣчаются не часто, почти нули; поэтому для небольшихъ разстояній достаточно вычислить только величины θ_0, δ_0 и λ_0.

Числовые примѣры:

1) *Большое разстояніе, полныя формулы* (112).

Даны: $\varphi = 59^\circ 46' 16''.000$, $\omega = -0^\circ 0' 13''.650$, $\alpha = 240^\circ 24' 20''.94$, $lg\, s = 4.573\ 5591$

	I прибл.	II прибл.	III прибл.	IV прибл.	V прибл.
φ_n	59°46′	59°35′38″	59°35′27″.85	59°35′27″.98	59°35′27″.947
α_n	240 24	239 52 18	239 52 41 .14	239 52 41 .23	239 52 41 .17
$lg\, cos\, \alpha_n$	${}_n$9.693 68	${}_n$9.700 65	${}_n$9.700 5666	${}_n$9.700 5662	${}_n$9.700 5665
$[1]_n$	8.838 48	8.838 49	8.838 4926	8.838 4926	8.838 4926
$lg\, s$	4.573 56	4.573 56	4.573 5591	4.573 5591	4.573 5591
$[2]_n$	8.837 73	8.837 73	8.837 7311	8.837 7311	8.837 7311
$lg\, sin\, \alpha_n$	${}_n$9.939 27	${}_n$9.936 97	${}_n$9.936 9958	${}_n$9.936 9959	${}_n$9.936 9958
$lg\, tg\, \varphi_n$	0.234 49	0.231 48	0.231 4314	0.231 4320	0.231 4319
				+ 227	+ 227
$lg\, \theta_0$	${}_n$3.105 72	${}_n$3.112 70	${}_n$3.112 6183	${}_n$3.112 6179	${}_n$3.112 6182
θ_0	− 21′16″	−21′36″.3	− 21′36″.04	−21′36″.106	−21′36″.107
				+ 118	+ 118
$lg\, \delta_0$	${}_n$3.585 05	${}_n$3.579 74	${}_n$3.579 7174	${}_n$3.579 7181	${}_n$3.579 7179
δ_0	− 1°4′6″	−1°3′19″.6	− 1°3′19″.42	− 1°3′19″.53	− 1°3′19″.53
$lg\, \lambda_0^2 = 7.2880$	$k\lambda_0^2 = 0.000\ 0165.1$		$lg\, [2]_n . s . sin\, \alpha_n$	${}_n$3.348 2861	${}_n$3.348 2860
$lg\, \delta_0^2 = 7.1594$	$k\delta_0^2 = 0.000\ 0122.8$		$lg\, cos\, \varphi_n$	9.704 2944	9.704 2945
$lg\, c^2 = 6.8234$	$kc^2 = 0.000\ 0056.7$		$lg\, \lambda_0$	${}_n$3.643 9917	${}_n$3.643 9915
					+ 54
			λ_0		−1°13′25″.517

Получено:

$$\varphi_1 = 59^\circ 24' 39''.893 \quad \omega_1 = -1^\circ 13' 39''.167 \quad \alpha_1 = 59^\circ 21' 1''.41$$

2) *Малое разстояніе, сокращенныя формулы (112).*

(безъ поправочныхъ членовъ).

Даны: $\varphi = 46^\circ 24' 53''.317$, $\omega = +17^\circ 33' 36''.958$, $\alpha = 26^\circ 24' 44''.2$,

$$lg\, s = 3.588\,213$$

	I прибл.	II прибл.
φ_n	$46^\circ 25'$	$46^\circ 26' 53''.2$
α_n	26 25	26 25 46 .6
$lg\cos\alpha_n$	9.952 11	9.952 057
$[1]_n$	8.839 47	8.839 465
$lg\, s$	3.588 21	3.588 213
$[2]_n$	8.838 06	8.838 055
$lg\sin\alpha_n$	9.648 26	9.648 456
$lg\, tg\,\varphi_n$	0.021 49	0.021 962
$lg\,\theta_0$	2.379 79	2.379 735
θ_0	$+3' 59''.8$	$+3' 59''.737$
$lg\,\delta_0$	2.096 02	2.096 686
δ_0	$+2' 4''.8$	$+2' 4''.935$

$$lg\,[2]_n . s . \sin\alpha_n = 2.074\,724$$
$$lg\cos\varphi_n = 9.838\,226$$
$$lg\,\lambda = 2.236\,498$$
$$\lambda = +2' 52''.384$$

Получено:

$$\varphi_1 = 46^\circ 28' 53''.054$$
$$\omega_1 = +17\ 36\ 29\ .342$$
$$\alpha_1 = 206\ 26\ 49\ .13$$

137. Формулы Гельмерта. Когда разстояніе между точками на земной поверхности больше 200 верстъ, то вышеприведенныя формулы дѣлаются неточными. Конечно, формулы Гаусса можно было бы развить дальше, т. е. принять въ разсчетъ высшіе члены разложеній въ ряды, но при очень большихъ разстояніяхъ и это не принесло бы пользы: самые ряды стали бы расходящимися. Правда, стороны дѣйствительныхъ треугольниковъ превосходятъ 200 верстъ лишь въ крайне рѣдкихъ, исключительныхъ случаяхъ. Обыкновенно же, когда нужно вычислить географическія координаты очень отдаленной точки, то вычисляютъ ихъ послѣдовательно, начиная отъ начальной и проходя черезъ всѣ промежуточныя, разстоянія между которыми всегда достаточно малы. Однако можетъ представиться надобность вычислить географическія координаты весьма отдаленной точки по ея полярнымъ координатамъ; напримѣръ, когда географическія координаты промежуточныхъ точекъ вовсе не требуется знать, или же когда желаютъ повѣрить результаты послѣдовательнаго вычисленія черезъ промежуточныя точки.

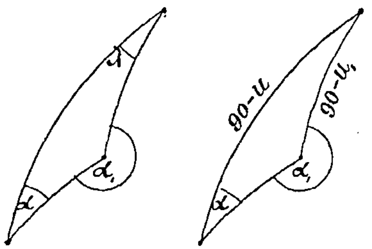
Вопросомъ о рѣшеніи прямой геодезической задачи для произвольнаго разстоянія на сфероидѣ занимались *Бессель*, *Ганзенъ* и другіе. Сущность предложенныхъ ими способовъ заключается въ томъ, что отъ сфероидическаго треугольника, составленнаго данною геодезическою линіею, соединяющею обѣ точки, и ихъ эллиптическими меридіанами, переходятъ къ треугольнику сферическому, у котораго двѣ стороны равны дополненіямъ до приведенныхъ широтъ разсматриваемыхъ точекъ, а углы при точкахъ равны взаимнымъ азимутамъ; третья же сторона и противолежащій ей уголъ хотя и не равны соотвѣтствующему геодезическому разстоянію и разности долготъ сфероидическаго треугольника, но отличаются отъ нихъ такъ мало, что могутъ быть представлены весьма быстро сходящимися рядами. Наиболѣе простыя формулы для рѣшенія прямой геодезической задачи для произвольнаго разстоянія на сфероидѣ предложены Бесселемъ. Здѣсь приведены лишь окончательные результаты почти въ томъ же упрощенномъ, преобразованномъ и удобномъ для числовыхъ выкладокъ видѣ, въ какомъ онѣ даны *Гельмертомъ* и выведены въ его трактатѣ Die Mathematischen und Physikalischen Theorieen der Höheren Geodäsie (I, 223—247). Нижеприведенныя формулы, правило знаковъ и числовой примѣръ достаточны, чтобы каждый могъ рѣшить разсматриваемую геодезическую задачу въ любомъ частномъ случаѣ *).

---

*) Весьма простой, хотя и болѣе длинный путь рѣшенія прямой геодезической задачи для очень большого разстоянія заключается въ томъ, что данную линію разбиваютъ на участки, каждый не болѣе 200 верстъ, и вычисляютъ географическія координаты (по правиламъ §§ 135 или 136) послѣдовательно отъ одной промежуточной точки къ другой, переходя отъ обратнаго азимута на предъидущую точку къ прямому азимуту на послѣдующую простымъ прибавленіемъ 180°.

Даны географическая широта φ и долгота ω точки на сфероидѣ, а также азимутъ α и разстояніе s до другой; требуется вычислить географическую широту φ_1 и долготу ω_1 другой точки и обратный азимутъ α_1 на первую (черт. 194).

Прежде всего вычисляютъ вспомогательныя величины u, v, p и w; m, n, v_0 и σ_0:



Черт. 194.

$$\left.\begin{aligned} tg\,u &= \sqrt{1-e^2}\,.\,tg\,\varphi \\ tg\,v &= cotg\,u\,.\,cos\,\alpha \\ tg\,p &= sin\,v\,.\,tg\,\alpha \\ tg\,w &= \frac{tg\,v}{sin\,p} \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

$$\left.\begin{aligned} tg\,m &= \sqrt{\delta}\,.\,cos\,p \\ n &= tg^2\,\frac{m}{2} \\ v_0 &= 2v + (\varkappa n)\,.\,sin\,2v \\ lg\,\sigma_0'' &= lg\,s + lg\,\frac{\varkappa}{b} + 2\,lg\,cos\,\frac{m}{2} - \frac{5}{4}\,Mn^2 \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Далѣе вычисляютъ рядъ:

$$\sigma = \sigma_0'' - A\,.\,cos\,(v_0 - \sigma_0)\,.\,sin\,\sigma_0 + B\,.\,cos\,2\,(v_0 - \sigma_0)\,.\,sin\,2\sigma_0 \quad (c)$$

въ которомъ

$$A = \varkappa\,.\,n \qquad B = \frac{5}{8}\,\varkappa\,.\,n^2$$

$$v_1 = v - \sigma$$

Наконецъ точныя формулы:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\alpha_1 &= \frac{tg\,p}{sin\,v_1} \\ tg\,u_1 &= -\,cos\,\alpha_1\,cotg\,v_1 \\ tg\,w_1 &= \frac{tg\,v_1}{sin\,p} \\ tg\,\varphi_1 &= \frac{tg\,u_1}{\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

рядъ:

$$\lambda = w - w_1 - sin\,p\,\{A_1\,.\,\sigma'' - B_1\,cos\,(v + v_1)\,sin\,\sigma\}$$

въ которомъ

$$lg\,A_1 = lg\,\mu - \frac{1}{2}M\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)n \qquad lg\,B_1 = lg\,\frac{1}{4}e^2 . \varkappa . n$$

и

$$\omega_1 = \omega + \lambda$$

Величины e, μ, δ и b суть элементы земного сфероида. Для сфероида Кларка (1880) имѣемъ слѣдующія постоянныя:

$$lg\sqrt{1-e^2} = 9.998\,5176 \qquad lg\,\mu = 7.532\,44$$

$$lg\sqrt{\delta} = 8.917\,85 \qquad lg\,\frac{1}{2}M\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = 9.336\,01$$

$$lg\,\frac{\varkappa}{b} = 8.840\,3151 \qquad lg\,\frac{1}{4}e^2 . \varkappa = 2.545\,10$$

Кромѣ того неизмѣнныя:

$$lg\,\varkappa = 5.314\,43 \qquad lg\,\frac{5}{4}M = 9.734\,69$$

$$lg\,\frac{5}{8}\varkappa = 5.110\,31$$

Необходимо замѣтить, что величины m и n, а также добавочные члены въ рядахъ для σ и λ достаточно вычислять пятизначными логариѳмами, прочія величины—смотря по надобности—семи или восьмизначными.

Хотя знаки вспомогательныхъ величинъ опредѣляются непосредственно по формуламъ, но для облегченія соображеній вотъ таблица для знаковъ v, p, w и w_1, въ зависимости отъ величины даннаго азимута α:

α	v	p	w	w_1
0°	90°—u	0	+90°	+90°
0— 90	+	+	+	+
90	0	90°—u	0	—
90—180	—	+	—	—
180	u—90°	0	—90°	—90°
180—270	—	—	+	+
270	0	u—90°	0	—
270—360	+	—	—	—

Что касается обратнаго азимута α_1, то всегда легко сообразить, въ какой четверти окружности онъ будетъ находиться: если данный азимутъ α заключается между $0°$ и $180°$, то обратный азимутъ α_1 между $180°$ и $360°$, и наоборотъ.

Числовой примѣръ. Даны широта $\varphi = 59°56'30''$ и долгота $\omega = +30°18'23''$ С.-Петербурга (Обсерваторія Академіи Наукъ отъ Гринвича), азимутъ $\alpha = 56°41'23''.89$ и разстояніе $lg\, s = 6.487\,6046$ (въ саженяхъ) на Владивостокъ; вычислить широту и долготу Владивостока и обратный азимутъ изъ Владивостока на С.-Петербургъ.

Прежде всего по геодезическимъ таблицамъ находимъ $\varphi - u = 5'5''.48$, слѣдовательно приведенная широта С.-Петербурга $u = 59°51'24''.52$. Затѣмъ по формуламъ (a) имѣемъ:

$lg\, cotg\, u = 9.763\,9423$	$lg\, sin\, v = 9.482\,6179$	$lg\, tg\, v = 9.503\,6484$
$lg\, cos\, \alpha = 9.739\,7061$	$lg\, tg\, \alpha = 0.182\,3502$	$lg\, sin\, p = 9.622\,9008$
$lg\, tg\, v = 9.503\,6484$	$lg\, tg\, p = 9.664\,9681$	$lg\, tg\, w = 9.880\,7476$
$v = 17°41'14''.10$	$p = 24°48'47''.96$	$w = 37°13'50''.30$

Далѣе по формулѣ (b):

$lg \sqrt{\delta} = 8.917\,85$	$2v = 35°22'28''$	$lg\, s = 6.487\,6046$
$lg\, cos\, p = 9.957\,93$	$lg\, \varkappa n = 2.462\,69$	$lg\, \frac{b}{\varkappa} = 8.840\,3151$
$lg\, tg\, m = 8.875\,78$	$lg\, sin\, 2v = 9.762\,61$	$2 lg\, cos \frac{m}{2} = 9.999\,3896$
$m = 4°17'46''$	$2.225\,30$	
$\frac{m}{2} = 2\;\;8\;53$	$\varkappa . n . sin\, 2v = 168'' = 2'48''$	$\frac{5}{4}\, Mn^2 \qquad -11$
	$v_0 = 35°25'16''$	$lg\, \sigma_0'' = 5.327\,3082$
$lg\, tg \frac{m}{2} = 8.574\,13$		$\sigma_0 = 212\,475''.17 = 59°1'15''.17$
$lg\, n = 7.148\,26$		

рядъ (c):

$v_0 - \sigma_0 = -23°35'59''$	$lg\, A = 2.462\,69$	$lg\, B = 9.406\,83$
$2(v_0 - \sigma_0) = -47\;\;11\;\;58$	$lg\, cos (v_0 - \sigma_0) = 9.962\,07$	$lg\, cos\, 2(v_0 - \sigma_0) = 9.832\,15$
$\sigma = 58°57'27''.33$	$lg\, sin\, \sigma_0 = 9.933\,16$	$lg\, sin\, 2\sigma_0 = 9.945\,76$
$v_1 = -41\;\;16\;\;13\;.23$	$2.357\,92$	$9.184\,74$
	$+\,227''.99$	$+\,0''.15$

Наконецъ по формуламъ (d):

$$\begin{array}{lll}
lg\,tg\,p = 9.664\,9681 & lg\cos\alpha_1 = 9.913\,2156 & lg\,tg\,v_1 =_n 9.943\,2989 \\
lg\sin v_1 =_n 9.819\,2890 & lg\,cotg\,v_1 =_n 0.056\,7011 & lg\sin p = 9.622\,9008 \\
\hline
lg\,tg\,\alpha_1 =_n 9.845\,6791 & lg\,tg\,u_1 = 9.969\,9167 & lg\,tg\,w_1 =_n 0.320\,3981 \\
\alpha_1 = 324^\circ 58' 19''.04 & lg\sqrt{1-e^2} = 9.998\,5176 & w_1 = -\ 64^\circ 26' 35''.77 \\
 & lg\,tg\,\varphi_1 = 9.971\,3991 & w - w_1 = +101\ 40\ 26\ .07 \\
 & \varphi_1 = 43^\circ 6' 53''.00 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
lg\,A_1 = 7.532\,14 & lg\,B_1 = 9.693\,36 & \{...\} = +722''.34 \\
lg\,\sigma'' = 5.326\,84 & lg\cos(v+v_1) = 9.962\,12 & lg\{...\} = 2.858\,74 \\
\hline
2.858\,98 & lg\sin\sigma = 9.932\,87 & lg\sin p = 9.622\,90 \\
+\ 722''.73 & 9.588\,35 & 2.481\,64 \\
 & 0''.39 & 303''.14 = 5'3''.14
\end{array}$$

$$\lambda = +\ 101^\circ 40' 26''.07 - 5'3''.14 = +\ 101^\circ 35' 22''.93$$

$$\omega_1 = +\ 131^\circ 53' 45''.93 \text{ (отъ Гринвича).}$$

138. Обратная геодезическая задача. Въ § 134 было уже упомянуто, что кромѣ прямой геодезической задачи приходится иногда рѣшать и обратную: по даннымъ широтамъ и долготамъ двухъ точекъ на земной поверхности найти ихъ линейное разстояніе и взаимные азимуты.

Обратная геодезическая задача рѣшается главнымъ образомъ въ тѣхъ случаяхъ, когда тригонометрическія работы примыкаютъ не къ одной, а къ двумъ или нѣсколькимъ астрономическимъ точкамъ. Вычисленное разстояніе и взаимные азимуты сравниваются съ полярными координатами (см. § 133), полученными изъ тріангуляціи. Такое сравненіе дастъ отличную повѣрку какъ наблюденій, такъ и вычисленій, а равно данныя для сужденія о точности наблюденій.

Помимо этого бываютъ случаи, когда безъ предварительнаго рѣшенія обратной геодезической задачи вовсе нельзя вычислять географическія координаты промежуточныхъ точекъ тріангуляціи. Такіе случаи представляются, когда на астрономическихъ точкахъ не были опредѣлены азимуты и извѣстны лишь ихъ широты и долготы. Пусть между такими двумя точками A и Q (черт. 17) проложена цѣпь треугольниковъ, всѣ углы и стороны которыхъ извѣстны. Неизвѣстность азимута α первой стороны AB не позволяетъ начать вычисленіе географическихъ координатъ вершинъ всѣхъ этихъ треугольниковъ. Но если рѣшить обратную задачу и получить азимутъ α' линіи AQ въ точкѣ A, а изъ вычисленія полярныхъ координатъ опредѣлить сферическій уголъ BAQ между первою стороною AB и діагональю AQ, то азимутъ α первой стороны получится простымъ вычитаніемъ этого угла изъ азимута α' діагонали AQ. Тогда не трудно примѣнить прямую геодезическую задачу и вычислить географическія координаты всѣхъ послѣдовательныхъ вершинъ цѣпи треугольниковъ.

Формулы для рѣшенія обратной геодезической задачи всего проще вывести изъ формулъ Гаусса для рѣшенія прямой (§ 136). Пусть даны широты φ и φ_1 и долготы ω и ω_1 двухъ точекъ; требуется вычислить разстояніе s между ними и взаимные азимуты α и α_1.

Составивъ разности

$$\theta = \varphi_1 - \varphi \quad \text{и} \quad \lambda = \omega_1 - \omega \tag{113a}$$

имѣемъ по раздѣленіи второй на третью и первой на третью изъ формулъ (112):

$$\left.\begin{aligned} \delta_0 &= \lambda \,.\, \sin\varphi_n \\ tg\,\alpha_n &= \frac{[1]_n}{[2]_n}\cdot\frac{\lambda}{\theta}\cdot\cos\varphi_n \\ s &= \frac{\theta}{[1]_n\,.\,\cos\alpha_n} \end{aligned}\right\} \tag{113b}$$

Здѣсь опущены значки $_0$ у θ и λ, и потому величины δ_0, α_n и s получатся, конечно, лишь приближенно, но однако достаточно точно для вычисленія поправочныхъ членовъ формулъ (112), такъ что теперь можно уже окончательно вычислить θ_0 и λ_0 по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} lg\,\theta_0 &= lg\,\theta - k\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\,k\delta^2 \\ lg\,\lambda_0 &= lg\,\lambda + \tfrac{1}{2}\,kc^2 - \tfrac{1}{2}\,k\lambda^2 \end{aligned}\right\} \tag{113c}$$

гдѣ

$$lg\,k = 7.9298 - 20 \quad \text{и} \quad c^2 = [1]\,[2]\,s^2$$

Далѣе повторяютъ вычисленіе по формуламъ (113b)

$$\left.\begin{aligned} \delta_0 &= \lambda_0 \,.\, sin\,\varphi_n \\ tg\,\alpha_n &= \frac{[1]_n}{[2]_n} \cdot \frac{\lambda_0}{\theta_0} \,.\, cos\,\varphi_n \end{aligned}\right\} \qquad (\mathbf{113}d)$$

Затѣмъ по второй изъ формулъ (112) имѣемъ:

$$lg\,\delta = lg\,\delta_0 + kc^2 + \frac{1}{2}\,k\delta_0{}^2$$

Повѣркою вычисленія поправочныхъ членовъ можетъ служить простое соотношеніе: сумма поправокъ для θ и δ вдвое больше поправки для λ.

Наконецъ

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{\theta_0}{[1]_n \,.\, cos\,\alpha_n} = \frac{\lambda_0 \,.\, cos\,\varphi_n}{[2]_n \,.\, sin\,\alpha_n} \\ \alpha &= \alpha_n - \frac{\delta}{2} \qquad \alpha_1 = 180^\circ + \alpha_n + \frac{\delta}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (\mathbf{113}e)$$

Числовой примѣръ. Большое разстояніе; формулы (113).

Даны: $\varphi = 59^\circ 46' 16''.000$ $\qquad \omega = -\,0^\circ\ 0' 13''.650$

$\varphi_1 = 59\ 24\ 39\ .893$ $\qquad \omega_1 = -\,1\ 13\ 39\ .167$

$\theta = \varphi_1 - \varphi = -\,21\ 36\ .107$ $\qquad \lambda = -\,1\ 13\ 25\ .517$

$\varphi_n = 59\ 35\ 27\ .95$

$lg\,sin\,\varphi_n$	9.935 7264	$lg\,\theta$	$_n$3.112 6408	[1]/[2]	0.000 7615
$lg\,\lambda$	$_n$3.643 9969		−227	$lg\,\lambda_0/\theta_0$	0.531 3734
$lg\,\theta$	$_n$3.112 6408	$lg\,\theta_0$	$_n$3.112 6181	$lg\,cos\,\varphi_n$	9.704 2945
$[1]_n$	8.838 4926	$lg\,\lambda$	$_n$3.643 9969	$lg\,tg\,\alpha_n$	0.236 4294
$[2]_n$	8.837 7311		− 54	α_n	239°52′41″.16
$lg\,cos\,\varphi_n$	9.704 2945	$lg\,\lambda_0$	$_n$3.643 9915	$\delta/2$	−31 39 .77
$lg\,\delta_0$	$_n$3.579 73	$lg\,sin\,\varphi_n$	9.935 7264	$\alpha =$	240 24 20 .93
$lg\,tg\,\alpha_n$	0.236 41	$lg\,\delta_0$	$_n$3.579 7179	$\alpha_1 =$	39 21 1 .39
α_n	239°52′38″		+118		
$lg\,cos\,\alpha_n$	$_n$9.700 58	$lg\,\delta$	$_n$3.579 7297		
$lg\,s$	4.573 57	δ	−1°3′19″.53		

$$lg\,\lambda^2 = 7.2880 \qquad k\lambda^2 = 0.000\,0165.1$$
$$lg\,\delta^2 = 7.1594 \qquad k\delta^2 = 0.000\,0122.8$$
$$lg\,c^2 = 6.8233 \qquad kc^2 = 0.000\,0056.6$$

$$lg\,{}^{\theta_0}/_{[1]_n} = {}_n4.274\,1255 \qquad lg\,\frac{\lambda_0\,.\,cos\,\varphi_n}{[2]_n} = {}_n4.510\,5549$$
$$lg\,cos\,\alpha_n = {}_n9.700\,5665 \qquad lg\,sin\,\alpha_n = {}_n9.936\,9958$$
$$lg\,s = 4.573\,5590 \qquad lg\,s = 4.573\,5591$$

Формулы (113) могутъ служить для рѣшенія обратной геодезической задачи при разстояніи между точками до 200 верстъ. При малыхъ разстояніяхъ, не превосходящихъ 20 верстъ, можно, безъ ущерба точности, отбрасывать поправочные члены, и тогда для рѣшенія той же задачи достаточно вычислить только слѣдующія простыя формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\theta = \varphi_1 - \varphi \qquad & \lambda = \omega_1 - \omega \\
tg\,\alpha_n &= \frac{[1]_n}{[2]_n} \cdot \frac{\lambda\,cos\,\varphi_n}{\theta} \\
\delta &= \lambda\,.\,sin\,\varphi_n \\
s &= \frac{\theta}{[1]_n\,cos\,\alpha_n} = \frac{\lambda\,.\,cos\,\varphi_n}{[2]_n\,.\,sin\,\alpha_n} \\
\alpha = \alpha_n - \frac{\delta}{2} \qquad & \alpha_1 = 180^\circ + \alpha_n + \frac{\delta}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(114)}$$

Замѣтимъ, что разность азимутовъ $(\alpha_1 - 180^\circ) - \alpha$, т. е. величина δ называется *сближеніемъ меридіановъ* и представляетъ уголъ между касательными къ дугамъ меридіановъ двухъ точекъ на земной поверхности.

Числовой примѣръ. Малое разстояніе; формулы (114).

Даны $\varphi = 46^\circ 24' 53.''317 \qquad \omega = +\,17^\circ 33' 36.''958$

$\varphi_1 = 46\ \ 28\ \ 53.\ 054 \qquad \omega_1 = +\,17\ \ 36\ \ 29.\ 342$

$\theta = +\ \ 3\ \ 59.\ 737 \qquad \lambda = +\ \ 2\ \ 52.\ 384$

$$\varphi_n = 46^\circ\ 26'\ 53.''2$$

$lg\,sin\,\varphi_n = 9.860\ 188$	$lg\,[1]_n/[2]_n = 0.001\ 411$
$lg\,\lambda = 2.236\ 497$	$lg\,\lambda/\theta = 9.856\ 762$
$tg\,\theta = 2.379\ 735$	$lg\,cos\,\varphi_n = 9.838\ 226$
$[1]_n = 8.839\ 465$	$lg\,tg\,\alpha_n = 9.696\ 399$
$[2]_n = 8.838\ 054$	
$lg\,cos\,\varphi_n = 9.838\ 226$	$\alpha_n = 26^\circ 25' 46.''6$
	$\delta/2 = +\ 1\ \ 2.\ 17$
$lg\,\delta = 2.096\ 685$	$\alpha = 26\ \ 24\ \ 44.\ 4$
$lg\,\theta/[1]_n = 3.540\ 270$	$\alpha_1 = 206\ \ 26\ \ 48.\ 8$
$lg\,cos\,\alpha_n = 9.952\ 057$	
$lg\,s = 3.588\ 213$	

Когда обѣ данныя точки лежатъ на весьма большомъ разстояніи, предъидущія формулы, основанныя на разложеніи искомыхъ величинъ въ ряды, оказываются неточными. Обратная геодезическая задача на сфероидѣ въ своемъ общемъ видѣ, подобно прямой, занимала многихъ выдающихся ученыхъ. До сихъ поръ не удалось еще найти для нея конечнаго рѣшенія; по всѣмъ существующимъ способамъ она рѣшается послѣдовательными приближеніями. Ниже даны формулы *Гельмерта* (Die m. und ph. Theorieen der Höheren Geodäsie, I, стр. 247—261), представляющія простѣйшее рѣшеніе и выведенныя обращеніемъ его же формулъ для рѣшенія прямой геодезической задачи (§ 137).

Даны географическія широты φ и φ_1 и долготы ω и ω_1 двухъ точекъ на сфероидѣ; найти разстояніе между ними s и взаимные азимуты α и α_1.

Прежде всего переходятъ къ приведеннымъ широтамъ данныхъ точекъ по геодезическимъ таблицамъ, или по формуламъ:

$$tg\,u = \sqrt{1-e^2}\,.\,tg\,\varphi \quad \text{и} \quad tg\,u_1 = \sqrt{1-e^2}\,.\,tg\,\varphi_1$$

$$\lambda = \omega_1 - \omega.$$

Затѣмъ вычисляютъ приближенно:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\frac{\alpha_1+\alpha}{2} &= -\cot g\,\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{\sin\frac{u_1-u}{2}}{\cos\frac{u_1+u}{2}} \\ tg\,\frac{\alpha_1-\alpha}{2} &= -\cot g\,\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{\cos\frac{u_1-u}{2}}{\sin\frac{u_1+u}{2}} \\ tg\,\frac{\sigma}{2} &= tg\,\frac{u_1-u}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha_1-\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha_1+\alpha}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

$$w - w_1 = \lambda + \sin p\,\{A_1\,\sigma - B_1\cos(v+v_1).\sin\sigma\} \qquad (b)$$

гдѣ

$$\sin p = \cos u.\sin\alpha \qquad tg\,m = \sqrt{\delta}.\cos p$$

$$tg\,v = \cot g\,u.\cos\alpha \qquad n = tg^2\,\frac{m}{2}$$

$$tg\,v_1 = -\cot g\,u_1\cos\alpha_1$$

$$lg\,A_1 = lg\,\mu - \frac{1}{2}M\left(1-\frac{\mu}{2}\right)n$$

$$lg\,B_1 = lg\,\frac{1}{4}\,e^2\varkappa n$$

Получивъ $w - w_1$, вычисляютъ группу (a) вторично, вставляя вмѣсто λ величину $w - w_1$, т. е. вычисляютъ α, α_1 и σ по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\frac{\alpha_1+\alpha}{2} &= -\cot g\,\frac{w-w_1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{u_1-u}{2}}{\cos\frac{u_1+u}{2}} \\ tg\,\frac{\alpha_1-\alpha}{2} &= -\cot g\,\frac{w-w_1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{u_1-u}{2}}{\sin\frac{u_1+u}{2}} \\ tg\,\frac{\sigma}{2} &= tg\,\frac{u_1-u}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha_1-\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha_1+\alpha}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

и затѣмъ вторично же вычисляютъ $w - w_1$ по формулѣ (b). Если новая величина $w - w_1$ значительно отличается отъ прежде полученной, то формулы (c) вычисляютъ еще разъ и это вычисленіе продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока слѣдующее приближеніе для $w - w_1$ не будетъ равно предъидущему (при вычисленіи семизначными логариѳмами обыкновенно достаточно уже второго приближенія); вычисленныя съ такимъ $w - w_1$ по формуламъ (c) величины α, α_1 и σ, будутъ окончательными, и тогда останется только получить разстояніе s при помощи ряда:

$$lg\, s = lg\, \frac{b}{\varkappa} + lg \left\{ \sigma'' + \varkappa n \cos(v + v_1) \sin \sigma - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8} \varkappa n^2 \cos 2(v + v_1) \sin 2\sigma \right\} + 2\, lg \sec \frac{m}{2} + \frac{5}{4} M n^2 \qquad (d)$$

Постоянныя e, μ, δ и b суть элементы земного сфероида; величины ихъ для сфероида Кларка (1880), равно какъ числовыя величины $\varkappa$, M и пр. даны въ § 137 (стр. 516).

Числовой примѣръ. Даны широты и долготы (отъ Гринвича):

Для Петербурга
(Обс. Ак. Наукъ) . . $\varphi = 59°56'30''$ $\quad \omega = +\ 30°18'23''$

Для Владивостока . . . $\varphi_1 = 43\ \ 6\ 53$ $\quad \omega_1 = +131\ 53\ 46$

По геодезическимъ таблицамъ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \varphi - u &= +5'\ \ 5.''48 \\ \varphi_1 - u_1 &= +5\ \ 51.\ 23 \end{aligned}\right\} \text{ и потому } \left\{\begin{aligned} u &= 59°51'24.''52 \\ u_1 &= 43\ \ \ 1\ \ \ 1.\ 77 \end{aligned}\right.$$

$$\lambda = +101°35'23.''00 \qquad \frac{u_1 - u}{2} = -\ \ 8°25'11.''38$$

$$\frac{\lambda}{2} = +\ \ 50\ 47\ 41.\ 50 \qquad \frac{u_1 + u}{2} = +51\ 26\ 13.\ 15$$

Въ первомъ приближеніи, по формуламъ (a), имѣемъ:

$$\alpha_1 = 324°56'42'' \qquad \frac{\sigma}{2} = 29°27'40''$$

$$\alpha = \ \ 56\ 44\ 56 \qquad \sigma = 58\ 55\ 20$$

Затѣмъ по формулѣ (b):

$$m = 4^\circ\ 17'\ 44'' \qquad v = +\ 17^\circ 39'\ 41''$$

$$\frac{m}{2} = 2\quad 8\ \ 52 \qquad v_1 = -\ \underline{41\ \ 15\ \ 38}$$

$$lg\,n = 7\ \ 148\ \ 14 \qquad v + v_1 = -\ 23\ \ 35\ \ 57$$

$$\lambda = +\ 101^\circ 35'\ 23.''00$$

$$sin\,p\{\ldots\} = +\ \underline{\quad 5\quad 3.\ 16}$$

$$w - w_1 = +\ 101\ \ 40\ \ 26.\ 16$$

$$\frac{w - w_1}{2} = +\ \ 50\ \ 50\ \ 13.\ 08$$

Во второмъ приближеніи, по формуламъ (c) имѣемъ:

$$\alpha_1 = 324^\circ 58'\ 19.''09$$

$$\alpha = \ \ 56\ \ 41\ \ 23.\ 89$$

$$\sigma = \ \ 58\ \ 57\ \ 27.\ 36$$

и вторичпо по формулѣ (b):

$$\frac{m}{2} = 2\quad 8\ \ 53 \qquad v = +\ 17^\circ 41'\ 12''$$

$$lg\,n = 7.148\ 24 \qquad v_1 = -\ \underline{41\ \ 16\ \ 14}$$

$$v + v_1 = -\ 23\ \ 35\quad 2$$

$$w - w_1 = +\ 101^\circ\ \ 40'\ 26.''14$$

Второе приближепіе для $w - w_1$ такъ близко къ первому, что получеппыя величины для α и α_1 можно считать окончательными, и перейти къ вычисленію ряда (d) для $lg\,s$.

$$\begin{aligned} lg\,\varkappa &= 5.314\ 43 \\ lg\,n &= 7.148\ 24 \\ lg\cos(v + v_1) &= 9.962\ 12 \\ lg\sin\sigma &= \underline{9.932\ 87} \\ & \quad 2.357\ 66 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} lg\,\tfrac{1}{8}\varkappa &= 4.411\ 34 \\ lg\,n^2 &= 4.296\ 48 \\ lg\cos 2(v + v_1) &= 9.832\ 41 \\ lg\sin 2\sigma &= \underline{9.946\ 27} \\ & \quad 8.486\ 50 \end{aligned}$$

$$lg\,sec\frac{m}{2} = 0.000\ 3052$$

$$lg\ \frac{5}{4}M = 9.734\ 69$$

$$lg\,n^2 = \underline{4.296\ 48}$$

$$4.031\ 17$$

$$\sigma'' = 212\ 247.''36$$

$$\text{1-ый членъ} = +\ 227.\ 86$$

$$\text{2-ой членъ} = \underline{-\ 0.\ 03}$$

$$\text{Сумма} = 212\ 475.\ 19$$

$$lg = 5.327\ 3082$$

$$lg\ \frac{b}{\varkappa} = 1.159\ 6849$$

$$2\,lg\,sec\frac{m}{2} = 0.000\ 6104$$

$$\frac{5}{4}Mn^2 = \underline{0.000\ 0011}$$

$$lg\,s = 6.487\ 6046$$

Легко видѣть, что полученныя величины для α, α_1 и $lg\,s$ согласны съ данными въ § 137 въ предѣлахъ точности вычисленія семизначными логариѳмами.

Говоря объ обратной геодезической задачѣ, нельзя не упомянуть о правилѣ вычисленія разстоянія между данными на земной поверхности точками, предложенномъ нашимъ извѣстнымъ математикомъ *Чебышевымъ* (1821—1894). Эти правила не точны и относятся лишь къ среднимъ широтамъ (т. е. приблизительно ко всему пространству Россійской Имперіи), но замѣчательны своею простотою и остроуміемъ положенныхъ въ основаніе ихъ соображеній. Вотъ эти правила:

1) выразите разности широтъ и долготъ данныхъ точекъ въ минутахъ и удвойте разность широтъ, 2) изъ двухъ величинъ: разности долготъ и удвоенной разности широтъ помножьте

меньшую на 3, бо̀льшую на 7 и сложите оба произведенія и 3) итогъ, раздѣленный на 8, дастъ требуемое разстояніе въ верстахъ.

Числовой примѣръ. Даны:

С.-Петербургъ (Обс. Ак. Наукъ) .	$\varphi = 59^\circ 56.'5$	$\omega = -0^\circ\ 1.'3$	отъ Пулкова
Москва (кол. Ивана Великаго)	$\varphi_1 = 55\ \ 45.0$	$\omega_1 = +7\ \ 17.6$	
	$\theta = 4\ \ 11.5$	$\lambda = 7\ \ 18.9$	

$$s = \frac{2(251.5).7 + (438.9).3}{8} = 604.7 \text{ версты}$$

139. Дифференціальныя формулы. Иногда послѣ вычисленія географическихъ координатъ одной или даже нѣсколькихъ тригонометрическихъ точекъ обнаруживается, что широта и долгота исходной точки, или азимутъ и разстояніе до другой взяты ошибочно. Если сдѣланъ грубый промахъ, и исходныя данныя взяты совсѣмъ не тѣ, что слѣдовало, то, разумѣется, всѣ вычисленія надо передѣлать вновь. Если же въ исходныя данныя вкрались лишь небольшія погрѣшности, или же онѣ измѣнены, вслѣдствіе новыхъ опредѣленій, то нѣтъ никакой надобности повторять вычисленіе географическихъ координатъ; въ послѣднія можно ввести поправки, опредѣляемыя весьма просто по такъ называемымъ *дифференціальнымъ формуламъ*, причемъ самое вычисленіе всегда можно сдѣлать пяти или даже четырехзначными логариѳмами.

Дифференціальныя формулы выводятся дифференцированіемъ главныхъ членовъ формулъ (111) или (112), выражающихъ разности широтъ, долготъ и азимутовъ, или же просто изъ чертежа. Ниже приведены дифференціальныя формулы для исправленія результатовъ рѣшенія прямой и обратной геодезическихъ задачъ. Эти формулы примѣнимы для общаго исправленія, т. е. когда всѣ исходныя данныя требуютъ поправокъ; если же поправка должна быть введена только въ одну или нѣкоторыя изъ нихъ, то вычисленіе, конечно, упрощается, такъ какъ члены, заключающіе перемѣны прочихъ величинъ, будутъ нулями.

1-й случай. По даннымъ φ, ω, α и $lg\,s$ вычислены φ_1, ω_1 и α_1 и затѣмъ оказалось, что данныя величины должны быть исправлены на $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$, $\Delta\alpha$ и $\Delta\,lg\,s$, причемъ первыя три выражены въ секундахъ, а послѣдняя въ десятичныхъ цифрахъ логариѳма; найти соотвѣтствующія поправки $\Delta\varphi_1$, $\Delta\omega_1$, и $\Delta\alpha_1$.

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\varphi_1 &= \cos\lambda\,.\,\Delta\varphi - \cos\varphi_1\,.\sin\lambda\,.\,\Delta\alpha - \cos\alpha_1\,.\,[1]_1\,s\cdot\frac{\Delta\,lg\,s}{M}\\
\Delta\omega_1 &= \Delta\omega + tg\,\varphi_1\sin\lambda.\Delta\varphi - \sin\lambda\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha}\cdot\Delta\alpha - \sec\varphi_1\sin\alpha_1[2]_1\,s\cdot\frac{\Delta\,lg\,s}{M}\\
\Delta\alpha_1 &= \sec\varphi_1\sin\lambda\,.\,\Delta\varphi - \cos\lambda\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}\cdot\Delta\alpha - tg\,\varphi_1\,.\sin\alpha_1\,[2]_1\,.\,s\cdot\frac{\Delta\,lg\,s}{M}
\end{aligned}\right\}\quad(115)$$

гдѣ $\lambda = \omega_1 - \omega$, а M — модуль Бригговыхъ логариѳмовъ. Легко видѣть, что поправка долготы $\Delta\omega$ вовсе не входитъ въ выраженія для поправокъ широты и азимута, но цѣликомъ входитъ въ поправку долготы.

Числовой примѣръ. Пусть въ 1-мъ примѣрѣ § 135 вмѣсто начальныхъ данныхъ:

$$\varphi = 59^\circ 46'\,16.''000 \qquad \omega = -\,0^\circ\,0'\,13.''650$$
$$\alpha = 240\;\;24\;\;20.\;94 \qquad lg\,s = 4.573\;5591$$

должно быть:

$$\varphi = 59\;\;46\;\;16.\;500 \qquad \omega = -\,0^\circ\,0'\,14.''200$$
$$\alpha = 240\;\;24\;\;22.\;07 \qquad lg\,s = 4.573\;5540$$

такъ что поправки начальныхъ данныхъ суть:

$$\Delta\varphi = +\,0.''500 \qquad \Delta\omega = -\,0.''550$$
$$\Delta\alpha = +\,1.\;13 \qquad \Delta\,lg\,s = -\,0.\;000\;0051$$

Изъ того же примѣра имѣемъ:

$$\varphi_1 = 59^\circ\,24'\,39.''89 \qquad \lambda = -\,1^\circ\,13'\,25.''52 \qquad \alpha_1 = 59^\circ\,21'\,1.''41$$

По формуламъ (115) получаемъ:

$$\Delta\varphi_1 = +\,0.''4999 + 0.''0123 + 0.''0155 = +\,0.''528$$
$$\Delta\omega_1 = -\,0.\;5500 - 0.\;0181 - 0.\;0141 + 0.\;0512 = -\,0.531$$
$$\Delta\alpha_1 = -\,0.\;0167 + 1.\;1180 + 0.\;0441 = +\,1.15$$

Слѣдовательно, исправленныя величины искомыхъ будутъ:

$$\varphi_1 = 59°24'40.''421$$
$$\omega_1 = -1\ 13\ 39.\ 698$$
$$\alpha_1 = 59\ 21\ \ 2.\ 56$$

2-й случай. По даннымъ φ, φ_1, ω и ω_1 вычислены α, α_1 и $lg\,s$ и затѣмъ оказалось, что исходныя величины должны быть измѣнены на $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi_1$, $\Delta\omega$ и $\Delta\omega_1$, выраженныя въ секундахъ; найти соотвѣтствующія поправки въ $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\,lg\,s$.

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\alpha &= \frac{\sin\alpha}{tg\,\sigma}\cdot\Delta\varphi + \frac{\sin\alpha_1}{\sin\sigma}\cdot\Delta\varphi_1 - \frac{\cos\varphi_1\,.\,\cos\alpha_1}{\sin\sigma}\cdot\Delta\lambda\\
\Delta\alpha_1 &= \frac{\sin\alpha}{\sin\sigma}\cdot\Delta\varphi + \frac{\sin\alpha_1}{tg\,\sigma}\cdot\Delta\varphi_1 + \frac{\cos\varphi\,.\,\cos\alpha}{\sin\sigma}\cdot\Delta\lambda\\
\Delta\,lg\,s &= \frac{M}{\sigma''}\{-\cos\alpha\,.\,\Delta\varphi - \cos\alpha_1\,.\,\Delta\varphi_1 + \cos\varphi\,.\,\sin\alpha\,.\,\Delta\lambda\}
\end{aligned}\right\}\quad (116)$$

Здѣсь $\Delta\lambda = \Delta\omega_1 - \Delta\omega$, M — модуль Бригговыхъ логариѳмовъ, а величина σ вычисляется по формулѣ:

$$\sin\sigma = \frac{\cos\varphi_1\,.\,\sin\lambda}{\sin\alpha} = -\frac{\cos\varphi\,.\,\sin\lambda}{\sin\alpha_1}$$

гдѣ $$\lambda = \omega_1 - \omega$$

Числовой примѣръ. Пусть въ примѣрѣ § 138 вмѣсто данныхъ

$$\varphi = 59°46'16.''000 \qquad \omega = -0°\ 0'\ 13.''650$$
$$\varphi_1 = 59\ 24\ 39.\ 893 \qquad \omega_1 = -1\ 13\ 39.\ 167$$

должны быть:

$$\varphi = 59\ 46\ 16.\ 500 \qquad \omega = -0\ \ 0\ 14.\ 200$$
$$\varphi_1 = 59\ 24\ 40.\ 421 \qquad \omega_1 = -1\ 13\ 39.\ 698$$

Поправки начальныхъ данныхъ суть:

$$\Delta\varphi = +0.''500 \qquad \Delta\omega = -0.''550$$
$$\Delta\varphi_1 = +0.\ 528 \qquad \Delta\omega_1 = -0.\ 531$$

Изъ того же примѣра имѣемъ:

$$\alpha = 240^\circ 24' 21'' \qquad \lambda = -1^\circ 13' 26''$$

$$\alpha_1 = 59\ 21\ \ 1 \qquad \Delta\lambda = +\ 0.''019$$

По формуламъ (116) получаемъ сперва

$$\sigma = 42'\ 58.''4$$

а затѣмъ:

$$\Delta\alpha = -34.''79 + 36.''33 + 0.''39 = +1.''15$$

$$\Delta\alpha_1 = -34.\ 78 + 36.\ 34 - 0.\ 38 = +1.\ 16$$

$$\Delta\, lg\, s = \frac{0.4343}{2578.4}(+0.''247 - 0.''269 - 0.''008) = -0.000\,0051$$

и, слѣдовательно, исправленные результаты примѣра § 138 будутъ:

$$\alpha = 240^\circ 24' 22.''08$$

$$\alpha_1 = 59\ 21\ \ 2.\ 55$$

$$lg\, s = 4.573\,5540$$

Не мѣшаетъ имѣть еще формулы для исправленія широты, долготы и азимута въ томъ случаѣ, когда послѣ вычисленія ихъ съ одними элементами сфероида явилась надобность узнать, каковы бы они были при вычисленіи на сфероидѣ съ другими элементами. Здѣсь тоже нѣтъ надобности передѣлывать все вычисленіе, а достаточно ввести въ полученные результаты дифференціальныя поправки. Такъ какъ въ формулы для вычисленія географическихъ координатъ входятъ величины [1] и [2], заключающія радіусы кривизны ρ и p по меридіану и по первому вертикалу, то послѣ дифференцированія формулъ (111) или (112), считая величины [1] и [2] за перемѣнныя, надо въ нихъ вставить приращенія $\Delta\rho$ и Δp, изъ формулъ (26) § 32. Въ предположеніи, что поправки даны для большой полуоси и для сжатія сфероида, задача сводится къ тому, чтобы найти поправки вычисленныхъ широты φ_1, долготы ω_1 и азимута α_1, если элементы сфероида измѣнены на Δa и $\Delta\mu$. Вотъ соотвѣтствующія такому случаю дифференціальныя формулы:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi_1 &= -\theta\left\{\frac{\Delta a}{a} - (2 - 3\sin^2\varphi)\,\Delta\mu\right\}\\ \Delta\omega_1 &= -\lambda\left\{\frac{\Delta a}{a} + \sin^2\varphi\,.\,\Delta\mu\right\}\\ \Delta\alpha_1 &= -\delta\left\{\frac{\Delta a}{a} + \sin^2\varphi\,.\,\Delta\mu\right\}\end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(117)}$$

гдѣ, согласно прежнимъ обозначеніямъ:

$$\theta = \varphi_1 - \varphi,\ \lambda = \omega_1 - \omega \text{ и } \delta = \alpha_1 - 180^\circ - \alpha$$

Числовой примѣръ. Положимъ, что 1-ый примѣръ § 135, вычисленный при элементахъ земного сфероида Кларка, требуется перевычислить по элементамъ Вальбека.

Для сфероида Кларка . . $a = 2\,989\,457$ саж. $\mu = 0.003\,4075$

» » Вальбека . $a = 2\,988\,853$ » $\mu = 0.003\,3027$

$\Delta a = \quad -604 \quad \Delta\mu = -0.000\,1048$

$\frac{\Delta a}{a} = -0.000\,2014 \quad lg\,\Delta\mu = {}_n6.0204$

Изъ названнаго примѣра имѣемъ:

$$\begin{aligned}\varphi &= 59^\circ 46' 16.''00\\ \theta &= -0\ 21\ 36.\ 11\\ \lambda &= 1\ 13\ 25.\ 52\\ \delta &= 1\ \ 3\ 19.\ 53\end{aligned}$$

По формуламъ (117) получаемъ:

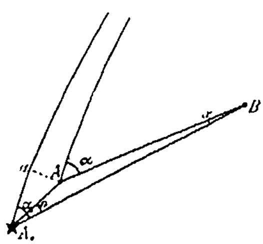
$$\begin{aligned}\Delta\varphi_1 &= -\ 0.''294\\ \Delta\omega_1 &= -\ 1.\ 232\\ \Delta\alpha_1 &= -\ 1.\ 06\end{aligned}$$

и, слѣдовательно, для сфероида Вальбека будетъ (вмѣсто вычисленныхъ въ § 135):

$$\varphi_1 = 59^\circ 24' 39.''599$$
$$\omega_1 = -1\ 13\ 37.935$$
$$\alpha_1 = 59\ 21\ 0.35$$

140. Приведенія широты, долготы и азимута. Астрономическая точка, избранная для наблюденій широты, долготы и азимута, не всегда совпадаетъ съ тригонометрическою, отъ которой начинается вычисленіе географическихъ координатъ всѣхъ прочихъ точекъ тріангуляціи. Поэтому является необходимость *приводить* наблюденія, произведенныя на астрономической точкѣ, къ центру тригонометрической.

Если астрономическая точка расположена въ значительномъ разстояніи отъ тригонометрической, то онѣ соединяются вспомогательною тріангуляціею и переносы широты, долготы и азимута дѣлаются по правиламъ и формуламъ для рѣшенія прямой геодезической задачи; если же разстояніе не велико, то перемѣны географическихъ координатъ могутъ быть вычислены по упрощеннымъ формуламъ приведенія.



Черт. 195.

Пусть A_0 и A (черт. 195) представляютъ астрономическую и лежащую вблизи тригонометрическую точки, B—сосѣднюю тригонометрическую точку, на которую опредѣленъ азимутъ α_0 въ A_0, φ_0 и ω_0 — широту и долготу точки A_0. Требуется вычислить широту φ и долготу ω точки A и азимутъ α направленія AB въ точкѣ A.

Для вычисленія приведеній должно быть извѣстно разстояніе s между тригонометрическими точками A и B и измѣрены: уголъ $\theta = AA_0B$ и разстояніе $\rho = A_0A$.

Проведя дугу Aa изъ A перпендикулярно къ меридіану точки A_0, получимъ прямоугольный треугольникъ A_0Aa, который, по малости разстоянія A_0A, можно считать плоскимъ; въ немъ катетъ A_0a представитъ разность широтъ $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$

точекъ A и A_0; называя разность долготъ и азимутовъ соотвѣтственно черезъ $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ и $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$, по формуламъ (111) получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi &= [1]\rho \, . \cos(\alpha - \theta) \\ \Delta\omega &= [2]\rho \, . \sin(\alpha - \theta) \, . \sec\varphi \\ \Delta\alpha &= x + \Delta\omega \, . \sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (118)$$

гдѣ уголъ x изъ треугольника A_0AB вычисляется по формулѣ:

$$x'' = \varkappa \cdot \frac{\rho}{s} \cdot \sin\theta$$

Числовой примѣръ. Близъ пирамиды Суримяки, служившей начальной точкою тріангуляціи, произведены астрономическія наблюденія на каменномъ столбѣ, элементы приведенія котораго къ центру пирамиды суть: $\theta = 141^\circ 44' 20''$ и $\rho = 5.02$ сажени. Въ результатѣ астрономическихъ наблюденій получено:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \quad 60^\circ 32' \;\; 5.''690 \\ \omega_0 &= -\; 0 \;\;\; 6 \;\; 31.\; 894 \\ \alpha_0 &= \; 234 \;\; 36 \;\; 12.\; 51 \end{aligned}$$

Азимутъ измѣренъ на пирамиду Суръ-Суріо, разстояніе до которой по вычисленію тріангуляціи равно 4877.7 саж. По формуламъ (118) имѣемъ:

$$\Delta\varphi = -\,0.''017, \qquad \Delta\omega = +\,0.''701$$

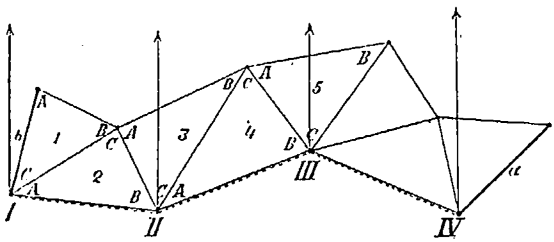
и $$\Delta\alpha = 2'\,11.''46 + 0.''61 = 2'\,12.''07$$

Придавъ эти приведенія къ вышенайденнымъ величинамъ, получимъ:

$$\begin{aligned} \varphi &= \quad 60^\circ 32' \;\; 5.''673 \\ \omega &= -\; 0 \;\;\; 6 \;\; 31.\; 193 \\ \alpha &= \; 234 \;\; 38 \;\; 24.\; 58 \end{aligned}$$

141. Уравниваніе полигоновъ. Если между двумя прежними тріангуляціями проложена новая цѣпь треугольниковъ, то обыкновенно по географическимъ координатамъ начальныхъ точекъ новой цѣпи координаты ея конечныхъ точекъ оказываются несогласными съ координатами этихъ же точекъ по даннымъ прежней тріангуляціи. Объясняя эти разногласія только ошибками наблюденій, ко всѣмъ угламъ новой цѣпи надо придать такія поправки, чтобы полученныя разногласія уничтожились. Являющіяся тутъ особыя условныя уравненія, называемыя *полигонными* (см. § 116), могутъ быть представлены подъ различными видами *).

Проще всего уравнять широту и долготу одной изъ конеч-



Черт. 196.

ныхъ точекъ, длину общей стороны и ея азимутъ; тогда широта и долгота другой общей точки уравняются сами собою.

Пусть между двумя данными по величинѣ и положенію на земной поверхности сторонами прежнихъ тріангуляцій b и a (черт. 196) проложена новая цѣпь треугольниковъ *1*, *2*, *3* .... Уравнявъ сперва всѣ эти треугольники отдѣльно, т. е. приведя сумму угловъ въ каждомъ изъ нихъ къ $180° + \varepsilon$, и выбравъ для простоты вычисленія кратчайшую *ходовую линію* *I*, *II*...., найдемъ широты и долготы всѣхъ ея вершинъ и азимуты всѣхъ сторонъ. Дойдя до конечной точки *IV*, получимъ слѣдующія четыре условныя уравненія:

1) Сумма поправокъ угловъ при вершинахъ ходовой линіи должна равняться разности между вычисленнымъ и даннымъ азимутомъ конечной стороны.

---

*) См. Account of the Operations of the Great Trigonometrical Survey of India, Vol. II, 1879 г. и *Витковскій* — Уравниваніе полигоновъ (Записки В. Т. Отдѣла Гл. Штаба, Часть XLVIII, 1892 г.).

2) Вычисленная длина конечной стороны должна равняться данной ея длинѣ.

3 и 4) Вычисленныя широта и долгота конечной точки должны равняться даннымъ для нея широтѣ и долготѣ.

Если назвать въ каждомъ треугольникѣ буквою B уголъ, противолежащій смежной сторонѣ предъидущаго треугольника, буквою A—уголъ, противолежащій сторонѣ продолженія, и буквою C — промежуточный, а искомыя поправки этихъ угловъ соотвѣтственно буквами y, x и z, то первое условное уравненіе, какъ видно изъ чертежа, будетъ:

$$(z_1 + x_2) + (y_2 + z_3 + x_4) + (y_4 + z_5 + \ldots) + \ldots + z_i + v = 0$$

Чтобы не разстроились первоначально уже уравненные углы, необходимо связать искомыя поправки условіемъ $z = -(x+y)$, такъ что, выражая предъидущее условное уравненіе только въ поправкахъ связывающихъ угловъ, получимъ:

$$-x_1 - y_1 + x_2 + y_2 - x_3 - y_3 + x_4 + \ldots - x_i - y_i + v = 0 \qquad (a)$$

Относительно извѣстнаго члена v необходимо замѣтить, что онъ не представляетъ непосредственно разность азимутовъ стороны a (въ смыслѣ вычисленный минусъ данный), а разность эта должна быть исправлена сближеніемъ меридіановъ вычисленнаго и даннаго положеній конечной точки, такъ что, называя черезъ S_i' и S_i вычисленный и данный азимуты конечной стороны a, черезъ ω' и ω вычисленную и данную долготы конечной точки IV, а черезъ φ ея широту, получимъ:

$$v = (S_i' - S_i) - (\omega' - \omega) \sin \varphi \qquad \textbf{(119)}$$

Второе условное уравненіе, подобно базисному (§ 116, форм. f), представляется слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha_1 x_1 - \beta_1 y_1 + \alpha_2 x_2 - \beta_2 y_2 + \ldots + \alpha_i x_i - \beta_i y_i + v' = 0 \qquad (b)$$

гдѣ α и β — перемѣны логариѳмовъ синусовъ связывающихъ угловъ всѣхъ треугольниковъ, а

$$v' = lg\, a' - lg\, a \qquad \textbf{(120)}$$

т. е. извѣстный членъ этого уравненія равенъ разности логариѳмовъ конечной стороны a, полученной вычисленіемъ и данной. Величины α, β... и v' должны быть выражены, разумѣется, въ однѣхъ и тѣхъ же единицахъ десятичныхъ знаковъ логариѳмовъ.

Чтобы получить въ линейномъ же видѣ условныя уравненія широты и долготы конечной точки, возьмемъ главные члены выраженій для разностей широтъ и долготъ двухъ точекъ; члены высшихъ порядковъ въ данномъ случаѣ можно отбросить. Называя черезъ s и S длину и азимутъ какой нибудь стороны ходовой линіи, а черезъ θ и λ разности широтъ и долготъ ея концовъ въ секундахъ, имѣемъ (см. формулы 112):

$$\theta'' = [1] . s . \cos S$$

$$\lambda'' = [2] . s . \sin S . \sec \varphi$$

Дифференцируя логариѳмы этихъ выраженій и замѣчая, что величины [1], [2] и φ можно въ данномъ случаѣ считать постоянными, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} d\theta &= \frac{1}{\Delta\, lg\, \theta} . d\, lg\, s + \frac{\Delta\, lg \cos S}{\Delta\, lg\, \theta} . dS \\ d\lambda &= \frac{1}{\Delta\, lg\, \lambda} . d\, lg\, s + \frac{\Delta\, lg \sin S}{\Delta\, lg\, \lambda} . dS \end{aligned} \right\} \qquad (c)$$

гдѣ знакомъ Δ означены табличныя перемѣны логариѳмовъ при измѣненіи соотвѣтствующихъ величинъ на $1''$; напримѣръ, $\Delta\, lg\, \theta$ есть перемѣна $lg\, \theta$ при измѣненіи θ на $1''$, $\Delta\, lg \cos S$ — перемѣна $lg \cos S$ при измѣненіи S на $1''$ и т. п.

Выраженія (c) можно составить для разностей широтъ и долготъ каждыхъ двухъ послѣдовательныхъ точекъ ходовой линіи I, II..., и полныя измѣненія въ широтѣ и долготѣ конечной ея точки представятся, очевидно, суммою подобныхъ выраженій. Вмѣстѣ съ тѣмъ эти суммы, сложенныя съ оказавшимися изъ вычисленій разногласіями въ широтѣ и долготѣ конечной точки, должны быть приравнены нулямъ, какъ въ каждомъ условномъ уравненіи, т. е.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta\, lg\, \theta_1}\,.\, d\, lg\, s_1 + \frac{\Delta\, lg \cos S_1}{\Delta\, lg\, \theta_1}\,.\, dS_1 + \frac{1}{\Delta\, lg\, \theta_2}\,.\, d\, lg\, s_2 + \\
&\qquad + \frac{\Delta\, lg \cos S_2}{\Delta\, lg\, \theta_2}\,.\, dS_2 + \ldots + v'' = 0 \\
&\frac{1}{\Delta\, lg\, \lambda_1}\,.\, d\, lg\, s_1 + \frac{\Delta\, lg \sin S_1}{\Delta\, lg\, \lambda_1}\,.\, dS_1 + \frac{1}{\Delta\, lg\, \lambda_2}\,.\, d\, lg\, s_2 + \\
&\qquad + \frac{\Delta\, lg \sin S_2}{\Delta\, lg\, \lambda_2}\,.\, dS_2 + \ldots + v''' = 0
\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

гдѣ v'' = вычисленная—данная широта конечной точки
v''' = вычисленная—данная долгота конечной точки } **(121)**

Такъ какъ каждое измѣненіе логариѳма какой нибудь стороны ходовой линіи и ея азимута, т. е. $d\, lg\, s$ и dS, входитъ цѣликомъ въ логариѳмы и азимуты всѣхъ за нею слѣдующихъ сторонъ ходовой линіи, то въ уравненіяхъ (d) должно положить:

$$\begin{aligned}
&d\, lg\, s_1 = \Delta\, lg\, s_1 && dS_1 = \Delta S_1 \\
&d\, lg\, s_2 = \Delta\, lg\, s_1 + \Delta\, lg\, s_2 && dS_2 = \Delta S_1 + \Delta S_2 \\
&d\, lg\, s_3 = \Delta\, lg\, s_1 + \Delta\, lg\, s_2 + \Delta\, lg\, s_3 && dS_3 = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&d\, lg\, s_i = \Delta\, lg\, s_1 + \Delta\, lg\, s_2 + \ldots + \Delta\, lg\, s_i && dS_i = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_i
\end{aligned}$$

и они обратятся въ слѣдующія:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{\Delta\, lg\, \theta}\right]_1^i \Delta lg\, s_1 + \left[\frac{1}{\Delta\, lg\, \theta}\right]_2^i \Delta\, lg\, s_2 + \ldots + \left[\frac{\Delta\, lg \cos S}{\Delta\, lg\, \theta}\right]_1^i \Delta S_1 + \\
&\qquad + \left[\frac{\Delta\, lg \cos S}{\Delta\, lg\, \theta}\right]_2^i \Delta S_2 + \ldots + v'' = 0 \\
&\left[\frac{1}{\Delta\, lg\, \lambda}\right]_1^i \Delta lg\, s_1 + \left[\frac{1}{\Delta\, lg\, \lambda}\right]_2^i \Delta\, lg\, s_2 + \ldots + \left[\frac{\Delta\, lg \sin S}{\Delta\, lg\, \lambda}\right]_1^i \Delta S_1 + \\
&\qquad + \left[\frac{\Delta\, lg \sin S}{\Delta\, lg\, \lambda}\right]_2^i \Delta S_2 + \ldots + v''' = 0
\end{aligned}$$

гдѣ знакомъ [ ] означены суммы подобныхъ членовъ отъ какой нибудь стороны ходовой линіи до послѣдней. Если для краткости положить:

$$\begin{aligned}
&p = \left[\frac{1}{\Delta\, lg\, \theta}\right] && P = \left[\frac{\Delta\, lg \cos S}{\Delta\, lg\, \theta}\right] \\
&q = \left[\frac{1}{\Delta\, lg\, \lambda}\right] && Q = \left[\frac{\Delta\, lg \sin S}{\Delta\, lg\, \lambda}\right]
\end{aligned} \qquad \textbf{(122)}$$

то уравненія (d) примутъ болѣе простой видъ:

$$\left.\begin{aligned} & p_1 \Delta \lg s_1 + p_2 \Delta \lg s_2 + \ldots + p_i \Delta \lg s_i + P_1 \Delta S_1 + \\ & \quad + P_2 \Delta S_2 + \ldots + P_i \Delta S_i + v'' = 0 \\ & q_1 \Delta \lg s_1 + q_2 \Delta \lg s_2 + \ldots + q_i \Delta \lg s_i + Q_1 \Delta S_1 + \\ & \quad + Q_2 \Delta S_2 + \ldots + Q_i \Delta S_i + v''' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Остается еще выразить перемѣны $\Delta \lg s$ и ΔS въ искомыхъ поправкахъ всѣхъ связывающихъ угловъ и перемѣнахъ логариомовъ ихъ синусовъ. Изъ черт. 196 имѣемъ:

$$s_1 = b \cdot \frac{\sin A_1 \cdot \sin C_2}{\sin B_1 \cdot \sin B_2} \qquad S_1 = \text{аз. ст. } b + C_1 + A_2$$

$$s_2 = s_1 \cdot \frac{\sin A_2 \cdot \sin A_3 \cdot \sin C_1}{\sin C_2 \cdot \sin B_3 \cdot \sin B_1} \qquad S_2 = \text{обр. аз. ст. } s_1 + B_2 + C_3 + A_4$$

. . . .

Обозначимъ перемѣны логариомовъ синусовъ угловъ A, B и C каждаго треугольника при измѣненіи ихъ на $1''$ черезъ α, β и γ, а искомыя поправки этихъ угловъ черезъ x, y и $(-x-y)$; легко видѣть, что предъидущія выраженія дадутъ:

$$\Delta \lg s_1 = \alpha_1 x_1 + \gamma_2 (-x_2 - y_2) - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2$$

$$\Delta \lg s_2 = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \gamma_4 (-x_4 - y_4) - \gamma_2 (-x_2 - y_2) - \beta_3 y_3 - \beta_4 y_4$$

. . . .

$$\Delta S_1 = -x_1 - y_1 + x_2$$

$$\Delta S_2 = y_2 - x_3 - y_3 + x_4$$

. . . .

Подставляя эти величины въ первое изъ уравненій (e) и собирая подобные члены съ x и съ y въ каждомъ треугольникѣ, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} & \{p_1 \alpha_1 - P_1\} x_1 - \{p_1 \beta_1 + P_1\} y_1 + \\ & + \{p_2 \alpha_2 + (p_2 - p_1) \gamma_2 + P_1\} x_2 - \{p_1 \beta_2 - (p_2 - p_1) \gamma_2 - P_2\} y_2 + \\ & + \{p_2 \alpha_3 - P_2\} x_3 - \{p_2 \beta_3 + P_2\} y_3 + \\ & + \{p_3 \alpha_4 + (p_3 - p_2) \gamma_4 + P_2\} x_4 - \{p_2 \beta_4 - (p_3 - p_2) \gamma_4 - P_3\} y_4 + \\ & + \ldots\ldots + v'' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Совершенно подобное же уравненіе получится и взамѣнъ второго ур. (e) для разности долготъ, съ тѣмъ лишь отличіемъ, что вмѣсто коэффиціентовъ p и P въ немъ будутъ коэффиціенты q и Q. Если обозначить для краткости коэффиціенты у x и y соотвѣтственно черезъ m и n, то всѣ выведенныя выше четыре условныя уравненія (a), (b), (f) и подобное этому (f') уравненія для долготъ, т. е. условія азимута и длины конечной стороны, а равно условія широты и долготы конечной точки, представятся слѣдующими четырьмя линейными уравненіями:

$$\left.\begin{aligned}
m_1\ x_1 + n_1\ y_1 + m_2\ x_2 + n_2\ y_2 + \ldots + m_i\ x_i + n_i\ y_i + v &= 0\\
m_1'\ x_1 + n_1'\ y_1 + m_2'\ x_2 + n_2'\ y_2 + \ldots + m_i'\ x_i + n_i'\ y_i + v' &= 0\\
m_1''\ x_1 + n_1''\ y_1 + m_2''\ x_2 + n_2''\ y_2 + \ldots + m_i''\ x_i + n_i''\ y_i + v'' &= 0\\
m_1'''x_1 + n_1'''y_1 + m_2'''x_2 + n_2'''y_2 + \ldots + m_i'''x_i + n_i'''y_i + v''' &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (g)$$

Коэффиціенты первыхъ двухъ уравненій получаются безъ всякихъ вспомогательныхъ вычисленій; въ первомъ они суть $+1$ или -1, смотря по тому, какимъ образомъ входятъ въ него углы треугольниковъ у вершинъ ходовой линіи, во второмъ же уравненіи эти коэффиціенты суть непосредственно величины $+\alpha$ и $-\beta$, такъ что вообще:

$$\text{Для 1-го ур.} \begin{cases} m = \pm 1 \\ n = \pm 1 \end{cases} \qquad \text{Для 2-го ур.} \begin{cases} m' = +\alpha \\ n' = -\beta \end{cases} \quad \textbf{(123)}$$

Что касается коэффиціентовъ у x и y въ третьемъ и четвертомъ уравненіяхъ системы (g), то изъ разсмотрѣнія ур. (f) не трудно замѣтить, что они существенно различаются, смотря по тому, заключаетъ ли соотвѣтствующій треугольникъ сторону ходовой линіи или не заключаетъ, именно:

Въ треугольникѣ k со стороною ходовой линіи между точками i и $i+1$.

$$\begin{aligned}
&\text{Для 3-го ур.} \begin{cases} m_k'' = +\{p_{i+1}\,\alpha_k + (p_{i+1} - p_i)\,\gamma_k + P_i\} \\ n_k'' = -\{p_i\,\beta_k - (p_{i+1} - p_i)\,\gamma_k - P_{i+1}\} \end{cases} \\
&\text{Для 4-го ур.} \begin{cases} m_k''' = +\{q_{i+1}\,\alpha_k + (q_{i+1} - q_i)\,\gamma_k + Q_i\} \\ n_k''' = -\{q_i\,\beta_k - (q_{i+1} - q_i)\,\gamma_k - Q_{i+1}\} \end{cases}
\end{aligned} \quad \textbf{(124)}$$

Въ треугольникѣ k безъ стороны ходовой линіи, но примыкающемъ къ ней въ точкѣ i.

$$\text{Для 3-го ур.}\ \begin{cases} m_k'' = +\{p_i\alpha_k - P_i\} \\ n_k'' = -\{p_i\beta_k + P_i\} \end{cases}$$

$$\text{Для 4-го ур.}\ \begin{cases} m_k''' = +\{q_i\alpha_k - Q_i\} \\ n_k''' = -\{q_i\beta_k + Q_i\} \end{cases} \qquad (124^*)$$

Эти правила справедливы для всѣхъ вообще промежуточныхъ треугольниковъ цѣпи; только для перваго и послѣдняго они *иногда* непримѣнимы, потому что въ началѣ и въ концѣ цѣпи зачастую бываютъ другія обозначенія угловъ, но для этихъ крайнихъ треугольниковъ не трудно всякій разъ составить коэффиціенты особо, по чертежу.

Уравненія (g) должны быть рѣшены подъ условіемъ, чтобы сумма квадратовъ искомыхъ поправокъ всѣхъ угловъ была наименьшею, т. е. чтобы

$$\Sigma\{x^2 + y^2 + (x+y)^2\} = \text{minimum} \qquad (h)$$

Продифференцировавъ уравненія (g), помноживъ каждое изъ нихъ на неопредѣленныя пока числа A, B, C и D и сложивъ вмѣстѣ, получимъ:

$$\begin{aligned} &(m_1A + m_1'B + m_1''C + m_1'''D)\,dx_1 + (n_1A + n_1'B + n_1''C + n_1'''D)\,dy_1 + \\ &+ (m_2A + m_2'B + m_2''C + m_2'''D)\,dx_2 + (n_2A + n_2'B + n_2''C + n_2'''D)\,dy_2 + \\ &+ \ldots\ldots = 0 \end{aligned} \qquad (i)$$

Съ другой стороны, дифференцируя уравненіе (h) и раздѣляя всѣ члены на 2, получимъ:

$$\Sigma(2x + y)\,dx + \Sigma(x + 2y)\,dy = 0 \qquad (j)$$

По неопредѣленности чиселъ A, B, C и D можно сравнить коэффиціенты у тѣхъ же неизвѣстныхъ въ уравненіяхъ (i) и (j), и тогда получится для каждаго треугольника:

$$2x + y = mA + m'B + m''C + m'''D$$
$$x + 2y = nA + n'B + n''C + n'''D$$

Вводя обозначенія:

$$M = \frac{2m - n}{3} \qquad N = \frac{2n - m}{3} \tag{125}$$

и рѣшая эту систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, получимъ для каждаго треугольника:

$$\begin{aligned} x &= MA + M'B + M''C + M'''D \\ y &= NA + N'B + N''C + N'''D \\ z &= -x - y \end{aligned} \tag{126}$$

Теперь остается только опредѣлить числа A, B, C и D. Если вставить полученныя значенія для x, y и z въ условныя уравненія (g), собрать подобные члены и означить суммы соотвѣтствующихъ коэффиціентовъ скобками [ ], то получатся такъ называемыя нормальныя уравненія:

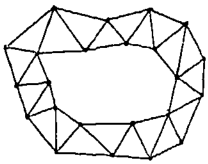
$$\left.\begin{aligned} &[m\ M + n\ N]\,A + [m\ M' + n\ N']\,B + [m\ M'' + n\ N'']\,C + \\ &\qquad + [m\ M''' + n\ N''']\,D + v\ = 0 \\ &[m'\ M + n'\ N]\,A + [m'\ M' + n'\ N']\,B + [m'\ M'' + n'\ N'']\,C + \\ &\qquad + [m'\ M''' + n'\ N''']\,D + v' = 0 \\ &[m''\,M + n''\,N]\,A + [m''\,M' + n''\,N']\,B + [m''\,M'' + n''\,N'']\,C + \\ &\qquad + [m''\,M''' + n''\,N''']\,D + v'' = 0 \\ &[m'''M + n'''N]\,A + [m'''M' + n'''N']\,B + [m'''M'' + n'''N'']\,C + \\ &\qquad + [m'''M''' + n'''N''']\,D + v''' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

Рѣшеніемъ этихъ уравненій не трудно найти числа A, B, C и D, а затѣмъ по формуламъ (126) вычислить и искомыя поправки угловъ. Повѣркою вычисленія можетъ служить уравненіе:

$$\Sigma\,(x^2 + y^2 + z^2) = -\,(Av + Bv' + Cv'' + Dv''') \tag{128}$$

Изложенный способъ уравниванія цѣпи треугольниковъ между двумя сторонами, извѣстными по величинѣ и по положенію на сфероидѣ, примѣняется и къ цѣпи треугольниковъ, замыкающихъ незаполненное тріангуляціею пространство, подобной цѣпи, изображенной на черт. 197. Вся разница состоитъ лишь въ томъ, что вмѣсто величины и положенія конечной стороны a чертежа 196 надо вставлять въ соотвѣтствующія формулы величину и положеніе исходной стороны b.

Если первоклассныя цѣпи образуютъ системы смежныхъ полигоновъ, то строгое уравниваніе ихъ потребовало бы совмѣстнаго рѣшенія многихъ условныхъ уравненій; именно, число такихъ уравненій равно учетверенному числу замкнутыхъ полигоновъ. Примѣромъ совмѣстнаго уравниванія системы полигоновъ можетъ служить тріангуляція Британской Индіи, гдѣ и былъ впервые разработанъ вышеизложенный способъ уравниванія. Однако и тамъ опытные англійскіе геодезисты не признали возможнымъ уравнивать всѣ системы сразу, и раздѣлили ихъ на пять отдѣльныхъ группъ; послѣ окончательнаго вычисленія одной они приступали къ уравниванію другой, вводя полученные результаты для смежныхъ сторонъ изъ первой группы во вторую, какъ неизмѣнныя данныя, и т. д. Вообще, если въ тріангуляціи имѣется не одинъ, а два или нѣсколько примыкающихъ другъ къ другу полигоновъ, то слѣдуетъ уравнять сперва одинъ полигонъ, напримѣръ центральный или тотъ, въ которомъ производились болѣе точныя наблюденія, а затѣмъ окружающіе полигоны уравнивать по частямъ, какъ бы цѣпи новыхъ тріангуляцій, соединяющія уже окончательно вычисленныя точки прежнихъ.



Черт. 197.

142. Практическія правила. Имѣя въ виду значительную сложность вычисленій при уравниваніи полигоновъ, нелишне привести практическія правила, руководствуясь которыми начинающій можетъ вѣрно вычислять, даже не изучивши самой теоріи. Эти правила приведены здѣсь въ послѣдовательномъ порядкѣ и со ссылками на окончательныя формулы § 141.

1) Прежде всего составляютъ чертежъ всѣхъ уравниваемыхъ

треугольниковъ *) и назначаютъ *ходовую линію* такъ, чтобы она шла кратчайшимъ путемъ сторонами треугольниковъ по *правому краю цѣпи.* Если цѣпь треугольниковъ представляетъ не соединеніе старыхъ тріангуляцій, а отдѣльный замкнутый полигонъ, то ходовая линія назначается по *внутреннему многоугольнику, въ направленіи движенія стрѣлокъ часовъ.* Всѣ треугольники и вершины ходовой линіи обозначаютъ числами въ послѣдовательномъ порядкѣ, а углы каждаго треугольника буквами A, B и C; именно, буквою B — уголъ, противолежащій исходной сторонѣ, буквою A—уголъ, противолежащій сторонѣ продолженія, а буквою C—промежуточный (см. черт. 27 и 196).

2) Выписываютъ въ таблицу всѣ углы послѣдовательныхъ треугольниковъ въ порядкѣ B, C и A и приводятъ ихъ суммы къ 180° простою разбивкою разности $(A+B+C)-180°$ на три равныя части.

3) Начиная съ данной стороны, вычисляютъ шести или семизначными логариѳмами всѣ стороны треугольниковъ по общимъ правиламъ и по схемѣ § 132. При подъискиваніи логариѳмовъ синусовъ всѣхъ угловъ надо выписывать попутно ихъ перемѣны α, β и γ, соотвѣтствующія перемѣнамъ угловъ на $1''$. Необходимо помнить, что для угловъ, бо̀льшихъ 90°, эти перемѣны отрицательны. Разность между вычисленнымъ и даннымъ логариѳмами послѣдней стороны даетъ по формулѣ (120) извѣстный членъ v' второго условнаго уравненія.

4) *Вычисляютъ сферическіе избытки всѣхъ треугольниковъ* по первой изъ формулъ (34) § 36. Для этого вычисленія достаточны четырехзначные логариѳмы, а коэффиціентъ [4] берется изъ геодезическихъ таблицъ для средней географической широты всей тріангуляціи.

5) *Исходя* изъ данной (астрономической или тригонометрической) точки, вычисляютъ послѣдовательно широты, долготы и азимуты всѣхъ вершинъ ходовой линіи по формуламъ (110) или (112) шести или семизначными логариѳмами. Составляя

---

*) Если въ цѣпи имѣются четыреугольники и центральныя системы, то эти фигуры должны быть уравнены раньше (см. §§ 126 и 125) и всѣ лишніе треугольники отброшены, чтобы цѣпь состояла только изъ ряда простыхъ треугольниковъ.

азимутъ каждой слѣдующей стороны ходовой линіи, должно къ вычисленному обратному азимуту предъидущей стороны придавать сумму прилегающихъ къ вершинѣ *сферическихъ* угловъ треугольниковъ, для чего плоскіе углы таблицы должно увеличивать третью избытка соотвѣтствующаго треугольника; напримѣръ, азимутъ стороны s_2 (черт. 196) равенъ обратному азимуту стороны s_1 плюсъ сумма:

$$B_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 + C_3 + \frac{1}{3}\varepsilon_3 + A_4 + \frac{1}{3}\varepsilon_4$$

При вычисленіи широтъ и долготъ необходимо попутно выписывать изъ таблицъ $\Delta\, lg\, sin\, S$, $\Delta\, lg\, cos\, S$, $\Delta\, lg\, \theta$ и $\Delta\, lg\, \lambda$, т. е. логариөмическія разности, соотвѣтствующія перемѣнамъ S, θ и λ на $1''$, причемъ знаки первыхъ двухъ разностей зависятъ отъ четверти окружности, въ которой лежитъ азимутъ S, а знаки вторыхъ двухъ зависятъ отъ знаковъ θ и λ: когда они отрицательны, то $\Delta\, lg\, \theta$ и $\Delta\, lg\, \lambda$ тоже отрицательны.

Въ результатѣ получаются широта и долгота конечной точки и азимутъ конечной стороны. Если уравнивается замкнутый полигонъ, то получаются широта и долгота начальной точки и азимутъ начальной стороны. Сравненіе ихъ съ данными даетъ по формуламъ (119) и (121) извѣстные члены v, v'' и v''' остальныхъ трехъ условныхъ уравненій.

6) Вычисляютъ коэффиціенты p, P, q и Q по формуламъ (122); для избѣжанія повтореній надо суммировать подобные члены, начиная съ послѣдняго треугольника.

7) Вычисляютъ коэффиціенты m и n всѣхъ четырехъ условныхъ уравненій по формуламъ (123), (124) и (124*), а вслѣдъ за тѣмъ коэффиціенты M и N по формуламъ (125). Для болѣе точнаго рѣшенія нормальныхъ уравненій даже при помощи логариөмовъ съ небольшимъ числомъ десятичныхъ знаковъ, напримѣръ четырехзначныхъ, весьма полезно, сообразуясь съ числовыми величинами коэффиціентовъ m и n, а также извѣстныхъ членовъ v, передъ началомъ составленія коэффиціентовъ нормальныхъ уравненій умножить или раздѣлить ихъ на 10 или на 100 съ тѣмъ, чтобы всѣ коэффиціенты и извѣстные члены были выражены приблизительно одинаковыми числами. Такъ какъ условныя уравненія выражаютъ точное соотношеніе

между наблюденными величинами, совершенно независимо отъ самихъ наблюденій, то такое умноженіе или дѣленіе не нарушаетъ относительныхъ вѣсовъ наблюденій.

8) Вычисляютъ коэффиціенты нормальныхъ уравненій (127). Они слѣдуютъ общему закону коэффиціентовъ нормальныхъ уравненій, т. е. коэффиціентъ у второй неизвѣстной B въ первомъ уравненіи равенъ коэффиціенту у первой неизвѣстной A во второмъ, коэффиціентъ у третьей неизвѣстной C въ первомъ равенъ коэффиціенту у первой неизвѣстной A въ третьемъ и т. д. Такимъ образомъ, въ сущности, вмѣсто 16 необходимо вычислить только 10 разныхъ коэффиціентовъ; однако для повѣрки лучше вычислить каждый коэффиціентъ дважды независимо обоими путями. При этомъ нелишне замѣтить, что въ данномъ случаѣ не только, напримѣръ

$$[mM' + nN'] = [m'M + n'N]$$

но существуетъ еще и равенство каждыхъ слагаемыхъ, такъ что для треугольника k:

$$m_k M_k' + n_k N_k' = m_k' M_k + n_k' N_k$$

Чтобы имѣть столь же надежную и независимую повѣрку для вычисленія главныхъ членовъ по діагонали системы нормальныхъ уравненій (127), можно пользоваться легко повѣряемымъ соотношеніемъ, см. форм. (125):

$$[mM + nN] = \frac{2}{3}[m^2 + n^2 - mn]$$

которое справедливо для всѣхъ четырехъ діагональныхъ коэффиціентовъ; и тутъ существуетъ только что указанное равенство не только суммъ, но и всѣхъ отдѣльныхъ слагаемыхъ. Для облегченія производства многочисленныхъ умноженій, особенно когда число треугольниковъ цѣпи весьма значительно, хорошо пользоваться ариомометромъ *Однера* или другою какою нибудь счетною машиною.

9) Рѣшаютъ нормальныя уравненія, т. е. постепеннымъ исключеніемъ по правиламъ, указаннымъ въ § 120, вычисляютъ коэффиціенты A, B, C и D, затѣмъ находятъ поправки

x, y и z угловъ всѣхъ треугольниковъ по формуламъ (126) и повѣряютъ ихъ по формулѣ (128).

10) Предварительно уравненные, т. е. приведенные къ суммамъ въ 180° углы треугольниковъ исправляютъ полученными поправками x, y и z и вычисляютъ заново всѣ стороны; полигонъ долженъ сомкнуться теперь безъ всякихъ разногласій. Съ выписанными своевременно перемѣнами логариомовъ новое вычисленіе, съ окончательно уравненными углами, не требуетъ большихъ усилій, особенно, если оно производится на тѣхъ же мѣстахъ, въ оставленныхъ сбоку столбцахъ; вычисленіе можно произвести, вовсе не открывая логариомическихъ таблицъ.

Наибольшее вниманіе и тщательность должны быть приложены въ самомъ началѣ, именно при вычисленіи извѣстныхъ членовъ условныхъ уравненій и составленіи коэффиціентовъ (разныхъ m и n); это всего лучше дѣлать въ двѣ руки. Дальнѣйшія дѣйствія: составленіе коэффиціентовъ M и N, коэффиціентовъ нормальныхъ уравненій, а равно рѣшеніе послѣднихъ, хорошо повѣряются, и ни одна ошибка не можетъ остаться не открытою.

143. Числовой примѣръ. На чертежѣ 182 изображены треугольники, связавшіе сторону Борницы—Гатчино съ Молосковицкимъ базисомъ тріангуляціи С.-Петербургской губ. По даннымъ этой тріангуляціи:

Сигналъ Борницы
$$\begin{cases} \varphi = 59^\circ 31' 11''.4434 \\ \omega = -0\ 26\ 55\ .9862 \\ \alpha = 70\ 27\ 50.95 \text{ на Гатчино.} \end{cases}$$

Логариомъ стороны Борницы—Гатчино (въ саж.) = 3.851 1110

Сигналъ Озертицы
$$\begin{cases} \varphi = 59^\circ 29' 16''.6178 \\ \omega = -1\ 18\ 44\ .6132 \\ \alpha = 150\ 38\ \ 7\ .00 \text{ на Молосковицы.} \end{cases}$$

Логариомъ Молосковицкаго базиса (въ саж.) = 3.663 1028

1) Изъ чертежа видно, что кратчайшая ходовая линія бу-

деть: Борницы (I) — Ермолино (II) — Терпилицы (III) — Озертицы (IV).

2, 3 и 4) Списокъ треугольниковъ, приведенный ниже, есть повтореніе списка § 124; поэтому здѣсь даны прямо плоскіе углы, полученные непосредственнымъ приведеніемъ суммъ угловъ во всѣхъ треугольникахъ къ 180°. Для вычисленія сферическихъ избытковъ взято (для $\varphi = 59°25'$): $[4] = 2.0608$. Съ плоскими углами вычислены всѣ треугольники (причемъ попутно выписаны величины α, β и γ) и для логариѳма послѣдней стороны получено 3.663 0752.1, такъ что по формулѣ (120) выходитъ:

$$v' = -275.9$$

величина, полученная и въ § 124.

№№ треуг.	Названія точекъ.	Измѣр. углы, прив. къ плоскимъ.	Сф. изб. угловъ и треуг.	β, γ, α.	Уравненные	
					сфер. углы.	lg сторонъ.
	Тихковицы . .	48°47′56″.98	0″.15	+ 18.4	52″.29	3.851 1110
1	Борницы . . .	94 10 21 .88	0 .16	— 1.5	12 .74	3.973 5168
	Гатчино . . .	37 1 41 .14	0 .15	+ 27.9	55 .43	3.754 4530
			0 .46			
	Ермолино . .	46 46 28 .45	0 .10	+ 19.8	22 .24	3.754 4530
2	Тихковицы . .	38 18 29 .93	0 .10	+ 26.6	41 .58	3.684 2852
	Борницы . . .	94 54 61 .62	0 .11	— 1.8	56 .49	3.890 3374
			0 .31			
	Калитино . . .	70 22 3 .93	0 .14	+ 7.5	2 .55	3.890 3374
3	Ермолино. . .	70 21 23 .19	0 .15	+ 7.5	18 .25	3.890 3042
	Тихковицы . .	39 16 32 .88	0 .15	+ 25.8	39 .64	3.717 8061
			0 .44			
	Терпилицы . .	35 12 35 .66	0 .16	+ 29.9	37 .14	3.717 8061
4	Калитино . . .	76 53 4 .19	0 .17	+ 4.9	7 .04	3.945 4696
	Ермолино . .	67 54 20 .15	0 .16	+ 8.6	16 .31	3.923 8200
			0 .49			
	Горицы . . .	47 23 59 .28	0 .22	+ 19.4	57 .30	3.923 8200
5	Терпилицы . .	96 19 57 .28	0 .21	— 3.3	62 .33	4.054 2315
	Калитино . . .	36 16 3 .44	0 .22	+ 28.7	1 .02	3.828 8801
			0 .65			

№№ треуг.	Названія точекъ.	Измѣр. углы, прив. къ плоскимъ.	Сф. изб. угловъ и треуг.	β, γ, α.	Уравненные сфер. углы.	Уравненные lg сторонъ.
6	Озертицы. . .	44°57′ 2″.39	0″.20	+ 21.1	0″.30	3.828 8801
	Терпилицы . .	55 2 49 .95	0 .20	+ 14.7	54 .95	3.893 3961
	Горицы. . . .	80 0 7 .66	0 .20	+ 3.7	5 .35	3.973 1276
			0 .60			
7	Молосковицы.	90 28 27 .59	0 .15	— 0.1	23 .25	3.973 1276
	Озертицы. . .	60 11 57 .06	0 .14	+ 12.1	73 .86	3.911 5613
	Терпилицы . .	29 19 35 .35	0 .14	+ 37.5	23 .32	3.663 1028
			0 .43			

5) Нѣтъ надобности приводить полностью вычисленіе географическихъ координатъ отъ Борницъ до Озертицъ. Достаточно лишь слѣдующихъ данныхъ:

Составленіе азимута съ Борницъ на Ермолино:

Данный азимутъ на Гатчино	70°27′50″.95
Сфер. уголъ 1-го треуг. при Борницахъ .	94 10 22 .033
» » 2-го » » » .	94 55 1 .723
Сумма . .	259 33 14 .71

Съ этимъ азимутомъ, длиною стороны Борницы—Ермолино ($lg\, s_1 = 3.684\,1935$) и данными геогр. координатами Борницъ, получаемъ для Ермолина:

$\varphi = 59°30'10''.5925 \qquad \omega = -0°37'40''.5086 \qquad$ обр. аз. $= 79°23'59''.30$

$\Delta\, lg\, sin\, S = + 3.9 \qquad \Delta\, lg\, cos\, S = - 114.2 \qquad \Delta\, lg\, \theta = - 72000 \qquad \Delta\, lg\, \lambda = - 6700$

Азимутъ направленія изъ Ермолина на Терпилицы получится отъ прибавленія къ предъидущему обратному азимуту сферическихъ угловъ при Ермолинѣ:

2-го треугольника . . . . =	46°46′28″.553
3-го » . . . . =	70 21 23 .337
4-го » . . . . =	67 54 20 .313
Сумма . . =	185 2 12 .20
Слѣд. азимутъ Ермолино—Терпилицы . =	264 26 11 .50

Съ этимъ азимутомъ, длиною стороны Ермолино—Терпилицы ($lg\, s_2 = 3.945\,3922$) и геогр. координатами Ермолина получаемъ для Терпилицъ:

$$\varphi = 59°29'10''.1460 \qquad \omega = -0°57'30''.1878 \qquad \text{обр. аз.} = 84°9'6''.49$$

$$\Delta\, lg\, sin\, S = +2.0 \quad \Delta\, lg\, cos\, S = -216.2 \quad \Delta\, lg\, \theta = -74\,000 \quad \Delta\, lg\, \lambda = -3650$$

Азимутъ направленія изъ Терпилицъ на Озертицы получится отъ прибавленія къ предъидущему обратному азимуту сферическихъ угловъ при Терпилицахъ:

4-го треугольника	. . . . =	35°12′35″.823
5-го »	. . . . =	96 19 57 .497
6-го »	. . . . =	55 2 50 .150
	Сумма . . =	186 35 23 .47
Слѣд. азимутъ Терпилицы—Озертицы	. =	270 44 29 .96

Съ этимъ азимутомъ, длиною стороны Терпилицы—Озертицы ($lg\, s_3 = 3.993\,0544$) и геогр. координатами Терпилицъ получаемъ для Озертицъ:

$$\varphi = 59°29'16''.8097 \qquad \omega = -1°18'44''.073 \qquad \text{обр. аз.} = 90°26'12''.49$$

$$\Delta\, lg\, sin\, S = -0.3 \quad \Delta\, lg\, cos\, S = -1627.0 \quad \Delta\, lg\, \theta = +520\,000 \quad \Delta\, lg\, \lambda = -3410$$

Прибавивъ наконецъ къ этому послѣднему обратному азимуту сферическій уголъ 7-го треугольника при Озертицахъ (60°11′57″.203), получимъ азимутъ направленія съ Озертицъ на Молосковицы = 150°38′9″.693, такъ что разность вычисленнаго и даннаго азимутовъ равна $+2''.693$; вводя сюда еще сближеніе меридіановъ ($\Delta\omega\, sin\, \varphi_n = +0''.465$), по формуламъ (119) и (121) получаемъ:

$$v = +2''.228 \qquad v'' = +0''.1919 \qquad v''' = +0''.5398$$

6) Изъ предъидущихъ вычисленій имѣемъ:

	$\frac{1}{\Delta\, lg\, \theta}$	$\frac{\Delta\, lg\, cos\, S}{\Delta\, lg\, \theta}$	$\frac{1}{\Delta\, lg\, \lambda}$	$\frac{\Delta\, lg\, sin\, S}{\Delta\, lg\, \lambda}$
I	$-0.000\,01389$	$+0.001\,587$	$-0.000\,1493$	$-0.000\,5821$
II	$-0.000\,01351$	$+0.002\,922$	$-0.000\,2740$	$-0.000\,5479$
III	$+0.000\,00192$	$+0.003\,129$	$-0.000\,2932$	$+0.000\,0880$

и суммируя, начиная снизу, получаемъ по формуламъ (122):

	p	P	q	Q
I	— 0.000 02548	+ 0.007 638	— 0.000 7165	— 0.001 0420
II	— 0.000 01159	+ 0.006 051	— 0.000 5672	— 0.000 4599
III	+ 0.000 00192	+ 0.003 129	— 0.000 2932	+ 0.000 0880

7) Коэффиціенты m и n, вычисленные по формуламъ (123) и (124), приведены полностью въ нижеслѣдующей таблицѣ. Значеніе и знаки m, n, m' и n' понятны непосредственно; что же касается остальныхъ коэффиціентовъ, то для ясности приведемъ вычисленіе m'' для первыхъ двухъ треугольниковъ:

1-ый треуг. безъ стороны ходовой линіи

$$m'' = (-0.000\,02548)(+27.9) - 0.007\,638 = -0.008\,349$$

2-ой треуг. со стороною ходовой линіи

$$m'' = (-0.000\,01159)(-1.8) + (0.000\;01339)(+26.6) +$$
$$+ 0.007\,638 = +0.008\,028$$

Замѣтимъ, что всѣ коэффиціенты (кромѣ m и n) увеличены въ 10 разъ, сообразно чему во столько же разъ увеличены и извѣстные члены v', v'' и v'''.

Треугольники.	m	n	m'	n'	m''	n''	m'''	n'''
1	—1	—1	+2.79	—1.84	—0.0835	—0.0717	—0.1895	+0.1422
2	+1	+1	—0.18	—1.98	+0.0803	+0.0692	+0.0395	+0.1770
3	—1	—1	+2.58	—0.75	—0.0635	—0.0596	—0.1417	+0.0471
4	+1	+1	+0.86	—2.99	+0.0613	+0.0354	—0.0164	+0.1839
5	—1	—1	+2.87	—1.94	—0.0307	—0.0317	—0.0850	+0.0560
6	—1	—1	+0.37	—2.11	—0.0312	—0.0317	—0.0117	+0.0610
7	—1	—1	+3.75	+0.01	0	0	0	0

Далѣе по формуламъ (125) имѣемъ слѣдующую таблицу различныхъ коэффиціентовъ M и N:

Треугольники.	M	N	M'	N'	M''	N''	M'''	N'''
1	−0.333	−0.333	+2.473	−2.157	−0.0318	−0.0200	−0.1737	+0.1580
2	+0.333	+0.333	+0.540	−1.260	+0.0305	+0.0194	−0.0327	+0.1048
3	−0.333	−0.333	+1.970	−1.360	−0.0225	−0.0186	−0.1102	+0.0786
4	+0.333	+0.333	+1.570	−2.280	+0.0291	+0.0032	−0.0722	+0.1281
5	−0.333	−0.333	+2.560	−2.250	−0.0099	−0.0109	−0.0753	+0.0657
6	−0.333	−0.333	+0.950	−1.530	−0.0102	−0.0107	−0.0281	+0.0446
7	−0.333	−0.333	+2.497	−1.243	0	0	0	0

8) Вычисляемъ коэффиціенты нормальныхъ уравненій по формуламъ (127). Это самая изнурительная работа, но она доставляетъ рядъ удовольствій, благодаря строгой и любопытной повѣркѣ, объясненной въ п. 8 предъидущаго §. Въ данномъ случаѣ нормальныя уравненія оказываются (опуская повторяющіеся члены):

$$\begin{aligned} +4.667\,A - 3.340\,B + 0.2165\,C + 0.1684\,D + 2.228 &= 0\\ +52.180\,B - 0.1131\,C - 2.2137\,D - 27.590 &= 0\\ +0.01362\,C + 0.00992\,D + 1.919 &= 0\\ +0.12986\,D + 5.398 &= 0 \end{aligned}$$

9) Рѣшивъ эти уравненія, получаемъ:

$$A = +21.136 \quad B = -2.054 \quad C = -443.0 \quad D = -70.15$$

и затѣмъ по формуламъ (126) имѣемъ слѣдующія поправки всѣхъ угловъ:

Треугольники.	x	y	z
1	$+14''.14$	$-4''.84$	$-9''.30$
2	-5.24	-6.31	$+11.55$
3	$+6.61$	-1.52	-5.09
4	-4.00	$+1.32$	$+2.68$
5	-2.64	-2.20	$+4.84$
6	-2.51	-2.29	$+4.80$
7	-12.17	-4.49	$+16.66$

Повѣрочная формула (128) даетъ:

$$\Sigma(x^2+y^2+z^2) = +1123 \qquad Av+Bv'+Cv''+Dv''' = -1125$$

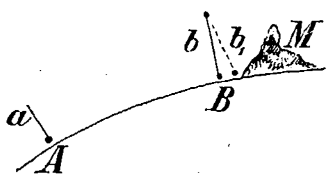
10) Уравненные углы и логариѳмы сторонъ треугольниковъ помѣщены въ послѣднихъ двухъ столбцахъ таблицы стр. 547 и 548. Легко повѣрить непосредственнымъ вычисленіемъ, что съ этими данными не будетъ болѣе противорѣчій въ вычисленіи географическихъ координатъ, по крайней мѣрѣ въ предѣлахъ точности семизначныхъ логариѳмическихъ таблицъ.

144. Мѣстныя притяженія. Если въ числѣ точекъ тріангуляціи имѣется только одна астрономическая, на которой изъ астрономическихъ наблюденій опредѣлены широта и долгота, а равно азимутъ какой нибудь исходящей изъ нея стороны, то можно вычислить географическія координаты всѣхъ прочихъ и азимуты всѣхъ сторонъ тріангуляціи. Эти вычисленныя широты, долготы и азимуты, въ отличіе отъ непосредственно наблюденныхъ астрономическихъ, называются геодезическими. Если же въ числѣ точекъ тріангуляціи имѣется нѣсколько астрономическихъ, то для всѣхъ ихъ (кромѣ одной) получаются два рода координатъ: *астрономическія*, изъ непосредственныхъ наблюденій, и *геодезическія*, изъ вычисленій. Повидимому, эти координаты должны быть или совершенно согласными или различаться лишь небольшими величинами, объяснимыми неизбѣжными погрѣшностями наблюденій; на самомъ же дѣлѣ разногласія между астрономическими и геодезическими координатами весьма часто оказываются гораздо бóльшими.

Углы треугольниковъ въ новѣйшихъ тріангуляціяхъ получаются со средними ошибками менѣе $\pm 1''$; съ такими же ошибками опредѣляются и астрономическіе азимуты. Если цѣпь треугольниковъ расположена по параллели, то конечныя точки, лежащія отъ начальной въ разстояніи, напримѣръ, 400 верстъ, только отъ невѣрности азимута въ $\pm 1''$ могли бы уклониться къ сѣверу или къ югу на 1 сажень, что составило бы въ широтѣ ошибку, меньшую $0''.1$. Отъ погрѣшностей въ углахъ и сторонахъ отдѣльныхъ треугольниковъ ошибки могутъ быть конечно больше, но едва ли онѣ превзошли бы указанную въ

10 разъ. Такое предположеніе всего нагляднѣе подтверждается малыми разногласіями въ сторонахъ треугольниковъ, вычисленныхъ по разнымъ, далеко отстоящимъ базисамъ; эти разногласія обыкновенно не превосходятъ 1 сажени; между тѣмъ разногласія въ широтахъ и долготахъ нерѣдко достигаютъ $10''$ и болѣе, что въ линейной мѣрѣ составляетъ 150 и болѣе саженей.

Ближайшее изслѣдованіе разногласій между астрономическими и геодезическими координатами показало, что главная причина ихъ заключается не въ погрѣшностяхъ наблюденій, а въ неправильностяхъ земного сфероида. Вычисленіе геодезическихъ координатъ основывается на предположеніи, что Земля есть совершенно правильный сфероидъ съ тѣми или иными элементами, и что отвѣсная линія въ каждой точкѣ совпадаетъ съ нормалью къ поверхности сфероида. Астрономическія же опредѣленія независимы отъ предположеній о видѣ нашей планеты и даютъ то положеніе отвѣсной линіи, которое обусловливается распредѣленіемъ массъ внутри Земли и скоростью ея вращенія около оси. Слѣдовательно, если для данной точки обнаружено разногласіе между астрономическими и геодезическими координатами, то причину его надо искать въ неправильностяхъ распредѣленія массъ земной коры, которыя и производятъ такъ называемыя *мѣстныя притяженія.*



Черт. 198.

Пусть къ сѣверу отъ конечной точки тріангуляціи B (черт. 198) существуетъ большая гора M. Отъ ея притягательнаго дѣйствія отвѣсная линія въ B отклонится отъ нормали сфероида b къ сѣверу и приметъ направленіе b_1, такъ что широта точки B окажется изъ наблюденій меньше, чѣмъ бы слѣдовало и чѣмъ получится изъ геодезическихъ вычисленій. Наоборотъ, если бы гора M лежала къ югу отъ точки B, то отвѣсная линія отклонилась бы тоже къ югу, и астрономическая широта точки B оказалась бы больше, чѣмъ по геодезическому вычисленію изъ начальной точки A. Если бы притягивающая масса лежала на одной параллели съ разсматриваемою точкою, то обнаружились бы разногласія между астрономическими и геодезическими долготами.

Мысль о возможности обнаружить непосредственными наблюденіями отклоненіе отвѣсной линіи притяженіемъ горы была высказана еще *Ньютономъ*, но первое дѣйствительное измѣреніе этого рода произведено *Буге* въ Южной Америкѣ (см. § 10). Онъ избралъ двѣ точки, лежащія на одной параллели къ югу отъ горы Чимборасо: одну почти на меридіанѣ съ предполагаемымъ центромъ тяжести этой горы, другую на значительномъ разстояніи къ западу. Изъ произведенныхъ потомъ наблюденій и вычисленій оказалось, что хотя обѣ точки и лежатъ на одной параллели сфероида, однако вслѣдствіе притяженія горы ихъ астрономическія широты различаются почти на $8''$.

Другое подобное же, но болѣе точное изслѣдованіе произведено въ 1774 году англійскимъ астрономомъ *Маскилайномъ* (1732—1811). Онъ наблюдалъ на двухъ точкахъ одного меридіана на сѣверномъ и южномъ скатахъ горы Шихалліонъ въ Шотландіи. Обѣ точки были связаны тріангуляціею, и потому явилась возможность непосредственно сравнить разности астрономическихъ и геодезическихъ широтъ. Разность астрономическихъ широтъ оказалась $53''$, тогда какъ разность широтъ геодезическихъ—только $41''$. Это разногласіе, въ связи съ вычисленною массою горы, дало возможность впервые опредѣлить массу, а, слѣдовательно, и среднюю плотность всей Земли.

Вообще всего естественнѣе предполагать, что мѣстныя притяженія производятся именно видимыми неправильностями земного рельефа. Если имѣется подробная гипсометрическая карта страны и опредѣлены плотности горныхъ породъ, образующихъ рельефъ, то всю толщу коры надъ поверхностью идеальнаго сфероида можно мысленно разбить на отдѣльныя призмы, массы и разстоянія которыхъ отъ данной астрономической точки будутъ извѣстны. Равнодѣйствующая притяженій всѣхъ этихъ призмъ дастъ по величинѣ и по направленію мѣстное отклоненіе отвѣсной линіи, которое затѣмъ легко разложить на отклоненіе по широтѣ и на отклоненіе по долготѣ. Такія вычисленія произведены для многихъ точекъ земной поверхности, и результаты весьма часто оправдывали предположеніе, что отклоненіе отвѣсной линіи происходитъ именно только отъ притяженія наружныхъ массъ.

Не останавливаясь на подробностяхъ многочисленныхъ изысканій мѣстныхъ притяженій въ Швейцаріи, Италіи и другихъ горныхъ странахъ, приведемъ одинъ изъ поразительнѣйшихъ результатовъ изслѣдованій притягательнаго дѣйствія нашихъ Кавказскихъ горъ *). Астрономическія широты Владикавказа и Душета изъ непосредственныхъ наблюденій получились такія:

$$43^\circ 1' 40''.24 \quad \text{и} \quad 42^\circ 4' 55''.67$$

Геодезическія же широты этихъ точекъ, вычисленныя отъ начальной астрономической точки Кавказской тріангуляціи у Екатериноградскаго базиса, оказались:

$$43^\circ 1' 4''.48 \quad \text{и} \quad 42^\circ 5' 13''.96$$

Разности $+35''.76$ и $-18''.29$ никакимъ образомъ не могутъ быть объяснены ошибками наблюденій. Вычисленія притяженія Кавказскихъ горъ на широты названныхъ точекъ дали величины $-38''.76$ и $+17''.43$, такъ что астрономическія широты Владикавказа и Душета, исправленныя мѣстными притяженіями, выходятъ:

$$43^\circ 1' 1''.48 \quad \text{и} \quad 42^\circ 5' 13''.10$$

Остающіяся разности между астрономическими и геодезическими широтами ($-3''.00$ и $-0''.86$) столь незначительны, что могутъ быть приписаны съ одной стороны ошибкамъ наблюденій, а съ другой—погрѣшностямъ вычисленій притяженій, вычисленій, которыя по самой сущности вопроса, по недостатку данныхъ, не могли быть очень точными.

Однако разногласія между астрономическими и геодезиче-

*) *І. Стебницкій*—Объ отклоненіи отвѣсныхъ линій притяженіемъ Кавказскихъ горъ (приложеніе къ XVII тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, 1870). См. также: *В. Витковскій*—Отклоненіе отвѣсной линіи въ Выборгѣ (Записки В. Т. Отдѣла Гл. Штаба, Часть XLII. 1888) и *М. Лебедевъ*. Объ отклоненіи отвѣсныхъ линій на Балканскомъ полуостровѣ (тамъ же, часть LIII, 1896).

скими координатами не вездѣ объясняются притяженіями видимыхъ горныхъ массъ. Иногда мѣстныя притяженія обнаруживаются и въ странахъ равнинныхъ, гдѣ нѣтъ никакихъ видимыхъ причинъ отклоненій отвѣсной линіи. Поучительнымъ примѣромъ этого рода явленій могутъ служить аномаліи въ направленіи силы тяжести въ окрестностяхъ Москвы. Еще въ 1848 г. *О. Струве* обратилъ вниманіе на изумительныя расхожденія астрономическихъ и геодезическихъ широтъ нѣкоторыхъ точекъ Московской тріангуляціи. Эти расхожденія, достигающія до $10''$, въ свое время поколебали даже довѣріе къ точности вычисленій самой тріангуляціи. Впослѣдствіи ими живо заинтересовался бывшій профессоръ Московскаго университета и Константиновскаго Межевого института *Швейцеръ* (1816—1873); съ нѣсколькими молодыми русскими учеными онъ проложилъ новыя тріангуляціи почти по всей Московской губерніи и произвелъ множество астрономическихъ наблюденій. Изъ послѣдующихъ вычисленій выяснилось, что къ югу отъ города Москвы, почти въ направленіи съ запада на востокъ и на протяженіи до 100 верстъ простираются двѣ параллельныя полосы, въ которыхъ въ одной (сѣверной) астрономическія широты меньше геодезическихъ, а въ другой (южной), наоборотъ, астрономическія широты больше геодезическихъ. Къ сѣверу и къ югу отъ этихъ полосъ, равно какъ и въ серединѣ между ними никакихъ аномалій въ направленіи отвѣсной линіи не замѣчено. Въ каждой же полосѣ уклоненія широтъ идутъ отъ краевъ къ серединамъ непрерывно возрастая, и наибольшія разности уклоненій въ противоположныя стороны, достигающія $17''$, оказываются между точками, отстоящими всего на $786''$ по широтѣ (около 24 верстъ).

Отклоненія отвѣсныхъ линій въ Московской губерніи могутъ быть объяснены вполнѣ удовлетворительно, если предположить, что въ направленіи съ запада на востокъ лежитъ на извѣстной глубинѣ слой горной породы, плотность которой равна лишь половинѣ средней плотности земной коры. Швейцеръ сдѣлалъ даже предположеніе, нѣтъ ли южнѣе Москвы богатыхъ залежей каменнаго угля. Замѣчательно, что аномаліи въ направленіи отвѣсной линіи оказались здѣсь въ связи съ аномаліями въ элементахъ земного магнитизма.

Подобныя же аномаліи обнаружены и въ другихъ мѣстахъ. Напримѣръ, въ Индіи, у южной подошвы Гималаевъ, гдѣ, благодаря присутствію этого высочайшаго на Землѣ горнаго хребта, слѣдовало бы ожидать весьма значительныхъ разногласій между астрономическими и геодезическими широтами, дѣйствительныя разногласія оказались весьма незначительными.

Не подлежитъ сомнѣнію, что, кромѣ притяженій наружныхъ массъ, существуютъ другія возмущающія причины. Весьма вѣроятно, что ихъ слѣдуетъ искать въ неравномѣрномъ распредѣленіи плотностей подъ поверхностью Земли. Легко понять, что скопленія породъ большой плотности должны дѣйствовать на отвѣсную линію подобно горѣ на поверхности, а пустоты, или скопленія массъ малой плотности — подобно впадинѣ или равнинѣ между горными хребтами. Въ этихъ случаяхъ, вслѣдствіе отсутствія видимыхъ причинъ отклоненій, нельзя вычислять мѣстныя притяженія впередъ и исправлять ими астрономическія координаты; обнаруживаемыя же разногласія даютъ лишь поводъ подозрѣвать существованіе возмущающихъ причинъ. Въ будущемъ такія разногласія откроютъ, вѣроятно, новое поле для совмѣстной дѣятельности геодезистовъ и геологовъ; нынѣ же они служатъ матеріаломъ для изслѣдованія вида геоида (см. § 24).

Къ счастію значительныя отклоненія отвѣсныхъ линій и притомъ отклоненія, замѣчаемыя въ томъ же направленіи на обширныхъ пространствахъ, встрѣчаются сравнительно рѣдко. По большей части они не превосходятъ нѣсколькихъ секундъ и при переходѣ отъ одной точки къ другой мѣняютъ величину и направленіе, такъ что среднее изъ отклоненій на многихъ, даже близкихъ другъ къ другу точкахъ оказывается почти нулемъ. Чтобы по возможности освободить астрономическія координаты отъ вліянія мѣстныхъ притяженій, достаточно опредѣлить изъ астрономическихъ наблюденій широты, долготы и азимуты на нѣсколькихъ сосѣднихъ точкахъ тріангуляціи и затѣмъ при помощи рѣшенія прямой геодезической задачи перенести ихъ на одну, произвольно избранную, гдѣ нибудь по серединѣ. Если изъ всѣхъ полученныхъ результатовъ взять простыя ариѳметическія среднія, то можно съ нѣкоторою увѣренностью считать, что эти среднія географическія координаты будутъ освобождены отъ мѣстныхъ притяженій. Ихъ-то и слѣдуетъ принимать исходными для вычисленія широтъ, долготъ и азимутовъ всѣхъ прочихъ точекъ тріангуляціи. Гдѣ нибудь въ другомъ мѣстѣ тріангуляціи можно избрать для повѣрки другую астрономическую точку и опредѣлить ея координаты тоже какъ среднее изъ астрономическихъ широтъ, долготъ и азимутовъ на нѣсколькихъ окружающихъ точкахъ, перенесенныхъ на избранную.

Въ новѣйшихъ тріангуляціяхъ подъ астрономическою точкою именно понимаютъ точку, связанную тріангуляціею съ нѣсколькими другими, на которыхъ произведены непосредственныя астрономическія наблюденія и на которой такимъ образомъ болѣе или менѣе *исключены всѣ мѣстныя притяженія.* При такой системѣ разногласія между астрономическими и геодезическими координатами оказываются вообще незначительными.

Примѣчаніе. Вслѣдствіе существованія мѣстныхъ притяженій отвѣсныя линіи точекъ земной поверхности, вообще говоря, не пересѣкаются съ осью вращенія Земли; поэтому опредѣленія меридіана, параллелей и географическихъ координатъ, данныя въ §§ 25 и 29 для сфероида, требуютъ обобщенія. ***Меридіаномъ точки*** на геоидѣ называется плоскость, проходящая черезъ отвѣсную линію данной точки и параллельная оси вращенія Земли, ***географическою широтою*** называется дополненіе до 90° угла, составляемаго отвѣсною линіею данной точки съ осью вращенія Земли, а ***географическою долготою*** —уголъ, составляемый плоскостью меридіана данной точки съ плоскостью произвольно избраннаго перваго меридіана. Геометрическое мѣсто точекъ земной поверхности, имѣющихъ равныя широты, называется ***параллелью*** (въ частности, геометрическое мѣсто точекъ съ широтою, равною нулю,—***экваторомъ***), а геометрическое мѣсто точекъ, имѣющихъ равныя долготы —***меридіаномъ.*** Легко понять, что отъ существованія мѣстныхъ притяженій меридіаны, параллели и экваторъ представляютъ, вообще говоря, кривыя двоякой кривизны.

XI.

Вычисленіе высотъ.

145. Высоты точекъ и средній уровень. Такъ какъ положеніе точки въ пространствѣ опредѣляется тремя координатами, то и положеніе какой нибудь точки на физической поверхности Земли не опредѣлено окончательно, пока, кромѣ широты и долготы, не будетъ дана ея *высота*, подъ которою разумѣютъ кратчайшее разстояніе точки отъ поверхности океана, мысленно продолженной подъ всѣми материками. Хотя уровень воды океановъ и морей безпрерывно измѣняется отъ приливовъ и отливовъ, вѣтровъ, теченій, перемѣнъ въ давленіи атмосферы и пр., однако продолжительныя наблюденія у береговъ показали, что измѣненія уровня совершаются, вообще говоря, въ довольно тѣсныхъ предѣлахъ, и средній уровень воды не только въ каждой береговой точкѣ, но и во всѣхъ океанахъ и открытыхъ моряхъ, для практическихъ цѣлей, можно считать одинаковымъ. Такимъ образомъ, *высотою точки называется ея превышеніе надъ среднимъ уровнемъ океановъ*, причемъ высоты считаются по отвѣснымъ линіямъ соотвѣтствующихъ точекъ. Эти высоты называются *абсолютными*, въ отличіе отъ *относительныхъ*, которыя представляютъ превышенія одной точки надъ другою или кратчайшія разстоянія между уровенными поверхностями двухъ данныхъ точекъ.

Для опредѣленія средняго уровня воды у какой нибудь береговой точки служатъ футштоки, лимниграфы и марегр1афы.

Футштокомъ называется рейка съ дѣленіями, укрѣпленная отвѣсно и неподвижно въ прочномъ береговомъ сооруженіи, напримѣръ, въ каменной набережной, и такъ, чтобы отсчеты можно было дѣлать какъ при самомъ высокомъ, такъ и при самомъ низкомъ стояніи воды. Если наблюденія производились многіе годы подрядъ и по нѣсколько разъ въ день, то легко вывести отсчетъ по рейкѣ, соотвѣтствующій среднему уровню, а затѣмъ установить новую рейку, нуль которой соотвѣтствовалъ бы этому среднему уровню, или же сдѣлать прочный знакъ, напримѣръ черту, на средней высотѣ воды. Такой знакъ называется *нулемъ футштока* и служитъ началомъ счета высотъ всѣхъ прочихъ точекъ земной поверхности. Высоты точекъ въ Россіи считаются отъ нуля Кронштадтскаго футштока, представляющаго черту, вырѣзанную на мѣдной доскѣ, вдѣланной въ гранитный устой моста, передъ зданіемъ Техническаго училища Морского Вѣдомства, на высотѣ средняго уровня воды въ Финскомъ заливѣ. Кромѣ Кронштадта, у насъ установлены футштоки въ Ревелѣ, Усть-Двинскѣ, Виндавѣ и Либавѣ на Балтійскомъ морѣ и въ Одессѣ, Очаковѣ, Севастополѣ, Геническѣ, Маріуполѣ и Таганрогѣ на моряхъ Черномъ и Азовскомъ.

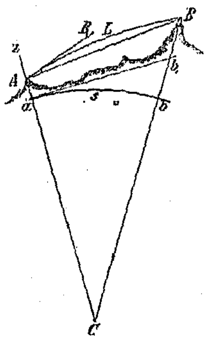
Лимниграфами для рѣкъ и озеръ и *мареграфами* для морей и океановъ называются самопишущіе приборы, состоящіе изъ поплавка, соединеннаго съ указателемъ, вычерчивающимъ кривыя на ежедневно или еженедѣльно мѣняющихся листахъ бумаги, по которымъ можно затѣмъ вычислить высоту уровня воды въ любой моментъ. Средній уровень по записямъ лимниграфовъ и мареграфовъ получается точнѣе, чѣмъ по отдѣльнымъ отсчетамъ футштоковъ, но по сложности устройства этихъ приборовъ они установлены лишь въ немногихъ береговыхъ городахъ Западной Европы: въ Амстердамѣ, Килѣ, Марсели и друг. Цѣль ихъ установки заключается не столько въ опредѣленіи средняго уровня воды, сколько въ изученіи перемѣнъ уровня и особенно въ изученіи приливовъ и отливовъ. Въ Россіи нынѣ дѣйствуютъ лимниграфъ въ Усть-Двинскѣ и мареграфъ въ Ганге въ Финляндіи.

Изъ новѣйшихъ нивелировокъ, связавшихъ многія точки, въ которыхъ установлены футштоки и самопишущіе приборы, оказывается, что средніе уровни морей не совсѣмъ одинаковы; однако разницы не превосходятъ нѣсколькихъ дюймовъ. Были предложенія приводить всѣ высоты къ одному международному знаку, но до сихъ поръ таковой еще не избранъ; да это едва-ли принесло бы и пользу, потому что землетрясенія и поднятія земной коры могли бы со временемъ измѣнить положеніе такого знака. Выгоднѣе имѣть нѣсколько знаковъ во многихъ береговыхъ точкахъ, связанныхъ точными нивелировками: измѣненіе положенія одного какого нибудь футштока было бы не только безопасно въ смыслѣ невозможности потерять начало счета, но могло бы служить къ научнымъ изысканіямъ о колебаніяхъ земной коры.

146. Тригонометрическое нивелированіе. Геодезическими работами опредѣляются лишь разности высотъ точекъ довольно близкихъ и взаимно видимыхъ. Если разности высотъ многихъ смежныхъ точекъ въ странѣ опредѣлены, то, принявъ любую изъ нихъ за начальную, простою алгебраическою суммировкою не трудно вывести ихъ относительныя высоты, а когда опредѣлится абсолютная высота начальной точки, то легко перевести всѣ эти относительныя высоты въ абсолютныя: нужно лишь ко всѣмъ относительнымъ высотамъ придать абсолютную высоту начальной точки; за начальную точку выбирается нуль какого нибудь футштока.

Существуетъ нѣсколько способовъ для опредѣленія разности высотъ точекъ земной поверхности; на тріангуляціяхъ примѣняется одинъ изъ простѣйшихъ, основанный на измѣреніи зенитныхъ разстояній и называемый *тригонометрическимъ нивелированіемъ*; кромѣ зенитныхъ разстояній тутъ требуется еще знать горизонтальное разстояніе между наблюдаемою точкою и точкою наблюденія, которое для точекъ тріангуляцій, конечно, всегда извѣстно. Такимъ образомъ тригонометрическимъ нивелированіемъ называется опредѣленіе разности высотъ точекъ земной поверхности изъ наблюденныхъ зенитныхъ разстояній и извѣстныхъ изъ тріангуляціи горизонтальныхъ разстояній между точками. Такъ называемое *геометрическое нивелированіе*, излагаемое въ топографіи, можно разсматривать, какъ частный случай тригонометрическаго, именно, при визированіи на рейки подъ постояннымъ зенитнымъ разстояніемъ въ 90°. Въ настоящее время это самый точный способъ, но примѣненіе его возможно, когда разстоянія между точками такъ незначительны, что рейка, поставленная на одной, можетъ быть видима съ другой по горизонтальному направленію; въ противномъ случаѣ надо избирать въ промежуткѣ множество вспомогательныхъ точекъ. Тригонометрическое же нивелированіе примѣнимо непосредственно на весьма значительныхъ разстояніяхъ между всѣми взаимно видимыми точками тріангуляціи; оно представляетъ единственное средство для опредѣленія высотъ вершинъ недоступныхъ горъ.

Земная атмосфера въ разныхъ мѣстахъ имѣетъ разную плотность и потому разную преломляемость, такъ что лучъ свѣта отъ одной точки къ другой идетъ не по прямой, а по кривой линіи, обращенной обыкновенно къ поверхности Земли своею вогнутостью, какъ показано на чертежѣ 199, на которомъ AB— прямая, соединяющая точки A и B, а ALB — путь луча свѣта между тѣми же точками при правильномъ распредѣленіи плотностей атмосферы, т. е. такомъ, когда онѣ съ увеличеніемъ высоты непрерывно убываютъ. Искривленіе луча происходитъ въ вертикальной плоскости и потому не оказываетъ вліянія на горизонтальные углы между вертикальными плоскостями; оно значительно измѣняетъ только зенитное



Черт. 199.

разстояніе. Наблюдатель въ A видитъ точку B не по направленію хорды AB, а по направленію касательной AB_1 къ послѣднему элементу кривой AB. Уголъ $ZAB = \zeta$ называется *истиннымъ*, а уголъ $ZAB_1 = z$ — *видимымъ зенитнымъ разстояніемъ*. При нормальномъ распредѣленіи плотностей въ атмосферѣ видимое зенитное разстояніе всегда меньше истиннаго. Разность между истиннымъ и видимымъ зенитными разстояніями, т. е. уголъ B_1AB, принято (хотя весьма неудачно) называть *угломъ земного преломленія* или просто *земнымъ преломленіемъ*, въ отличіе отъ *преломленія астрономическаго*, имѣющаго ту же причину, но подъ которымъ разумѣютъ разность между истиннымъ и видимымъ зенитными разстояніями небесныхъ свѣтилъ, т. е. когда лучъ свѣта проходитъ не черезъ нѣкоторую часть, а черезъ всю толщу земной атмосферы.

Многочисленныя наблюденія и теоретическія изысканія убѣждаютъ, что величина земного преломленія не поддается точному опредѣленію и зависитъ не только отъ разстоянія между точками, но также отъ ихъ абсолютныхъ высотъ, вида и свойствъ мѣстности между ними, температуры и давленія воздуха, высоты луча зрѣнія надъ почвою и др. причинъ. Если бы уголъ земного преломленія могъ быть точно вычисленъ, то результаты тригонометрическаго нивелированія не уступали бы результатамъ измѣренія горизонтальныхъ угловъ на тріангуляціяхъ; на самомъ же дѣлѣ перемѣны земного преломленія вводятъ въ вычисленіе высотъ по зенитнымъ разстояніямъ нѣкоторую неопредѣленность. Вотъ почему высоты точекъ тріангуляціи получаются всегда съ меньшею точностью, чѣмъ горизонтальныя разстоянія, и самыя зенитныя разстоянія измѣряются меньшимъ числомъ пріемовъ, чѣмъ горизонтальные углы (см. § 104).

Для простоты вычисленій принимаютъ обыкновенно, что лучъ свѣта, идущій съ одной тригонометрической точки на другую, представляетъ дугу круга; въ такомъ предположеніи земное преломленіе, какъ уголъ между касательною и хордою, очевидно пропорціонально длинѣ дуги AB (уголъ между касательною и хордою измѣряется половиною дуги, стягиваемой хордою), а такъ какъ эта дуга почти равна горизонтальному разстоянію между точками A и B, т. е. разстоянію ab по уровенной поверхности, то земное преломленіе пропорціонально длинѣ дуги ab. Съ другой стороны дуга ab пропорціональна углу между касательною ab_1 къ уровенной поверхности и хордою ab, который равенъ половинѣ угла C между отвѣсными линіями AC и BC; слѣдовательно, и самое преломленіе r пропорціонально углу $\frac{C}{2}$, такъ что уголъ преломленія можно выразить слѣдующею простою формулою

$$r = k \,.\, \frac{C}{2} \qquad (129)$$

въ которой k называется *коэффиціентомъ земного преломленія*

Ниже, въ § 149 объяснено, какъ выводится коэффиціентъ земного преломленія изъ наблюденій, пока же замѣтимъ, что средняя его величина близка къ 0.16; но въ виду его значительныхъ колебаній стараются дѣлать наблюденія такъ, чтобы вовсе исключить величину преломленія изъ вычисленій. Послѣднее возможно въ томъ только случаѣ, если наблюденія зенитныхъ разстояній произведены на обѣихъ точкахъ A и B. Въ предположеніи, что лучъ свѣта представляетъ дугу круга, углы преломленія въ A и въ B очевидно равны. Конечно, такое предположеніе невѣроятно; оно требуетъ равенства угловъ преломленія въ двухъ точкахъ, въ которыхъ плотности воздуха, вообще говоря, неодинаковы (точки A и B предполагаются не на одной высотѣ); но при малой разности высотъ точекъ такое предположеніе, какъ показываютъ результаты сравненій высотъ, полученныхъ тригонометрическимъ нивелированіемъ и болѣе точнымъ нивелированіемъ геометрическимъ, должно быть довольно близко къ истинѣ.

147. Формулы тригонометрическаго нивелированія. Пусть A и B (черт. 199) представляютъ двѣ точки земной поверхности, лежащія на высотахъ h и h_1 надъ среднимъ уровнемъ океана ab, на небольшомъ, сравнительно съ размѣрами Земли, разстояніи s. Продолжимъ отвѣсныя линіи Aa и Bb до взаимнаго пересѣченія въ C. Эти линіи, вслѣдствіе сфероидическаго вида Земли, вообще не пересѣкутся, но, по малости какъ сжатія земного сфероида, такъ и разстоянія между точками A и B, кратчайшее разстояніе между ними такъ ничтожно по сравненію съ отрѣзками aC и bC, что въ разсматриваемомъ вопросѣ можно считать ихъ пересѣкающимися, а самые отрѣзки aC и bC одинаковыми и равными радіусу кривизны R вертикальнаго сѣченія, заключающаго точки A и B. Соединивъ эти точки прямою AB и означивъ буквами A, B и C углы треугольника ABC, получимъ:

$$\frac{BC-AC}{BC+AC}=tg\,\frac{A-B}{2}\,.\,cotg\,\frac{A+B}{2}$$

или, подставляя $BC=R+h_1$, $AC=R+h$ и $A+B=180°-C$:

$$\frac{h_1-h}{2R+(h_1+h)}=tg\,\frac{A-B}{2}\,.\,tg\,\frac{C}{2}$$

или

$$h_1 - h = tg\,\frac{C}{2}\,.\,tg\,\frac{A-B}{2}\,.\,2R\left(1 + \frac{h_1 + h}{2R}\right)$$

По малости угла C можно положить (выражая C въ частяхъ радіуса):

$$tg\,\frac{C}{2} = \frac{C}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{C^3}{8}$$

и замѣняя C черезъ $\frac{s}{R}$, получимъ:

$$h_1 - h = \left(\frac{s}{2R} + \frac{s^3}{24R^3}\right).\,tg\,\frac{A-B}{2}\,.\,2R\left(1 + \frac{h_1 + h}{2R}\right)$$

Откуда, ограничиваясь малыми членами третьяго порядка:

$$h_1 - h = s\,.\,tg\,\frac{A-B}{2}\left(1 + \frac{h_1 + h}{2R} + \frac{s^2}{12R^2}\right) \qquad (a)$$

Не трудно видѣть, что поправочные члены въ скобкахъ весьма незначительны; напримѣръ, при $h_1 + h = 1$, а $s = 100$ верстамъ, и принимая приближенно $R = 6\,000$ верстъ, выходитъ:

$$\frac{h_1 + h}{2R} = \frac{1}{12\,000} \qquad \text{и} \qquad \frac{s^2}{12R^2} = \frac{1}{43\,200}$$

такъ что, если отбросить эти поправочные члены, то искомая разность высотъ $h_1 - h$ получится съ погрѣшностью, не превосходящею 0.0001 самой величины. Такъ какъ перемѣны земного преломленія не позволяютъ вычислять высоты изъ тригонометрическаго нивелированія съ большою точностью, то почти всегда можно пренебрегать упомянутыми членами и формулу (a) замѣнить болѣе простою:

$$h_1 - h = s\,.\,tg\,\frac{A-B}{2} \qquad (b)$$

Остается выразить углы A и B въ величинахъ, получаемыхъ изъ наблюденій. Здѣсь представляются два случая: 1) когда наблюдалось только одно зенитное разстояніе въ A или въ B (*одностороннее наблюденіе*) и 2) когда наблюдались два зенитныхъ разстоянія въ A и въ B (*взаимныя наблюденія*).

1-ый случай. Если измѣрено зенитное разстояніе z точки B изъ A, то, называя уголъ земного преломленія въ A черезъ r, а уголъ между отвѣсными линіями AC и BC по прежнему черезъ C, получимъ:

$$\angle A = 180^\circ - z - r \qquad \angle B = z + r - C$$

$$\frac{A-B}{2} = 90^\circ - \left\{z - \left(\frac{C}{2} - r\right)\right\}$$

а такъ какъ по формулѣ (129) $r = k \cdot \frac{C}{2}$ и, кромѣ того, въ дугѣ, $C = \frac{s}{R}$, то

$$\frac{C}{2} - r = \frac{1-k}{2} \cdot C = \frac{1-k}{2R} \cdot s$$

и

$$tg\,\frac{A-B}{2} = cotg\left(z - \frac{1-k}{2R} \cdot s\right)$$

Если уголъ N близокъ къ 90°, а n къ нулю, то вообще:

$$cotg\,(N - n) = cotg\,N + n \tag{c}$$

Такъ какъ въ данномъ случаѣ z всегда близко къ 90°, а $\frac{1-k}{2R} \cdot s$ величина очень малая, то подобно этому будетъ:

$$tg\,\frac{A-B}{2} = cotg\,z + \frac{1-k}{2R} \cdot s$$

Подставляя это въ уравненіе (b), получимъ слѣдующую общую формулу для вычисленія разности высотъ по *одностороннему зенитному разстоянію*:

$$h_1 - h = s \cdot cotg\,z + s^2 \cdot \frac{1-k}{2R} \tag{130}$$

2-ой случай. Если измѣрены зенитныя разстоянія z точки B изъ A и z_1 точки A изъ B, то, называя углы земного преломленія въ A и B черезъ r и r_1, т. е. считая пока, что они въ обѣихъ точкахъ не одинаковы, получимъ:

$$\angle A = 180^\circ - z - r \qquad \angle B = 180^\circ - z_1 - r_1$$

$$\frac{A-B}{2} = \frac{z_1 - z}{2} + \frac{r_1 - r}{2}$$

Полагая опять по формулѣ (129) $r = k \cdot \frac{C}{2}$, $r_1 = k_1 \cdot \frac{C}{2}$ и кромѣ того $C = \frac{s}{R}$, имѣемъ:

$$tg\,\frac{A-B}{2} = tg\left\{\frac{z_1 - z}{2} + \frac{(k_1 - k)\,s}{4R}\right\}$$

Если углы n и n_1 малы, и n_1 малъ по сравненію съ n, то вообще:

$$tg\,(n + n_1) = tg\,n + n_1 \qquad (d)$$

Такъ какъ въ данномъ случаѣ $\frac{z_1 - z}{2}$ и $\frac{(k_1 - k)\,s}{4R}$ малые углы, и второй малъ по сравненію съ первымъ, то подобно этому будетъ:

$$tg\,\frac{A-B}{2} = tg\,\frac{z_1 - z}{2} + \frac{(k_1 - k)\,s}{4R}$$

Подставляя это въ уравненіе (b), получимъ:

$$h_1 - h = s\,.\,tg\,\frac{z_1 - z}{2} + s^2\,\frac{k_1 - k}{4R} \qquad (131)$$

Допуская же гипотезу равенства угловъ преломленія, а, слѣдовательно, и коэффиціентовъ преломленія въ точкахъ A и B (т. е. полагая $k_1 = k$), получимъ съ достаточнымъ для практики приближеніемъ слѣдующую общую формулу для вычисленія разности высотъ по *взаимнымъ зенитнымъ разстояніямъ:*

$$h_1 - h = s\,.\,tg\,\frac{z_1 - z}{2} \qquad (132)$$

При выводѣ всѣхъ предъидущихъ формулъ предполагалось, что точки A и B представляютъ и точки, съ которыхъ производились наблюденія, и точки, которыя служили предметами наблюденій. Въ дѣйствительности точки, съ которыхъ наблюдаютъ, суть пересѣченія горизонтальныхъ и оптическихъ осей угломѣрныхъ инструментовъ, а точки, на которыя наблюдаютъ,— вершины или вообще нѣкоторыя опредѣленныя мѣста тригонометрическихъ знаковъ или мѣстныхъ предметовъ (см. § 112). Называя элементы приведеній, т. е. высоты инструментовъ въ A и B черезъ i и i_1, а высоты знаковъ соотвѣтственно черезъ a и a_1, для зенитнаго разстоянія z получимъ поправку $\frac{a_1 - i}{s}$, а для z_1 поправку $\frac{a - i_1}{s}$, такъ что вмѣсто z и z_1 въ предъидущія формулы надо подставить:

$$z + \frac{a_1 - i}{s} \qquad \text{и} \qquad z_1 + \frac{a - i_1}{s}$$

Но, согласно формуламъ (c) и (d):

$$cotg\left(z + \frac{a_1 - i}{s}\right) = cotg\, z - \frac{a_1 - i}{s}$$

$$tg\left\{\frac{z_1 - z}{2} + \frac{(a - i_1) - (a_1 - i)}{2s}\right\} = tg\,\frac{z_1 - z}{2} + \frac{(a - i_1) - (a_1 - i)}{2s}.$$

Подставивъ это въ формулы (130) и (132), получимъ слѣдующія, примѣнимыя уже ко всѣмъ практическимъ вычисленіямъ:

Для одностороннихъ наблюденій:

$$h_1 - h = s \,.\, cotg\, z + s^2 \,.\, \frac{1 - k}{2R} - (a_1 - i) \tag{133}$$

Для взаимныхъ наблюденій:

$$h_1 - h = s \,.\, tg\,\frac{z_1 - z}{2} - \frac{a_1 + i_1}{2} + \frac{a + i}{2} \tag{134}$$

гдѣ $h_1 - h$ — искомая разность высотъ центровъ точекъ наблюденія, имѣющихъ абсолютныя высоты h_1 и h, s — горизонтальное разстояніе между этими точками, z_1 и z — наблюденныя зенитныя разстоянія, k — коэффиціентъ земного преломленія, a_1 и a — высоты наблюдаемыхъ точекъ надъ почвою (центрами), i_1 и i — таковыя же высоты инструментовъ и R — радіусъ кривизны уравенной поверхности въ вертикальномъ сѣченіи точекъ A и B. Этотъ радіусъ можно брать изъ геодезическихъ таблицъ для широты, средней изъ широтъ точекъ A и B. Въ данномъ случаѣ *) величину R не надо знать очень

---

*) Если для какой нибудь спеціальной цѣли, при весьма значительномъ разстояніи s или при большихъ абсолютныхъ высотахъ h_1 и h, потребовались бы болѣе точные выводы, то R слѣдуетъ вычислять по формуламъ (11), (12) или (14) и въ полученные по формуламъ (133) и (134) результаты вводить еще множитель формулы (a): $\left(1 + \frac{h_1 + h}{2R} + \frac{s^2}{12R^2}\right)$

точно и потому среднюю широту можно опредѣлить по картѣ, а самый R вычислить по простѣйшей формулѣ (15).

Разности высотъ на тріангуляціяхъ рѣдко превосходятъ десятки саженей, поэтому съ точностью до 0.01 саж. ихъ можно вычислять пятизначными логариѳмами. Для перваклассныхъ и второклассныхъ точекъ тріангуляціи, на которыхъ наблюденія произведены туда и назадъ (взаимныя), берутъ формулу (134), для уединенныхъ же точекъ—формулу (133). Необходимо однако посовѣтовать и для вычисленія высотъ точекъ 1-го и 2-го классовъ пользоваться формулою (133): среднее изъ двухъ результатовъ даетъ совершенно то же, что и вычисленіе по формулѣ (134), но здѣсь получается повѣрка, и, въ случаѣ значительнаго разногласія, можно, послѣ вычисленія разностей высотъ точекъ замкнутаго полигона (треугольника или вообще сомкнутой фигуры), выбросить неудачное наблюденіе или исправить промахъ (напримѣръ, измѣнить наблюденное z на 1°).

Числовые примѣры: 1) На сигналѣ Захожье наблюдено зенитное разстояніе пирамиды Размителево и получено въ среднемъ $z = 89°58'50''.9$. Высота инструмента въ Захожьи $i = 4^c.99$; высота пирамиды Размителево $a_1 = 4^c.73$; lg разстоянія s въ саженяхъ $= 3.99272$ (§ 132, стр. 487). Вычислить превышеніе Размителева надъ Захожьемъ.

По формулѣ (133) съ коэффиціентомъ преломленія $k = 0.16$ и съ $lg\,R = 6.4762\overline{3}$ (изъ геодез. таблицъ) имѣемъ:

Сажени:

$$lg\,s = 3.99272 \qquad\qquad s\,.\,cotg\,z = +\ 3.294$$

$$lg\,cotg\,z = 6.52505 \qquad\qquad s^2\,.\,\frac{1-k}{2R} = +\ 13.566$$

$$lg\,s\,.\,cotg\,z = 0.51777 \qquad\qquad -(a_1 - i) = +\ 0.26$$

$$h_1 - h = +\ 17.12$$

$$lg\,s^2 = 7.98544$$

$$lg\,\frac{1-k}{2} = 9.62325$$

$$\partial\,lg\,R = 3.52377$$

$$lg\,s^2\,.\,\frac{1-k}{2R} = 1.13246$$

2) На пирамидѣ Размителево наблюдено зенитное разстояніе сигнала Захожье и получено въ среднемъ $z = 90°8'3''.2$. Высота инструмента въ Размителевѣ i=0^c.63; высота сигнала Захожье $a_1 = 8^c.66$; $lg\, s = 3.99272$, $k = 0.16$ и $lg\, R = 6.47623$. Вычислить превышеніе Захожья надъ Размителевымъ.

Сажени:

$$lg\, s = 3.992\,72 \qquad s\,.\,cotg\, z = -\ 23.037$$

$$lg\, cotg\, z = {}_n7.369\,71 \qquad s^2\,.\,\frac{1-k}{2R} = +\ 13.566$$

$$lg\, s\,.\,cotg\, z = {}_n1.362\,43 \qquad -(a_1 - i) = -\ 8.03$$

Вычисленіе $s^2\,.\,\frac{1-k}{2R}$ см. выше. $\qquad h_1 - h = -\ 17.50$

3) На точкахъ Захожье и Размителево произведены наблюденія взаимныхъ зенитныхъ разстояній и получено:

Захожье:	*Размителево:*
$z = 89°58'50''.9$	$z_1 = 90°8'3''.2$
$i = 4.99$ саж.	$i_1 = 0.63$ саж.
$a = 8.66$ »	$a_1 = 4.73$ »

по формулѣ (134):

Сажени:

$$lg\, s = 3.992\,72 \qquad s\,.\,tg\,\frac{z_1 - z}{2} = +\ 13.166$$

$$lg\, tg\,\frac{z_1 - z}{2} = 7.126\,73 \qquad -\frac{a_1 + i_1}{2} = -\ 2.68$$

$$lg\,.\,s\, tg\,\frac{z_1 - z}{2} = 1.119\,45 \qquad \frac{a + i}{2} = +\ 6.825$$

$$h_1 - h = +\ 17.31$$

Изъ этихъ примѣровъ легко усмотрѣть, что вычисленія односторонних наблюденій туда и назадъ дали результаты, расходящіеся на 0^c.4, но въ среднемъ они даютъ 17.32, т. е. то же, что получено вычисленіемъ взаимныхъ наблюденій. Разногласіе результатовъ одностороннихъ наблюденій произошло только отъ произвольно принятаго коэффиціента земного преломленія.

4) Чтобы дать понятіе о ничтожности поправочнаго множи-

теля (см. выноску стр. 568), приведемъ вычисленіе высоты горы Казбека. По наблюденіямъ членовъ Каспійской экспедиціи (см. выноску стр. 248) съ точки № 80 (абсолютная высота которой $h = 104.10$ саж.) получено:

$$z = 88°15'46''.6$$

Средняя широта точки № 80 и Казбека $\varphi = 43°16'$, средній азимутъ направленія точки № 80—Казбекъ $\alpha = 160°50'$; отсюда по формулѣ (12):

$$lg\,R \text{ (въ саженяхъ)} = 6.474\,882$$

Разстояніе разсматриваемыхъ точекъ равно 58 496.9 саж., слѣдовательно:

$$lg\,s = 4.767\,133$$

Вставивъ эти числа въ формулу (133) и принимая въ ней $k = 0.16$, $a_1 = 0$ и $i = 0.67$ саж. (высота инструмента па точкѣ № 80), получаемъ:

$$h_1 - h = 1774.01 + 481.54 + 0.67 = 2256.22 \text{ саж.}$$

и

$$h_1 = 2360.32 \text{ саж.}$$

Поправочный множитель выходитъ:

$$1 + \frac{h_1 + h}{2R} + \frac{s^2}{12R^2} = 1 + 0.000\,413 + 0.000\,032 = 1.000\,445$$

и слѣдовательно:

$$h_1 - h = 2256.22 + 1.00 = 2257.22$$

Окончательная же высота вершины Казбека:

$$h_1 = 2361.3 \text{ саж.}$$

По новѣйшимъ опредѣленіямъ высота этой горы считается 16 546 футовъ $= 2\,363.7$ саж.

148. Точность вычисленія высотъ. Ошибки разностей высотъ, вычисленныхъ по формуламъ (130)—(134), зависятъ отъ ошибокъ, которыя можно ожидать въ величинахъ, входящихъ въ эти формулы. Разстояніе s и радіусъ R, равно какъ величины i и a можно въ данномъ случаѣ считать безошибочными, полагая же въ величинахъ z и k ошибки Δz и Δk и обозначая ошибку въ разности $h_1 - h$ черезъ Δh, легко получить:

Изъ формулы (130)

$$\Delta h = -s \cdot \frac{\Delta z}{\varkappa} - \frac{s^2}{2R} \cdot \Delta k$$

Изъ формулы (131)

$$\Delta h = s \cdot \frac{\Delta z_1 - \Delta z}{2\varkappa} + s^2 \cdot \frac{\Delta k_1 - \Delta k}{4R}$$

Вслѣдствіе неизвѣстности знаковъ у Δz и Δk, возвысимъ эти уравненія въ квадратъ; тогда, отбрасывая удвоенныя произведенія, по общей теоріи ошибокъ, и полагая $\Delta z_1 = \Delta z$ и $\Delta k_1 = \Delta k$, послѣ извлеченія квадратныхъ корней получимъ:

Ошибка разности высотъ по одностороннимъ наблюденіямъ:

$$\Delta h_1 = \pm s \sqrt{\left(\frac{\Delta z}{\varkappa}\right)^2 + \left(\frac{s \cdot \Delta k}{2R}\right)^2} \qquad \textbf{(135)}$$

Ошибка разности высотъ по взаимнымъ наблюденіямъ:

$$\Delta h_2 = \pm \frac{s}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\Delta z}{\varkappa}\right)^2 + \left(\frac{s \cdot \Delta k}{2R}\right)^2} \qquad \textbf{(136)}$$

Изъ разсмотрѣнія этихъ выраженій легко замѣтить, что при малыхъ разстояніяхъ главнымъ источникомъ погрѣшности въ разности высотъ является членъ съ Δz, происходящій отъ ошибокъ измѣренія зенитныхъ разстояній; при большихъ же разстояніяхъ, наоборотъ, членъ съ Δk, происходящій отъ ошибокъ коэффиціента земного преломленія. Такимъ образомъ при малыхъ горизонтальныхъ разстояніяхъ ошибка разности высотъ почти пропорціональна разстоянію, при большихъ—пропорціональна квадрату разстоянія. Вотъ почему при большихъ разстояніяхъ опредѣленіе высотъ по измѣреннымъ зенитнымъ разстояніямъ очень ненадежно.

Для самыхъ точныхъ наблюденій, произведенныхъ при наиболѣе благопріятныхъ обстоятельствахъ, можно положить $\Delta z = \pm 1''$ и $\Delta k = \pm 0.03$, тогда получится:

s	1 верста.	10 верстъ.	100 верстъ.
	саж.	саж.	саж.
Δh_1	$\pm$ 0.003	$\pm$ 0.128	$\pm$ 12.6
Δh_2	$\pm$ 0.002	$\pm$ 0.090	$\pm$ 8.9

Для вывода ошибки разности высотъ при взаимныхъ зенитныхъ разстояніяхъ была взята формула (131); когда имѣютъ наблюденія не только взаимныя, но и одновременныя, то можно положить $k_1 = k$, т. е. разсматривать формулу (132). Въ такомъ случаѣ ошибка разности высотъ выразится такъ:

$$\Delta h_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s \cdot \frac{\Delta z''}{\varkappa} \tag{137}$$

и для разстояній въ 1, 10 и 100 верстъ будетъ въ саженяхъ:

$$\Delta h_3 = \pm 0.002 \qquad \pm 0.017 \qquad \pm 0.171$$

На тріангуляціяхъ взаимныя наблюденія производятся не строго одновременныя, и не въ одни часы дня, и потому формула (137) не можетъ служить для оцѣнки точности разности высотъ тригонометрическаго нивелированія.

Сравнивая формулы (135), (136) и (137), не трудно усмотрѣть, что опредѣленіе высотъ по взаимнымъ зенитнымъ разстояніямъ всегда точнѣе, чѣмъ по одиночнымъ, и ошибка особенно мала, когда произведены не только взаимныя, но и одновременныя наблюденія.

Необходимо замѣтить, что есть еще способъ измѣренія зенитныхъ разстояній, отличающійся особенною точностью, именно измѣренія изъ середины. Если предположить, что наблюдатель установилъ инструментъ гдѣ нибудь между точками A и B, то, называя измѣренныя на нихъ зенитныя разстоянія черезъ z и z_1, абсолютныя высоты A, B и точки стоянія черезъ h, h_1 и h_0, а горизонтальныя разстоянія отъ точки стоянія до A и до B

черезъ s и s_1, по формулѣ (130) получимъ:

$$h - h_0 = s \, . \, cotg \, z + s^2 \, . \, \frac{1-k}{2R}$$

$$h_1 - h_0 = s_1 . \, cotg \, z_1 + s_1^{\,2} . \, \frac{1-k}{2R}$$

откуда:

$$h_1 - h = s_1 \, . \, cotg \, z_1 - s \, . \, cotg \, z + s_1^{\,2} \, . \, \frac{1-k_1}{2R} - s^2 \, . \, \frac{1-k}{2R}$$

Находясь въ одной точкѣ, весьма легко расположить наблюденія такъ, чтобы среднія времена изъ всѣхъ наведеній на заднюю и на переднюю точки были приблизительно одинаковы; слѣдовательно, здѣсь съ бóльшимъ правомъ, чѣмъ для взаимныхъ наблюденій на двухъ точкахъ, можно положить $k_1 = k$; если же притомъ еще $s_1 = s$, т. е. инструментъ былъ расположенъ точно по серединѣ между наблюдаемыми точками, то квадратные члены пропадутъ, и предъидущая формула обратится въ слѣдующую:

$$h_1 - h = s \, (cotg \, z_1 - cotg \, z)$$

Измѣреніе зенитныхъ разстояній изъ середины выгодно во первыхъ потому, что здѣсь коэффиціентъ земного преломленія дѣйствительно можно считать одинаковымъ при наблюденіяхъ на обѣ конечныя точки, а во вторыхъ горизонтальныя разстоянія оказываются тутъ вдвое меньшими. Однако этотъ способъ весьма рѣдко примѣняется на тріангуляціяхъ, такъ какъ онъ требуетъ новой точки стоянія; онъ получилъ зато обширное и почти исключительное примѣненіе въ такъ называемыхъ точныхъ геометрическихъ нивелировкахъ.

149. Земное преломленіе. Для вычисленія разности высотъ по одностороннимъ зенитнымъ разстояніямъ необходимо знать коэффиціентъ земного преломленія; послѣдній можно опредѣлить двумя способами: 1) при помощи вычисленія истиннаго зенитнаго разстоянія и сравненія его съ видимымъ и 2) изъ взаимныхъ видимыхъ зенитныхъ разстояній.

1-ый способъ. Пусть абсолютныя высоты h и h_1 двухъ точекъ A и B извѣстны по точнымъ нивелировкамъ, а разстояніе s между ними—изъ тріангуляціи. Треугольникъ ABC (чертежъ 199) даетъ:

$$\frac{\zeta_1 + \zeta}{2} = 90^\circ + \frac{\varkappa \cdot s}{2R} \tag{a}$$

а изъ формулы (a) § 147, замѣняя въ ней $\frac{A-B}{2}$ черезъ $\frac{\zeta_1 - \zeta}{2}$, имѣемъ:

$$tg\,\frac{\zeta_1 - \zeta}{2} = \frac{h_1 - h}{s}\left(1 - \frac{h_1 + h}{2R} - \frac{s^2}{12R^2}\right) \tag{b}$$

Коэффиціенты земного преломленія по формулѣ (129) суть:

$$k = \frac{2r}{C} \qquad \text{и} \qquad k_1 = \frac{2r_1}{C}$$

Такъ какъ $r = \zeta - z$, $r_1 = \zeta_1 - z_1$ и $C = \varkappa \cdot \frac{s}{R}$, то

$$k = \frac{2R}{\varkappa \cdot s}(\zeta - z) \qquad \text{и} \qquad k_1 = \frac{2R}{\varkappa \cdot s}(\zeta_1 - z_1) \tag{138}$$

Истинныя зенитныя разстоянія ζ и ζ_1 получаются рѣшеніемъ двухъ уравненій (a) и (b), видимыя зенитныя разстоянія z и z_1 суть данныя наблюденій, R и s извѣстны, а $\varkappa = 206\,265$.

Числовой примѣръ. Въ точкахъ A и B съ абсолютными высотами 26.7 и 549.8 саж. и лежащихъ на разстояніи 11 371 саж. ($lg\, s = 4.055\,80$), получены изъ непосредственныхъ измѣреній видимыя зенитныя разстоянія:

$$z = 87^\circ 27' 6''.9 \qquad \text{и} \qquad z_1 = 92^\circ 43' 39''.7$$

По формуламъ (a) и (b) и зная, что $lg\, R = 6.475\,41$, получаемъ соотвѣтствующія истинныя зенитныя разстоянія:

$$\zeta = 87^\circ 28' 31''.3 \qquad \zeta_1 = 92^\circ 44' 33''.6$$

и далѣе, по формуламъ (138):

$$k = 0.215 \qquad k_1 = 0.137$$

Здѣсь k получилось больше k_1, что и слѣдовало ожидать, потому что точка A лежитъ ниже, и, слѣдовательно, въ ней какъ плотность воздуха, такъ и коэффиціентъ земного преломленія должны быть больше.

Этимъ способомъ коэффиціентъ преломленія опредѣляли *В. Струве*—въ Лифляндіи въ 1829 году, *Оссаръ* въ Ангулемѣ въ 1844, *Бауернфейндъ* въ Баваріи въ 1877—80, *Давидсонъ* въ Калифорніи въ 1880 году и др.

2-ой способъ. Пусть истинныя высоты точекъ A и B неизвѣстны, но въ нихъ измѣрены взаимныя и одновременныя зенитныя разстоянія. Въ этомъ случаѣ невозможно вычислить коэффиціенты преломленія отдѣльно для обѣихъ точекъ наблюденія, но допуская, что они равны, изъ треугольника ABC (черт. 199) получаемъ:

$$\angle A = 180^\circ - (z + r)$$
$$\angle B = 180^\circ - (z_1 + r)$$

откуда:

$$r = 180^\circ - \frac{A+B}{2} - \frac{z+z_1}{2}$$

Замѣчая, что

$$A + B = 180^\circ - C, \quad r = k\,.\,\frac{C}{2} \quad \text{и} \quad C = \varkappa\,.\,\frac{s}{R}$$

и вводя приведенія наблюденныхъ зенитныхъ разстояній, т. е. замѣняя z и z_1 черезъ (см. стр. 568)

$$z + \varkappa\,.\,\frac{a_1 - i}{s} \qquad \text{и} \qquad z_1 + \varkappa\,.\,\frac{a - i_1}{s}$$

получимъ:

$$k = 1 - \frac{R}{\varkappa\,.\,s}(z_1 + z - 180^\circ) - \frac{R}{s^2}(a_1 - i_1 + a - i) \qquad \textbf{(139)}$$

Числовой примѣръ. Въ Захожьи и Размителевѣ наблюдены взаимныя зенитныя разстоянія и получено (см. стр. 570):

Захожье.	*Размителево.*
$z = 89^\circ 58' 50''.9$	$z_1 = 90^\circ 8' 3''.2$
$i = 4.99$ саж.	$i_1 = 0.63$ саж.
$a = 8.66$	$a_1 = 4.73$

Здѣсь $\quad lg\, s = 3.9927, \quad lg\, R = 6.4762$

$$z_1 + z - 180^\circ = 414''.1 \qquad a_1 - i_1 + a - i = 7.77 \text{ саж.}$$

поэтому, по формулѣ (139), получаемъ:

$$k = 1 - 0.611 - 0.241 = 0.148$$

Каждая точная тріангуляція доставляетъ обширный матеріалъ для вывода коэффиціента земного преломленія по второму способу. Вотъ результаты наиболѣе тщательныхъ изслѣдованій:

Имена изслѣдователей.	Названія тріангуляціи.	Коэффиціенты земного преломленія.		
		Наибольшій.	Наименьшій.	Средній.
Деламбръ . . .	Французская . .	0.595	— 0.007	0.168
Кларкъ	Англійская . . .	0.212	+ 0.064	0.158
Бессель.	Прусская. . . .	0.154	0.126	0.137
Байеръ.	Прусская. . . .	0.388	0.096	0.145
Теннеръ	Западно-русская	0.207	0.079	0.145
Струве	Лифляндская . .	0.144	0.031	0.124
Савичъ.	Кавказская . . .	0.306	0.026	0.176
Лебедевъ. . . .	Оренбургская. .	0.356	0.086	0.174

Наблюденія Деламбра производились преимущественно ночью, наблюденія же Струве—днемъ и притомъ около полудня, вотъ почему средній коэффиціентъ земного преломленія изъ наблюденій французской тріангуляціи получился наибольшій (выводы Савича и Лебедева сдѣланы изъ сравнительно небольшого числа и не очень точныхъ наблюденій), а изъ наблюденій на Лифляндской тріангуляціи—наименьшій. Что касается до столбцовъ съ наибольшими и наименьшими величинами, то приведенныя числа ясно показываютъ, что на выводы коэффиціента земного преломленія надо полагаться съ большою осмотрительностью.

Точность вывода коэффиціента земного преломленія зависитъ отъ погрѣшностей величинъ, входящихъ въ формулы (138) и (139). Такъ какъ величины ζ, R и s, равно какъ и элементы приведеній въ формулѣ (139) можно, въ данномъ случаѣ, считать абсолютно точными, то ошибка въ k зависитъ только отъ погрѣшностей въ наблюденныхъ зенитныхъ разстояніяхъ z. Назовемъ ошибку въ k черезъ Δk, а ошибки въ z черезъ Δz и положимъ, что $\Delta z = \Delta z_1$; по общей теоріи ошибокъ легко получить слѣдующія выраженія для ошибокъ коэффиціента земного преломленія въ случаѣ опредѣленія его по первому и по второму способамъ:

$$\Delta k = \pm \frac{2R}{s} \cdot \frac{\Delta z''}{\varkappa} \tag{140}$$

$$\Delta k = \pm \frac{\sqrt{2}R}{s} \cdot \frac{\Delta z''}{\varkappa} \tag{141}$$

Необходимо замѣтить, что меньшая величина Δk по второй формулѣ отнюдь не указываетъ, что по второму способу коэффиціентъ преломленія получается точнѣе, чѣмъ по первому; формула (139) выведена въ предположеніи, что углы преломленія r и r_1 на обѣихъ точкахъ наблюденія равны, а это конечно невѣроятно, и потому выраженіе (141) даетъ для оцѣнки точности менѣе благонадежные результаты, чѣмъ выраженіе (140). Вообще же видно, что чѣмъ больше разстояніе s, тѣмъ опредѣленіе коэффиціента земного преломленія выходитъ точнѣе; при малыхъ же разстояніяхъ вовсе нельзя сдѣлать сколько нибудь благонадежнаго вывода. Напримѣръ, при $s =$ 1 верстѣ и полагая $\Delta z = \pm 1''$, получаемъ:

$$\Delta k = \pm 0.04$$

а такъ какъ самое k равно въ среднемъ лишь 0.16, то ясно, что опредѣленіе k будетъ очень ненадежно, лишь до четверти его величины. При меньшихъ разстояніяхъ ошибка Δk будетъ еще больше и можетъ даже превзойти самое k (при s меньшихъ 125 саженъ), такъ что для коэффиціента k можетъ получиться совершенно несообразная величина. Въ предположеніи, что $\Delta z \gtrless 1''$, какъ это на самомъ дѣлѣ всегда и бываетъ, несообразныя величины для k будутъ получаться даже при значительно бо́льшихъ разстояніяхъ. На этомъ основаніи принято выводить коэффиціентъ земного преломленія только изъ хорошихъ взаимныхъ наблюденій, произведенныхъ при значительныхъ разстояніяхъ между точками; если $\Delta z = \pm 5''$, что эти разстоянія должны быть *не меньше 5 верстъ*. Что касается высшаго предѣла разстояній, то хотя формулы (140) и (141) показываютъ, что съ увеличеніемъ s ошибка Δk уменьшается, однако выводить величину k изъ наблюденій на весьма значительныхъ разстояніяхъ, по крайней мѣрѣ по формулѣ (141), тоже невыгодно: тогда причиною погрѣшности въ k будетъ уже не ошибка наблюденныхъ зенитныхъ разстояній, а невѣроятность принятой въ ея основаніе гипотезы о равенствѣ угловъ преломленія на обѣихъ точкахъ наблюденія. Обыкновенно наибольшимъ предѣльнымъ разстояніемъ для благонадежнаго опредѣленія коэффиціента преломленія принимаютъ *25 верстъ*, причемъ для хорошихъ наблюденій это предѣльное разстояніе должно быть взято короче (до 20 верстъ), чѣмъ для менѣе точныхъ (до 30 верстъ).

Взаимныя и одновременныя наблюденія производятся въ видѣ исключенія, напримѣръ, при научныхъ изслѣдованіяхъ коэффиціента земного преломленія. Взаимныя, но не одновременныя наблюденія, какъ это бываетъ обыкновенно въ дѣйствительности, тоже могутъ служить для выводовъ коэффиціента преломленія, но такъ какъ въ этомъ случаѣ гипотеза о равенствѣ коэффиціентовъ на обѣихъ точкахъ еще менѣе справедлива, то и выводы имѣютъ всегда еще меньшую точность.

150. Суточный ходъ земного преломленія. Многочисленныя спеціальныя изслѣдованія и выводы изъ наблюденій на большихъ тригонометрическихъ работахъ показали, что, не смотря на видимое разнообразіе, коэффиціентъ земного преломленія слѣдуетъ нѣкоторому общему закону. На разсвѣтѣ преломленіе имѣетъ наибольшую величину, затѣмъ утромъ, часовъ до 8-ми, оно быстро уменьшается, отъ 8 до 10 часовъ уменьшеніе продолжается, но гораздо медленнѣе, а отъ 10 ч. утра до 3 часовъ дня преломленіе почти не мѣняется, проходя черезъ свое наименьшее значеніе, время котораго почти совпадаетъ со временемъ наибольшей температуры. Далѣе преломленіе увеличивается сперва медленно, потомъ быстрѣе и быстрѣе и къ закату Солнца пріобрѣтаетъ опять значительную величину, но меньшую, чѣмъ на разсвѣтѣ; ночью же преломленіе продолжаетъ увеличиваться и наибольшей величины достигаетъ на разсвѣтѣ, около времени наименьшей температуры (см. § 97).

Занимающіеся тригонометрическими работами знаютъ по опыту, что для отысканія весьма отдаленнаго и едва видимаго изъ-за промежуточныхъ предметовъ знака надо пользоваться временами заката и восхода Солнца; тогда, именно вслѣдствіе большой величины земного преломленія, отдаленные предметы настолько приподнимаются, что дѣлаются видимыми и какъ бы висящими въ воздухѣ. Наоборотъ, около времени наименьшаго преломленія предметы понижаются; тогда замѣчается порой и отрицательное преломленіе, сопровождаемое сильными колебаніями изображеній и даже миражами. Такія любопытныя явленія особенно часто наблюдаются въ низменныхъ равнинахъ; въ южной Россіи казаки говорятъ тогда: «степь играетъ».

Величина земного преломленія зависитъ главнымъ образомъ отъ температуры, давленія и влажности атмосферы; чѣмъ температура ниже, а давленіе и влажность больше, тѣмъ больше и преломленіе. Помимо этого, величина преломленія зависитъ отъ характера мѣстности и отъ высоты луча зрѣнія надъ почвою. *Кларкъ* изъ многочисленныхъ наблюденій на англійской тріангуляціи вывелъ, что средній коэффиціентъ преломленія для луча, проходящаго надъ сушею, равенъ 0.15, а для луча, проходящаго надъ моремъ, 0.16. Чѣмъ высота луча зрѣнія надъ почвою больше, тѣмъ коэффиціентъ преломленія меньше. Если лучъ зрѣнія проходитъ очень близко къ почвѣ, особенно если онъ почти касается промежуточныхъ низменностей, то днемъ коэффиціентъ преломленія не поддается точному опредѣленію: онъ мѣняется иногда скачками, переходитъ отъ положительной величины къ отрицательной, и лучъ зрѣнія вообще значительно отклоняется отъ нормальнаго вида; изображенія бываютъ тогда чрезвычайно безпокойными. Наименьшая величина преломленія наблюдается вскорѣ послѣ полудня; лѣтомъ, при облачномъ небѣ, время наименьшей величины преломленія ближе къ полудню, чѣмъ при ясномъ небѣ, зимою же вообще ближе къ полудню, чѣмъ лѣтомъ. Замѣчено, что и колебанія изображеній лѣтомъ больше, чѣмъ зимою. Эти явленія вполнѣ объясняются соотвѣтствующими различіями временъ наибольшей температуры: извѣстно, что въ облачную погоду моментъ наибольшей температуры наступаетъ раньше, чѣмъ въ ясную, и зимою раньше, чѣмъ лѣтомъ.

Изъ сравненія результатовъ разныхъ наблюдателей, изслѣдовавшихъ суточный ходъ земного преломленія въ разныя времена года и въ разныхъ мѣстахъ, оказывается, что наибольшія величины преломленія (на разсвѣтѣ) бываютъ весьма различны; наоборотъ, наименьшія величины (послѣ полудня) бываютъ почти всегда одинаковы. Это согласіе наименьшихъ величинъ преломленія наблюдается какъ бы вопреки значительнымъ разностямъ температуръ и давленія атмосферы въ разные дни. *Струве, Савичъ* и другіе ученые предложили формулы для вычисленія коэффиціента земного преломленія въ зависимости отъ времени дня, температуры и давленія атмосферы, а также превышенія луча зрѣнія надъ почвою; однако подобныя формулы, усложняя вычисленіе, не приносятъ существенной пользы и имѣютъ притомъ лишь мѣстное значеніе, такъ что, приводя въ согласіе наблюденія, сдѣланныя въ одной мѣстности, онѣ не приложимы къ наблюденіямъ, произведеннымъ въ другой. Вообще замѣчено, что наибольшія колебанія въ величинѣ преломленія происходятъ отъ перемѣнъ температуры и особенно отъ ея быстраго пониженія, какъ, напримѣръ, при внезапномъ наступленіи облачности или передъ разсвѣтомъ; перемѣны же давленія атмосферы очень мало вліяютъ на величину преломленія. На этомъ основаніи для измѣренія зенитныхъ разстояній надо выжидать дней съ постоянною погодою (сплошь ясною или сплошь пасмурною) и пользоваться часами наименьшей величины преломленія, т. е. часами около полудня (отъ 11 ч. утра до 2 ч. пополудни). Въ эти часы, несмотря на нѣкоторое безпокойство изображеній, постоянство преломленія приноситъ больше пользы, чѣмъ болѣе точныя наблюденія при спокойныхъ изображеніяхъ, но въ часы, когда преломленіе быстро измѣняется. Тогда благонадежные выводы возможны лишь если и не изъ одновременныхъ наблюденій, то по крайней мѣрѣ изъ наблюденій, произведенныхъ хоть и въ разные дни, но въ одни и тѣ же часы; около же полудня наблюденія могутъ быть произведены не точно въ тѣ же часы: преломленіе можно считать почти одинаковымъ и вычислять наблюденія можно, какъ одновременныя. Особенное вниманіе при наблюденіяхъ, а затѣмъ при вычисленіяхъ должно быть обращено на тѣ случаи, когда лучи зрѣнія проходятъ очень близко къ почвѣ; на такія наблюденія вообще вовсе нельзя полагаться *).

151. Уравниваніе высотъ. Если зенитныя разстоянія измѣрены между многими точками сложной тригонометрической сѣти, то число полученныхъ разностей высотъ бываетъ обыкновенно больше, чѣмъ нужно для вывода взаимнаго превышенія всѣхъ точекъ. Для вычисленія разностей высотъ между P точками достаточно знать превышенія по $P—1$ линіямъ, соединяющимъ эти P точекъ; поэтому, если зенитныя разстоянія наблюдены по L линіямъ, то въ тріангуляціи явится $L—(P—1)$ условій, которымъ вычисленныя разности должны строго удовлетворить. Такимъ образомъ *число условныхъ уравненій высотъ* (H) вычисляется по формулѣ

$$H = L - P + 1 \qquad (142)$$

гдѣ L—число всѣхъ линій визированія, связывающихъ P точекъ сѣти.

Общій видъ условныхъ уравненій высотъ сходенъ съ угловыми условными уравненіями тріангуляцій (см. § 116). Пусть имѣется замкнутая фигура, въ вершинахъ которой измѣрены зенитныя разстоянія. Называя вычисленныя разности высотъ цифрами *1*, *2*, *3*....., имѣемъ необходимое условіе:

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots = 0 \qquad (p)$$

На самомъ дѣлѣ разности высотъ, вычисленныя по наблюденнымъ зенитнымъ разстояніямъ, обыкновенно не удовлетворяютъ этому условію, и въ правой части предъидущаго уравне-

---

*) Изъ русскихъ ученыхъ изслѣдованіями земного преломленія въ послѣднее время особенно усердно занимается *С. Д. Рыльке*. Его обширныя монографіи: „Геометрическія нивелировки Военно-Топографическаго Отдѣла Главнаго Штаба" напечатаны въ Запискахъ названнаго Отдѣла (Часть XLIV, 1889, Ч. LI, 1894 и Ч. LIII, 1896). См. также: *Гедеоновъ*— О выгоднѣйшемъ способѣ нивелированія (тамъ же, Ч. XXXIX, 1884), *Померанцевъ* — Изслѣдованіе земной рефракціи (Записки Императорской Академіи Наукъ, 1884) и *Макаревичъ* — Законы преломленія и строенія атмосферы (Оренбургъ, 1885).

нія получится не 0, а нѣкоторая величина v, называемая *невязкою высотъ*, т. е.

$$\mathit{1} + \mathit{2} + \mathit{3} + \dots\dots = v \qquad (q)$$

Задача уравнительнаго вычисленія заключается въ опредѣленіи такихъ поправокъ $(\mathit{1})$, $(\mathit{2})$.... величинъ $\mathit{1}$, $\mathit{2}$...., чтобы удовлетворилось уравненіе (p), т. е. чтобы

$$\mathit{1} + (\mathit{1}) + \mathit{2} + (\mathit{2}) + \mathit{3} + (\mathit{3}) + \dots\dots = 0 \qquad (r)$$

Вычитая (q) изъ (r), получимъ общій видъ условнаго уравненія высотъ:

$$(\mathit{1}) + (\mathit{2}) + (\mathit{3}) + \dots\dots + v = 0 \qquad (a)$$

Для составленія условныхъ уравненій высотъ на чертежѣ тріангуляціи показываютъ стрѣлками направленія скатовъ по каждой визирной линіи и подписываютъ соотвѣтствующія разности высотъ; затѣмъ составляютъ алгебраическія суммы такихъ разностей въ послѣдовательныхъ замкнутыхъ фигурахъ (выбирая простѣйшія, именно треугольники), идя по какому нибудь опредѣленному направленію во всѣхъ фигурахъ (напримѣръ, въ направленіи движенія стрѣлокъ часовъ) и приписывая знакъ + разностямъ высотъ по спускамъ (когда направленіе счета совпадаетъ съ направленіемъ стрѣлокъ чертежа) и знакъ — по подъемамъ (когда направленіе счета идетъ противъ стрѣлокъ чертежа); эти-то алгебраическія суммы и даютъ величины невязокъ высотъ v, т. е. извѣстные члены условныхъ уравненій (a); самыя же уравненія рѣшаются по правиламъ, объясненнымъ въ § 120.

Существенное отличіе уравниванія высотъ отъ уравниванія горизонтальныхъ угловъ или направленій заключается въ томъ, что здѣсь опредѣляютъ не поправки непосредственныхъ наблюденій, т. е. зенитныхъ разстояній, а поправки вычисленныхъ по нимъ разностей высотъ. Формулы § 148 показываютъ связь между ошибкою зенитнаго разстоянія и ошибкою высоты; такая же связь, очевидно, должна существовать между поправкою зенитнаго разстоянія и поправкою разности высотъ. Называя первую черезъ Δz, а вторую черезъ Δh, по простѣйшей формулѣ (137) имѣемъ:

$$\Delta z = \varkappa \sqrt{2} \, . \frac{\Delta h}{s}$$

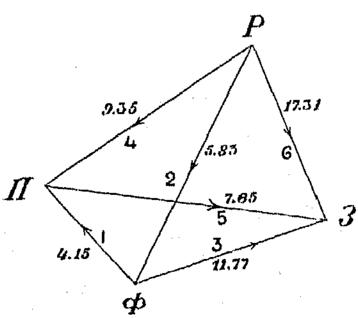
гдѣ s—разстояніе между разсматриваемыми точками. Способъ наименьшихъ квадратовъ требуетъ введенія условія, чтобы сумма квадратовъ поправокъ зенитныхъ разстояній была наименьшею, что въ данномъ случаѣ (отбрасывая постоянный множитель $\varkappa \sqrt{2}$) приводитъ къ условію:

$$\left(\frac{\Delta h_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_2}{s_2}\right)^2 + \ldots\ldots = \text{minimum} \qquad (b)$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (84) § 119, легко замѣтить, что здѣсь каждая поправка Δh входитъ съ множителемъ $\frac{1}{s^2}$, который представляетъ такъ называемый *вѣсъ наблюденія*. Значитъ при уравниваніи высотъ надо вводить вѣса наблюденій, и именно считать ихъ *обратно-пропорціональными квадратамъ разстояній*. Это обстоятельство, не смотря на простоту коэффиціентовъ у искомыхъ поправокъ высотъ въ условныхъ уравненіяхъ (a), усложняетъ вычисленіе.

Числовой примѣръ. Чертежъ 200 представляетъ геодезическій четыреугольникъ (см. § 126), причемъ стрѣлками показаны направленія скатовъ визирныхъ линій, а цифрами—разности высотъ (въ саженяхъ), полученныя изъ непосредственныхъ наблюденій.

Въ этой сѣти имѣется пять замкнутыхъ фигуръ (4 треугольника и 1 четыреугольникъ), но независимыхъ условій, согласно формулѣ (142), только три, ибо въ данномъ случаѣ $L = 6$ и $P = 4$. За независимыя условія возьмемъ треугольники *ФПР*, *ФРЗ* и *ФПЗ*, которые даютъ условныя уравненія:



Черт. 200.

$$(1) - (4) + (2) + 0.63 = 0$$

$$-(2) + (6) - (3) - 0.29 = 0$$

$$(1) + (5) - (3) + 0.03 = 0$$

Расположимъ эти уравненія въ таблицу:

Поправки.	A	B	C	$\frac{1}{p} = s^2$	$p.\ \Delta h$	Δh
(1)	+ 1		+ 1	171	− 0.0004306	− 0ᶜ.074
(2)	+ 1	− 1		682	− 0.0004456	− 0.304
(3)		− 1	− 1	303	− 0.0000150	− 0.005
(4)	− 1			512	+ 0.0004933	+ 0.252
(5)			+ 1	622	+ 0.0000627	+ 0.039
(6)		+ 1		387	− 0.0000477	− 0.019

Вѣса p взяты обратно-пропорціональными квадратамъ разстояній s, выраженнымъ въ верстахъ (см. § 132, стр. 487). Вотъ нормальныя уравненія и ихъ рѣшеніе:

A	B	C	v
+ 1365	− 682	+ 171	+ 0.63
3.1351	$_n$ 2.8338	2.2330	9.7993
	+ 1372	+ 303	− 0.29
	+ 340.8	− 85.5	− 0.3148
	+ 1031.2	+ 388.5	+ 0.0248
	3.0133	2.5894	8.3945
		+ 1096	+ 0.03
		+ 21.4	+ 0.0789
		+ 1074.6	− 0.0489
		+ 146.4	+ 0.0093
		+ 928.2	− 0.0582

+ 0.03252
+ 0.01073
+ 0.63
+ 0.67325

$_n$ 9.8282
3.1351

$lg\ A =_n 6.6931$

$A = -0.0004933$

+ 0.02436
+ 0.0248
+ 0.04916

$_n$ 8.6916
3.0133

$lg\ B =_n 5.6783$

$B = -0.0000477$

8.7649
2.9676

$lg\ C = 5.7973$

$C = +0.0000627$

Повѣрка $[p\,.\,\Delta h^2] = +0.000295$

$[K\,.\,v] = -0.000295$

Средняя ошибка на 1 версту $= \pm \sqrt{\frac{0.000295}{3}} = \pm 0.01$ саж.

Исправивъ наблюденныя разности высотъ поправками Δh предъидущей таблицы, получимъ нижеслѣдующія уравненныя разности высотъ, съ которыми, какъ легко убѣдиться, не будетъ уже никакого противорѣчія при вычисленіи самихъ высотъ.

$1 = 4^c.076$	$4 = 9^c.602$
$2 = 5.526$	$5 = 7.689$
$3 = 11.765$	$6 = 17.291$

Хотя введеніе вѣсовъ въ уравнительное вычисленіе высотъ и не представляетъ особыхъ затрудненій, но все же оно усложняетъ числовыя выкладки, а опытъ показываетъ, что большой пользы отъ этого не получается, такъ что, имѣя въ виду только одну цѣль—устраненіе противорѣчій въ вычисленіи высотъ отдѣльныхъ точекъ съ нѣсколькихъ другихъ, можно поступать еще проще, т. е. пренебрегать различіемъ вѣсовъ и считать ихъ одинаковыми. Оправданіемъ такого упрощенія вычисленій можетъ служить то обстоятельство, что строгому уравниванію можно подвергать лишь взаимныя и одновременныя наблюденія, какихъ на обыкновенныхъ тріангуляціяхъ никогда не производятъ; для неодновременныхъ же наблюденій слѣдовало бы вводить въ условныя уравненія, въ качествѣ неизвѣстныхъ, еще поправки коэффиціентовъ преломленія, по двѣ для каждой пары зенитныхъ разстояній. До сихъ поръ такихъ строгихъ въ теоретическомъ отношеніи уравниваній нигдѣ еще не дѣлалось, да едва-ли этимъ удалось бы улучшить результаты наблюденій зенитныхъ разстояній на тріангуляціяхъ. Легко понять, что *перемѣны земного преломленія* не даютъ возможности вычислять разности высотъ изъ наблюденныхъ зенитныхъ разстояній съ весьма большою точностью; если же самый матеріалъ ненадеженъ, то никакое сложное и хорошо обоснованное въ теоретическомъ смыслѣ вычисленіе не дастъ результатовъ высокой точности. Кромѣ того разстоянія между точками, т. е. стороны треугольниковъ на дѣйствительныхъ тріангуляціяхъ, по большей части близки къ равенству, а при полномъ равенствѣ сторонъ вѣса и въ самомъ дѣлѣ одинаковы.

Если въ предъидущемъ примѣрѣ принять вѣса одинаковыми, то получается слѣдующее:

Поправки.	A	B	C	Δh
(1)	+ 1		+ 1	— 0^c.165
(2)	+ 1	— 1		— 0 .230
(3)		— 1	— 1	— 0 .065
(4)	— 1			+ 0 .235
(5)			+ 1	+ 0 .070
(6)		+ 1		— 0 .005

Вотъ нормальныя уравненія и ихъ рѣшеніе:

	A	B	C	v
	+ 3	— 1	+ 1	+ 0.63
		+ 3	+ 1	— 0.29
+ 0.005		+ 0.333	— 0.333	— 0.21
+ 0.070		+ 2.667	+ 1.333	— 0.08
+ 0.63			+ 3	+ 0.03
+ 0.705		+ 0.093	+ 0.333	+ 0.21
$A = -0.235$		— 0.080	+ 2.667	— 0.18
		+ 0.013	+ 0.667	— 0.04
			+ 2.0	— 0.14
		$B = -0.005$		

$C = +0.070$

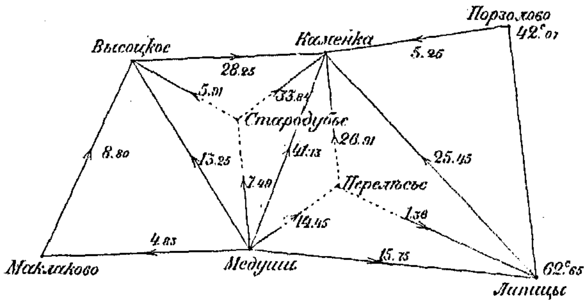
$$\text{Повѣрка } [\Delta h^2] = +0.1445$$
$$[Kv] = -0.1445$$

Уравненныя разности высотъ:

$1 = 3^c.985$	$4 = 9^c.585$
$2 = 5.600$	$5 = 7.720$
$3 = 11.705$	$6 = 17.305$

Эти величины отличаются, конечно, отъ разностей высотъ, полученныхъ строгимъ уравниваніемъ (съ введеніемъ вѣсовъ), но съ формальной стороны противорѣчій не будетъ, и алгебраическая сумма разностей высотъ въ каждой замкнутой фигурѣ равна нулю.

Когда тріангуляція представляетъ непрерывную цѣпь простыхъ треугольниковъ, то вычислительная работа можетъ быть еще болѣе упрощена; для каждой точки, опредѣленной съ двухъ предъидущихъ, берутъ просто среднее ариѳметическое изъ обоихъ результатовъ. Для уединенныхъ (третьеклассныхъ) точекъ, исходя изъ тѣхъ, съ которыхъ онѣ наблюдались, получается обыкновенно нѣсколько результатовъ; изъ этихъ результатовъ



Черт. 201.

тоже берутъ просто ариѳметическое среднее. Такое упрощеніе въ послѣднемъ случаѣ тѣмъ болѣе допустимо, что главный источникъ погрѣшностей въ выводѣ высотъ по одностороннимъ зенитнымъ разстояніямъ заключается въ неизвѣстности принятаго коэффиціента земного преломленія; отъ строгаго уравнительнаго вычисленія результаты едва-ли стали бы лучше, и проще всего идти къ цѣли ближайшимъ путемъ.

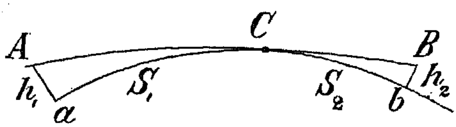
На черт. 201 изображена часть тріангуляціи С.-Петербургской губерніи, причемъ у каждой стороны показана разность высотъ ея концовъ (въ саженяхъ), полученная изъ вычисленія взаимныхъ или одностороннихъ зенитныхъ разстояній. Если начать вычисленіе отъ абсолютныхъ высотъ начальныхъ точекъ Порзолово и Липицы, то для точекъ 1-го класса по объясненному выше правилу получится въ саженяхъ:

Каменка.	Медуши.	Высоцкое.	Маклаково.
Изъ Порз. . 36.82	Изъ Кам. . 78.14	Изъ Кам. . 65.26	Изъ Выс. . 73.94
„ Лип. . 37.20	„ Лип. . 78.40	„ Мед. 65.02	„ Мед. . 73.44
Средн. . . 37.01	Средн. . . 78.27	Средн. . . 65.14	Средн. . . 73.69

Для точекъ уединенныхъ (третьеклассныхъ):

Перелѣсье.	Стародубье.
Изъ Липицъ . . . 64.01	Изъ Каменки . . . 70.85
„ Каменки . . . 63.92	„ Высоцкаго . . 71.05
„ Медушей . . 63.82	„ Медушей . . 70.78
Среднее. . . 63.92	Среднее. . . 70.89

152. Условіе видимости точекъ. Во время рекогносцировокъ и при постройкѣ тригонометрическихъ знаковъ встрѣчается надобность узнать, на какую высоту слѣдуетъ подняться, чтобы видѣть ранѣе построенный знакъ. Допустимъ сперва, что мѣстность между разсматриваемыми точками представляетъ совершенно открытую равнину, на которой предметы скрываются только отъ кривизны земной поверхности. Пусть a и C (черт. 202) двѣ точки, лежащія на одной уровенной поверхности. Для



Черт. 202.

видимости знака, построеннаго въ a, изъ C, высота его h_1 должна быть такая, чтобы лучъ свѣта изъ вершины A попалъ въ глазъ наблюдателя въ C, т. е. чтобы касательная къ послѣднему элементу луча зрѣнія AC совпала съ касательною къ уровенной поверхности въ точкѣ C. Подставляя въ формулу (133) $h_1 - h = 0$, $z = 90°$ и $i = 0$ и называя разстояніе aC черезъ s_1, получимъ (вмѣсто a_1 надо подставить здѣсь h_1):

$$s_1^{\,2} \cdot \frac{1-k}{2R} = h_1$$

Принимая для k его среднюю величину 0.16, изъ этого уравненія легко опредѣлить s_1, именно:

$$s_1 = \sqrt{\frac{R}{0.42}} \cdot \sqrt{h_1} \qquad (a)$$

Эта формула имѣетъ большое практическое значеніе для приближеннаго опредѣленія разстоянія, съ котораго предметъ извѣстной высоты можетъ быть видимъ, а также (что въ сущности то же самое) для вычисленія дальности видимаго горизонта. Легко, напримѣръ, получить, что предметъ въ 25 саженей высоты можетъ быть видимъ съ разстоянія въ 25 верстъ.

Подобнымъ же образомъ для знака въ b, высотою h_2 и отстоящаго отъ C по другую сторону въ разстояніи $bC = s_2$, получимъ:

$$s_2 = \sqrt{\frac{R}{0.42}} \cdot \sqrt{h_2} \tag{b}$$

Если сложить выраженія (a) и (b) и назвать разстояніе отъ a до b черезъ $s = s_1 + s_2$, то выходитъ:

$$s = \sqrt{\frac{R}{0.42}} \{ \sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} \}$$

Принимая $R = 5968$ верстамъ, выражая h_1 и h_2 въ футахъ, а s въ верстахъ, получимъ легко запоминаемую приближенную формулу:

$$s = 2 \{ \sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} \} \tag{143}$$

Двѣ точки, высоты которыхъ равны 100 и 144 футамъ, при обыкновенныхъ условіяхъ видимы не далѣе, какъ на разстояніи 44 верстъ.

Числовой примѣръ. При проложеніи тріангуляціи по Финскимъ шхерамъ былъ построенъ знакъ высотою въ 3.1 сажени на островѣ, возвышающемся надъ уровнемъ моря на 2 сажени. Для слѣдующей точки избранъ островокъ на разстояніи 30 верстъ и высотою въ 3 сажени. Вычислить, на какой высотѣ слѣдуетъ построить здѣсь платформу и установить инструментъ.

Въ данномъ случаѣ $h_1 = 3^c.1 + 2^c = 36$ футамъ, $h_2 = x + 21$ ф., $s = 30$ верстамъ, слѣдовательно по формулѣ (143):

$$30 = 2 \{ \sqrt{36} + \sqrt{x + 21} \}$$

откуда

$$x = 60 \text{ футамъ или около } 8.5 \text{ сажени.}$$

При рекогносцировкахъ на материкѣ можно пользоваться этою же формулою (143); надо лишь принимать за данныя и искомыя не абсолютныя высоты, а высоты точекъ относительно уровенной поверхности, проходящей черезъ наивысшую промежуточную точку.

Положимъ, что между двумя точками, имѣющими абсолютныя высоты 37 и 58 саженей и отстоящими другъ отъ друга въ разстояніи 40 верстъ, находится гора, высотою въ 30 саж. Требуется знать, видимы-ли взаимно эти точки.

Превышеніе разсматриваемыхъ точекъ надъ промежуточною горою равны соотвѣтственно 7 и 28 саж. или 49 и 196 футамъ, слѣдовательно, по формулѣ (143) имѣемъ:

$$S = 2\{\sqrt{49} + \sqrt{196}\} = 42 \text{ верстамъ.}$$

Такъ какъ $42 > 40$, то разсматриваемыя точки взаимно видимы.

Легко понять, что если между двумя точками находится гора или другой мѣстный предметъ, мѣшающій взаимной видимости, то выгоднѣе возвышать знакъ на точкѣ, болѣе близкой къ промежуточному препятствію.

XII.

Нивелиръ-теодолитныя работы.

153. Значеніе нивелиръ-теодолитныхъ работъ. Опорныя точки инструментальной съемки не всегда могутъ быть опредѣлены тріангуляціями. Только открытыя равнины и горныя страны позволяютъ легко и свободно развивать тригонометрическія сѣти разныхъ классовъ; въ мѣстахъ закрытыхъ, особенно лѣсистыхъ, разыскиваніе подходящихъ взаимно-видимыхъ точекъ весьма затруднительно, а возведеніе высокихъ сигналовъ требуетъ большой затраты времени и сопряжено съ огромными издержками. Не малыя неудобства встрѣчаются также при опредѣленіи опорныхъ точекъ въ городахъ и селеніяхъ. Въ подобныхъ мѣстахъ издавна примѣняется другой пріемъ опредѣленія опорныхъ точекъ, именно пріемъ, состоящій въ проложеніи системы ломаныхъ линій, образующихъ такъ называемыя *полигонометрическія сѣти*. Это многоугольники, въ которыхъ измѣрены непосредственно всѣ стороны и всѣ углы, такъ что относительное положеніе ихъ вершинъ можетъ быть затѣмъ легко вычислено, подобно тому, какъ вычисляются полярныя координаты точекъ тріангуляціи. Однако непосредственное измѣреніе линій на мѣстности производится несравненно медленнѣе измѣренія угловъ, и выгода тріангуляціи заключается именно въ томъ, что она позволяетъ ограничиваться измѣреніемъ одной линіи (базиса), а положеніе всѣхъ точекъ опредѣляется при помощи измѣренія только угловъ. Вотъ почему полигонометрическія сѣти примѣняются, вообще говоря, лишь на небольшихъ пространствахъ и притомъ на мѣстности ровной, гдѣ непосредственное измѣреніе линій цѣпью или лентою удобно и не требуетъ затѣмъ особыхъ *приве-*

деній къ горизонту. Вести измѣреніе по ломанымъ линіямъ на десятки и сотни верстъ по гористой и вообще пересѣченной мѣстности очень затруднительно, а иногда и невозможно.

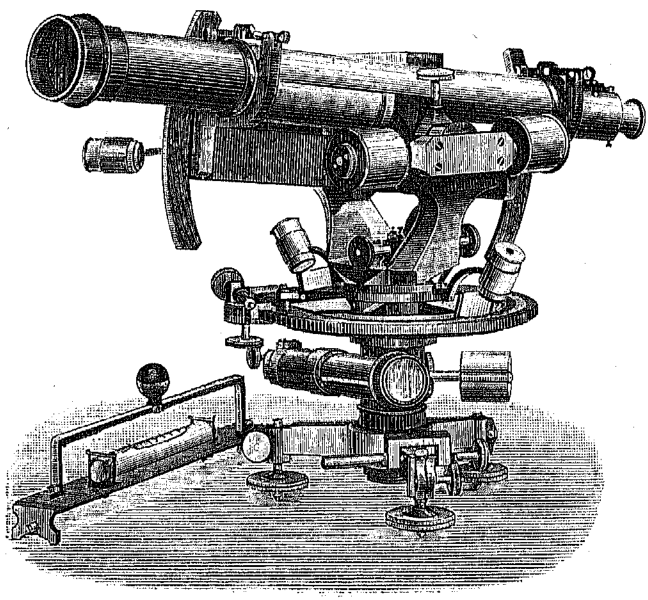
Въ Россіи до сихъ поръ существуютъ обширныя пространства, покрытыя почти сплошными лѣсами, имѣющія весьма рѣдкое населеніе и очень мало контуровъ; въ настоящее время здѣсь нѣтъ надобности производить весьма точныя инструментальныя съемки, а потому и опредѣленіе опорныхъ точекъ можетъ быть сдѣлано способами болѣе простыми, чѣмъ тріангуляціи и точныя полигонометрическія сѣти. Для такихъ пространствъ бывшій Начальникъ Военно-Топографическаго Отдѣла Главнаго Штаба *Э. И. Форшъ* (1828—1896) предложилъ пролагать ломаныя линіи, стороны и углы которыхъ опредѣляются наблюденіями особымъ инструментомъ, названнымъ *нивелиръ-теодолитомъ*. Этотъ инструментъ, совмѣщая въ себѣ и теодолитъ, и нивелиръ, даетъ возможность измѣрять горизонтальные углы, какъ обыкновеннымъ теодолитомъ; разстоянія же получаются при помощи болѣе точнаго измѣренія вертикальныхъ угловъ. Положеніе каждой точки вычисляется съ точностью, достаточною для топографической съемки даже крупнаго масштаба. Ломаныя линіи, образующія такъ называемый *нивелиръ-теодолитный рядъ*, ведутся обыкновенно по существующимъ дорогамъ и, слѣдовательно, обезпечиваютъ опорными точками наиболѣе культурные участки мѣстности.

Такъ какъ длины сторонъ нивелиръ-теодолитнаго ряда получаются не тригонометрическими засѣчками съ базиса или съ предъидущихъ сторонъ треугольниковъ, а опредѣляются при помощи рейки, дальномѣрнымъ способомъ, то для увеличенія точности результатовъ и полученія надежныхъ повѣрокъ отдѣльные нивелиръ-теодолитные ряды не должны быть очень длинны, и, помимо возможно-частаго внутренняго замыканія полигоновъ, необходимо, чтобы основаніемъ для нихъ служили точки тріангуляціи*).

*) Въ Финляндіи и нѣкоторыхъ лѣсистыхъ губерніяхъ Европейской Россіи пролагались нивелиръ-теодолитные ряды, опирающіеся только на астрономическія точки, но такой способъ не можетъ давать точныхъ результатовъ: ошибки положенія астрономической точки, помимо мѣстныхъ притяженій (§ 144), сами по себѣ довольно значительны и искажаютъ результаты хорошихъ нивелиръ-теодолитныхъ работъ.

154. Описаніе инструментовъ. При производствѣ нивелиръ-теодолитныхъ работъ необходимо имѣть *нивелиръ-теодолитъ*, *три штатива* и *двѣ рейки*. Типъ нивелиръ-теодолита былъ выработанъ по указаніямъ изобрѣтателя русскимъ механикомъ *Брауеромъ*. Въ настоящее время осталось уже немного инструментовъ, вышедшихъ изъ рукъ Брауера, и новые изготовляются швейцарцемъ *Керномъ* въ Аарау.

Нижняя часть нивелиръ-теодолита (черт. 203) съ горизон-

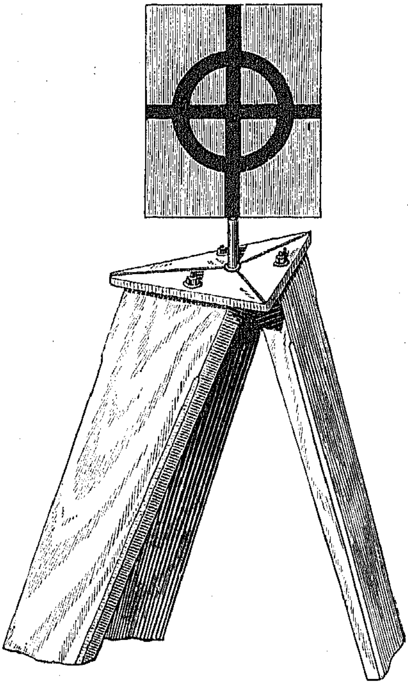


Черт. 203.

тальнымъ лимбомъ, діаметромъ въ 7 дюймовъ, съ двумя верньерами съ точностью отсчетовъ въ $10''$ и небольшою повѣрительною трубою (длина 13 д., отверстіе объектива 1.2 д. и увеличеніе 15), ничѣмъ не отличается отъ нижней части малаго универсала, описаннаго въ § 93. Верхняя же часть нивелиръ-теодолита состоитъ изъ большой зрительной трубы (длина 15 д., отверстіе объектива 1.6 д. и увеличеніе 25), лежащей своими цапфами, подобными цапфамъ трубы нивелира, въ лагерахъ особаго желоба, непосредственно скрѣпленнаго съ вертикальнымъ лимбомъ. Такъ какъ углы наклоненія при наблюденіяхъ марокъ реекъ и мѣстныхъ предметовъ невелики, то, для облегченія инструмента и достиженія большей устойчивости, вертикальный лимбъ представляетъ не полный кругъ, а лишь два сектора по 50°, діаметромъ въ 14 дюймовъ. Слѣдовательно, зрительной трубѣ можно придавать углы возвышенія и пониженія въ предѣлахъ ± 25°. Эти углы отсчитываются по двумъ верньерамъ до 4″, для чего лимбъ раздѣленъ черезъ 5′, и промежутокъ въ 74 дѣленія лимба раздѣленъ на верньерахъ на 75 равныхъ частей. Алидада съ верньерами привинчена наглухо къ той стойкѣ вертикальной оси, у которой расположенъ вертикальный лимбъ, и къ ней придѣланъ точный уровень, цѣна дѣленія котораго около 2″ — 3″. Кромѣ этого уровня, служащаго для точнаго приведенія алидады въ горизонтальное положеніе и для исправленія отсчетовъ по вертикальнымъ верньерамъ, внутри стоекъ, отдѣляющихся отъ вертикальной оси, помѣщены два взаимно-перпендикулярные малые уровня, служащіе для приблизительной установки всего инструмента. Для медленнаго вращенія большой зрительной трубы въ вертикальныхъ и горизонтальныхъ плоскостяхъ имѣются зажимные и микрометрическіе винты обыкновеннаго устройства.

Горизонтальные и вертикальные углы измѣряются нивелиръ-теодолитомъ совершенно такъ же, какъ всякимъ другимъ угломѣрнымъ инструментомъ, съ тою лишь разницею, что для перехода отъ наблюденій при кругѣ право къ наблюденіямъ при кругѣ лѣво, вслѣдствіе невозможности переводить желобъ черезъ зенитъ, трубу необходимо вовсе вынуть изъ желоба и положить снова противоположными цапфами. При этомъ, чтобы исключить изъ наблюденій вліяніе несовпаденія оптической и геометрической осей, трубу, въ новомъ положеніи, поворачиваютъ около ея геометрической оси на 180°, такъ что если, напримѣръ, при кругѣ право окулярный винтъ (выдвигающій окулярную трубку для установки по фокусу) былъ вверху, то при кругѣ лѣво этотъ же винтъ долженъ быть внизу. Вслѣдствіе свободы вращенія зрительной трубы около ея геометрической оси, необходимо конечно при каждой установкѣ слѣдить за тѣмъ, чтобы цапфы были чисты и чтобы сѣтка нитей располагалась правильно; обыкновенно повѣряютъ сѣтку наведеніями на рейку: вертикальная нить должна совмѣщаться съ изображеніемъ рейки.

Выше было упомянуто, что при каждомъ нивелиръ-теодолитѣ имѣется три штатива. Такое число необходимо, чтобы на каждой точкѣ можно было измѣрять горизонтальный уголъ между переднимъ и заднимъ штативами. Для избѣжанія приведеній, въ головки наблюдаемыхъ штативовъ вставляются особыя марки (черт. 204), состоящія изъ жестяныхъ щитиковъ, выкрашенныхъ масляною краскою. Положеніе центральнаго кружка марки разсчитано такъ, что центръ его приходится какъ разъ на высотѣ горизонтальной оси поставленнаго на штативъ инструмента.

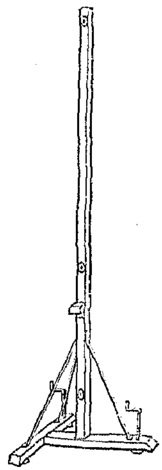


Черт. 204.

Рейки (черт. 205) для нивелиръ-теодолита представляютъ длинные бруски (около $2^1/_2$ саж.), вываренные въ маслѣ и покрытые бѣлою масляною краскою. Съ двухъ противоположныхъ сторонъ реекъ сдѣланы (черною краскою, въ видѣ двойныхъ кружковъ) по три марки, служащія цѣлями для наблюденій. Разстояніе между крайними марками равно двумъ саженямъ. Верхнія марки дѣлаются у самыхъ вершинъ реекъ, нижнія—на небольшомъ разстояніи отъ земли, а среднія—не по серединѣ, а ближе къ нижнимъ маркамъ. Самая наноска марокъ должна быть сдѣлана весьма тщательно при помощи штангенъ-циркуля, съ нормальной мѣры. Равенство высотъ марокъ по обѣимъ сторонамъ достигается посредствомъ листа толстой бумаги, которымъ рейку оборачиваютъ кругомъ на высотѣ марокъ.

Нижнія части реекъ укрѣплены на треножныхъ основаніяхъ въ видѣ буквы Т, съ подъемными винтами для установки реекъ точно въ вертикальное положеніе. Установка производится по показаніямъ одного круглаго, или двухъ взаимно-перпендикулярныхъ цилиндрическихъ уровней, заключенныхъ въ закрытую сверху стекломъ и привинченную къ рейкѣ мѣдную коробку.

Во время работъ необходимо хоть изрѣдка повѣрять рейки, т. е. ставить ихъ вертикально при помощи простого отвѣса, привязываемаго къ гвоздику, вбитому на линіи центровъ марокъ, выше верхней, и убѣждаться, будутъ ли тогда пузырьки уровней точно на серединахъ трубокъ. Для правильной установки уровни снабжены исправительными винтиками. Точно также полезно время отъ времени сравнивать длины реекъ, т. е. разстоянія между марками съ нормальною мѣрою; опытъ показалъ, что отъ сырости во время работъ рейки немного удлиняются; зимою же, отъ храненія въ сухомъ помѣщеніи, укорачиваются примѣрно на 0.05 дюйма.



Черт. 205.

Точность нивелиръ-теодолитныхъ работъ весьма много зависитъ отъ вертикальности реекъ и ихъ неподвижности въ промежуткѣ между наблюденіями на нихъ съ двухъ смежныхъ штативовъ. Чтобы подъемные винты реечныхъ основаній не углублялись въ землю, особенно при сыпучемъ грунтѣ, нижніе ихъ концы снабжены желѣзными башмаками; передъ установкою реекъ (и штативовъ) полезно снимать верхній слой дерна. Чтобы рейки не падали отъ вѣтра, на ихъ основанія нерѣдко кладутъ камни, находимые на мѣстѣ; упавшая задняя рейка принуждаетъ повторять наблюденія на предъидущемъ, уже пройденномъ штативѣ. При работахъ въ лѣсу, поросшемъ мелкимъ кустарникомъ или высокою травою, подъ всѣ три ножки основанія рейки забиваютъ высокіе колья, къ которымъ рейка прикрѣпляется особыми цѣпями; эти колья имѣютъ еще и другую цѣль: поднять нижнюю марку для избѣжанія неправильностей преломленія лучей, идущихъ весьма близко къ почвѣ.

Производитель работъ долженъ убѣдиться, что реечники, переносящіе и устанавливающіе рейки, понимаютъ свои обязанности и относятся къ нимъ добросовѣстно. Въ началѣ работы съ новыми реечниками производитель долженъ самъ показать установку реекъ и обращеніе съ подъемными винтами.

155. Ходъ полевой работы. До производства наблюденій необходимо сдѣлать рекогносцировку предстоящаго пути на протяженіи всего ряда или его части. При этомъ точки, выбираемыя для установки штативовъ и реекъ, отмѣчаются вбиваемыми въ землю прочными кольями; понятно, что смежныя штативныя и реечныя точки должны быть взаимно видимы.

Мѣсто для рейки слѣдуетъ выбирать возможно ближе къ серединѣ между сосѣдними штативами. Въ этомъ случаѣ разстоянія отъ рейки до штативовъ выходятъ меньшими, и при вычисленіи разности высотъ исключается неравенство цапфъ зрительной трубы. Нелишне прибавить, что хотя вдоль узкой просѣки рейки приходится располагать почти въ линіи двухъ штативовъ, но лучше ставить рейку хоть немного внѣ этой линіи, потому что тогда является повѣрка вычисленія разстоянія между штативами, которой не бываетъ при расположеніи рейки на самой линіи двухъ штативовъ (см. форм. 149).

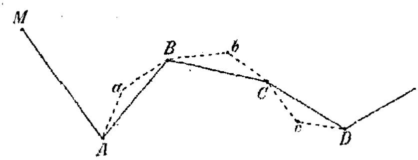
Общее направленіе нивелиръ-теодолитнаго ряда опредѣляется по имѣющимся картамъ и должно быть выбрано съ такимъ разсчетомъ, чтобы обезпечить опорными точками планы предстоящей съемки; обыкновенно работу ведутъ по дорогамъ, на которыхъ даже въ лѣсу всегда найдутся достаточно длинныя стороны; если же частыя извилины дороги не позволяютъ имѣть длинныхъ линій визированія, то приходится поневолѣ дѣлать просѣки со штатива на штативъ. Небольшія порубки не возбуждаютъ жалобъ помѣщиковъ и крестьянъ; въ противномъ случаѣ надо съумѣть возжечь въ мѣстныхъ владѣльцахъ сознаніе удовольствія жертвы на пользу науки.

Чѣмъ разстоянія между штативами меньше, тѣмъ, конечно, число штативовъ больше, и наблюдатель теряетъ много времени напрасно; съ другой стороны, какъ показываетъ формула (152), при длинныхъ линіяхъ визированія въ вычисленныхъ сторонахъ можно ожидать значительныхъ погрѣшностей. Поэтому, имѣя въ виду дальномѣрный способъ опредѣленія сторонъ, нельзя допускать очень большихъ разстояній между штативами. Разстояніе между штативомъ и рейкою не должно превосходить 250 саж. и, слѣдовательно, разстояніе между смежными штативами не должно быть больше 1 версты.

Штативныя точки, съ которыхъ открывается большой кругозоръ на окружающую мѣстность и которыя поэтому могутъ пригодиться, какъ опорныя точки для предстоящей съемки, означаются болѣе долговѣчнымъ способомъ: на нихъ закладываются центры, совершенно подобные центрамъ тригонометрическихъ знаковъ (см. § 66). Такія штативныя точки называются *закладными*. Для повѣрки наблюденій и вычисленій весьма хорошо выбирать закладныя точки такъ, чтобы съ каждой были видны двѣ другія ближайшія закладныя точки.

Если по пути не встрѣчается мѣстъ съ большимъ кругозоромъ, то закладныя точки выбираются и внѣ дороги, гдѣ нибудь на горкѣ или на открытой полянѣ. Къ этимъ точкамъ нивелиръ-теодолитный рядъ нарочно сворачивается съ дороги или же онѣ опредѣляются наблюденіями съ нѣсколькихъ смежныхъ штативовъ, что надо имѣть въ виду при самой рекогносцировкѣ и сдѣлать заранѣе необходимыя просѣки. Каждая такая уединенная закладная точка должна быть видима, для повѣрки, не менѣе, какъ съ трехъ штативовъ. На закладныхъ точкахъ обыкновенно строятъ небольшія пирамиды. Отдѣльный съемочный планшетъ долженъ быть обезпеченъ не менѣе, какъ 3—4 закладными точками.

Ходъ полевой работы съ нивелиръ-теодолитомъ заключается въ слѣдующемъ. Пусть A, B, C.... (черт. 206) представляютъ штативы, а a, b, c... мѣста реекъ. На первой или начальной точкѣ A можно наблюдать, конечно, только одинъ штативъ и одну рейку, но для оріентированія первой стороны AB (а, слѣдовательно, и всего нивелиръ-теодолитнаго ряда) надо измѣрить горизонтальный уголъ, составляемый этою стороною съ направленіемъ на какой нибудь удаленный мѣстный предметъ M, азимутъ котораго извѣстенъ изъ астрономическихъ наблюденій, по вычисленіямъ тріангуляціи или изъ прежнихъ нивелиръ-теодолитныхъ работъ. То же относится и къ конечной точкѣ ряда. На всѣхъ промежуточныхъ штативныхъ точкахъ наблюдаютъ два штатива и двѣ рейки: на B наблюдаютъ марки штативовъ въ A и C и рейки a и b, на C—марки штативовъ въ B и D и рейки b и c и т. д. Послѣ наблюденій на каждомъ штативѣ задній штативъ и задняя рейка переносятся впередъ и дѣлаются передними штативомъ и рейкою. Штативы и рейки ставятся обыкновенно на мѣста, намѣченныя еще при рекогносцировкѣ.



Черт. 206.

Помимо ближайшихъ штативовъ и реекъ, на каждой точкѣ стоянія, съ которой открывается извѣстный кругозоръ, наблюдаютъ еще поставленныя на закладныхъ точкахъ пирамиды и мѣстные предметы, могущіе принести пользу будущему съемщику и которые имѣется въ виду опредѣлить (колокольни церквей, выдающіяся зданія, одиноко стоящія деревья и т. п.).

При наблюдателѣ должно состоять не менѣе девяти человѣкъ прислуги: трое при штативѣ для держанія зонтика и переноски инструмента, по одному при остальныхъ двухъ штативахъ и по два при рейкахъ.

Устанавливая штативъ, надо пользоваться отвѣсомъ и стараться, чтобы центръ головки штатива приходился какъ разъ надъ гвоздикомъ, забитымъ въ колъ, или надъ центромъ камня (на закладныхъ точкахъ); однако особой тщательности здѣсь не требуется, потому что установка штативовъ впереди и сзади устраняетъ надобность въ приведеніяхъ. Гораздо важнѣе стараться устанавливать головку штатива по возможности горизонтально, чтобы ось вставляемой и наблюдаемой затѣмъ марки была вертикальна. Для однообразія полезно держаться извѣстнаго порядка установки ножекъ штатива по линіи, напримѣръ, ставить всегда ножку съ № впередъ.

На каждомъ штативѣ измѣряютъ отдѣльно сперва горизонтальные углы (двумя пріемами), а затѣмъ углы вертикальные (однимъ, двумя и даже тремя пріемами, см. ниже). Имѣя въ виду близость наблюдаемыхъ предметовъ (штативовъ и реекъ), вслѣдствіе чего не всѣ они могутъ быть одинаково отчетливо видимы при неизмѣнной установкѣ окулярной трубки, и опасеніе передвигать эту трубку въ теченіи одного пріема, чтобы не мѣнять коллимаціонную ошибку зрительной трубы, надо при измѣреніи горизонтальныхъ угловъ устанавливать окулярную трубку по штативамъ, а при измѣреніи угловъ вертикальныхъ — по рейкамъ. Дѣйствительно, при измѣреніи горизонтальныхъ угловъ главное вниманіе должно быть обращено на наблюденія передняго и задняго штатива, а при измѣреніи вертикальныхъ — на наблюденія передней и задней реекъ. Конечно, это возможно лишь при равенствѣ разстояній съ одной стороны между штативами, съ другой между рейками и штативами. При неравенствѣ разстояній приходится устанавливать окулярную трубку по нѣсколько разъ въ каждомъ пріемѣ, чего надо однако избѣгать, особенно если наблюдатель знаетъ (изъ сравненія записей при кругѣ право и кругѣ лѣво), что коллимаціонная ошибка трубы не держится постоянною.

Порядокъ наблюденій на каждомъ штативѣ заключается въ слѣдующемъ:

1) *Измѣреніе горизонтальныхъ угловъ.* Кругъ право, винтъ вверху: марка задняго штатива, затѣмъ, по порядку слѣдованія азимутовъ (по Солнцу), задняя и передняя рейки, марка передняго штатива и, если есть, видимые мѣстные предметы; наконецъ опять марка задняго штатива. Послѣ поворота верхней части инструмента на 180° и перекладки трубы въ лагерахъ, наблюдаютъ кругъ лѣво, винтъ внизу: марка задняго штатива, мѣстные предметы, наблюденные въ первомъ полупріемѣ, но въ обратномъ порядкѣ (противъ Солнца), марка передняго штатива, передняя и задняя рейки и опять марка задняго штатива.

Между пріемами горизонтальный лимбъ переставляютъ на 90°. Во второмъ пріемѣ наблюденія начинаютъ при томъ положеніи инструмента, при которомъ онъ былъ при окончаніи перваго. Повѣрительная труба направляется обыкновенно на марку одного изъ штативовъ, какъ на предметъ близкій и всегда отчетливо видимый. Наведенія главной и повѣрительной трубъ, отсчеты верньеровъ и записи въ полевой журналъ производятся, какъ при измѣреніи горизонтальныхъ направленій на тріангуляціи (см. §§ 99 и 100).

2) *Измѣреніе вертикальныхъ угловъ.* Кругъ право, винтъ вверху: нижняя, средняя и верхняя марки задней рейки, марка задняго штатива, мѣстные предметы, марка передняго штатива, нижняя, средняя и верхняя марки передней рейки. Кругъ лѣво, винтъ внизу: тѣ же предметы въ обратномъ порядкѣ.

При каждомъ наведеніи трубы для измѣренія вертикальныхъ угловъ отсчитываютъ уровень алидады съ точностью до 0.1 дѣленія. Эти отсчеты дѣлаются или помощникомъ, или самимъ наблюдателемъ, не сходя съ мѣста, глядя въ особое зеркальце, располагаемое надъ уровнемъ подъ угломъ въ 45°.

Число пріемовъ вертикальныхъ угловъ зависитъ отъ разстоянія между штативомъ и рейкою. Чѣмъ оно больше, тѣмъ наблюденія должны быть точнѣе и число пріемовъ больше. Обыкновенно принято: при углѣ на рейку больше 1° дѣлать по одному пріему, при углѣ отъ 1° до 30′ по два, при углѣ отъ 30′ до 20′ по три и, наконецъ, если бы обстоятельства принудили поставить рейку такъ далеко, что уголъ на нее оказался менѣе 20′ (чего однако вообще надо избѣгать)—по четыре пріема.

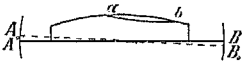
Кромѣ отсчетовъ въ полевой журналъ записываютъ № штатива (по порядку), время работы и состояніе погоды. При наблюденіи мѣстныхъ предметовъ слѣдуетъ отмѣчать, какая именно точка предмета служила цѣлью наведенія; весьма полезно сопровождать эти отмѣтки маленькими чертежами и краткими описаніями. Порядокъ записей зависитъ отъ величины журнала; обыкновенно на лѣвой страницѣ пишутъ наблюденія вертикальныхъ угловъ, а на правой — угловъ горизонтальныхъ.

Прежде чѣмъ снимать инструментъ и нести его на слѣдующій штативъ, наблюдатель долженъ вывести въ полевомъ журналѣ горизонтальные и вертикальные углы, чтобы убѣдиться въ отсутствіи промаховъ. Повѣркою служатъ: для горизонтальныхъ угловъ — постоянство двойной коллимаціонной ошибки (разность $П - Л + 180°$), а для вертикальныхъ—постоянство мѣста нуля (полусумма $П + Л$). Кромѣ того на каждомъ штативѣ измѣряютъ высоту оси инструмента до земли, при помощи особой палки съ дѣленіями черезъ 0.01 саж.

Наблюденія ведутся непрерывно съ утра до вечера; по окончаніи дневной работы (отъ 6 до 8 штативовъ) всего лучше оставлять штативы и рейки на ихъ мѣстахъ и убирать одинъ лишь инструментъ. Если же недостатокъ прислуги для охраны или дурная погода этого не допускаютъ, то убираютъ также штативы и рейки, но въ этомъ случаѣ необходимо тщательно отмѣтить положенія ножекъ на кольяхъ. На послѣднемъ штативѣ, съ котораго производились наблюденія, должно отсчитать направленіе на отдаленный мѣстный предметъ, напримѣръ, хоть на верстовой столбъ, чтобы завтра получить вѣрный уголъ на передній штативъ даже и въ томъ случаѣ, если задній штативъ окажется почему либо сдвинутымъ.

156. Вычисленіе отдѣльнаго штатива. Выводъ и выписка горизонтальныхъ угловъ, измѣренныхъ нивелиръ-теодолитомъ, производятся совершенно такъ, какъ при обработкѣ полевыхъ журналовъ тріангуляціи. Что же касается угловъ вертикальныхъ, то здѣсь является нѣкоторое различіе, потому что они служатъ не только для вывода высотъ, но и для вычисленія горизонтальныхъ разстояній. При измѣреніи вертикальныхъ угловъ на тріангуляціяхъ, гдѣ, вслѣдствіе большихъ разстояній между точками, главная погрѣшность происходитъ отъ всегда неизвѣстныхъ и значительныхъ перемѣнъ земного преломленія, совершенно достаточно приводить пузырекъ уровня при алидадѣ вертикальнаго круга приблизительно на середину трубки. Въ нивелиръ-теодолитныхъ работахъ визирныя линіи невелики, и потому, при измѣреніи вертикальныхъ угловъ, можно стремиться къ бо́льшей точности. Стараться устанавливать пузырекъ уровня строго по срединѣ трубки было бы излишнею потерею времени; гораздо проще и скорѣе довольствоваться приблизительною установкою, а въ моментъ наведенія трубы на марки рейки *отсчитывать уровень*, т. е. наблюдать и записывать положеніе концовъ пузырька. Зная цѣну дѣленія уровня, легко потомъ вычислить и ввести въ отсчетъ вертикальнаго лимба поправку за наклонность алидады и получить тотъ отсчетъ, который былъ бы сдѣланъ при наклонности, равной нулю.

Пусть при отсчитанномъ положеніи алидады AB (черт. 207) показанія концовъ пузырька уровня были a и b; легко сообразить, какой отсчетъ по верньерамъ былъ бы при горизонтальномъ положеніи оси уровня, т. е. когда отсчеты концовъ пузырька были бы одинаковы. Дѣленіе уровня, соотвѣтствующее положенію середины пузырька, равно $\frac{1}{2}(b-a)$ [полагая, что подписи на трубѣ возрастаютъ отъ середины къ обоимъ концамъ; если подписи возрастаютъ въ одномъ направленіи, то слѣдовало бы взять $\frac{1}{2}(b+a)$]. При горизонтальности же оси уровня разность $b-a$ равна нулю. Поэтому наклонность i алидады выразится формулою



Черт. 207.

$$i = \frac{1}{2}(b-a) \, . \, \tau = (b-a) \, . \, \frac{\tau}{2} \qquad (144)$$

гдѣ τ — цѣна одного дѣленія уровня, получаемая изслѣдованіемъ уровня на экзаменаторѣ или на самомъ нивелиръ-теодолитѣ, производя отсчеты вертикальнаго лимба при разныхъ наклонностяхъ алидады и трубы, направленной на тотъ же предметъ.

Такъ какъ подписи дѣленій на вертикальномъ лимбѣ возрастаютъ въ направленіи движенія стрѣлокъ часовъ, то, если записывать показанія концовъ пузырька уровня всегда въ порядкѣ: лѣвый и правый, и у отсчета лѣваго конца ставить знакъ —, а у праваго знакъ +, поправка отсчета верньеровъ за наклонность алидады будетъ равна алгебраической суммѣ отсчетовъ концовъ пузырька, умноженной на цѣну полудѣленія уровня.

Числовой примѣръ: Отсчетъ по I верньеру . . . . . . $10°37'24''$

„ „ II „ . . . . $37\ 32$

Отсчеты уровня: $-22.7+19.3$ $\left(\frac{\tau}{2} = 2''.1\right)$

Среднее изъ отсчетовъ . . . . . $10°37'28''$

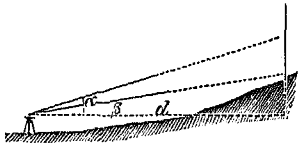
$(b+a) \, . \, \frac{\tau}{2}$ . . . . $-\ 7.1$

Исправленный отсчетъ . . . . . $10°37'20''.9$

Послѣ исправленія за наклонность всѣхъ отсчетовъ вертикальнаго лимба легко вывести мѣсто нуля M и уголъ наклоненія α визирной линіи по формуламъ (см. § 104):

$$M = \frac{П + Л}{2} \qquad \alpha = \frac{П - Л}{2} \tag{145}$$

Назовемъ углы наклоненія при наблюденіи верхней и нижней марокъ *) рейки черезъ α и β, горизонтальное разстояніе отъ оси инструмента до рейки черезъ d, а высоты верхней и нижней марокъ надъ осью инструмента черезъ h_α и h_β; изъ чертежа 208 легко видѣть, что



Черт. 208.

$$\left.\begin{aligned} h_\alpha &= d \,.\, tg\,\alpha \\ h_\beta &= d \,.\, tg\,\beta \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

откуда:

$$h_\alpha - h_\beta = d\,(tg\,\alpha - tg\,\beta) = d \,.\, \frac{sin\,(\alpha - \beta)}{cos\,\alpha \,.\, cos\,\beta}$$

Означивъ еще длину рейки, т. е. разстояніе между марками $h_\alpha - h_\beta$ черезъ l, получимъ:

$$d = l \,.\, \frac{cos\,\alpha \,.\, cos\,\beta}{sin\,(\alpha - \beta)} \tag{146}$$

Вставляя же это d въ формулы (a):

$$\left.\begin{aligned} h_\alpha &= l \,.\, \frac{sin\,\alpha \,.\, cos\,\beta}{sin\,(\alpha - \beta)} \\ h_\beta &= l \,.\, \frac{sin\,\beta \,.\, cos\,\alpha}{sin\,(\alpha - \beta)} \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

Формулы (146) и (147) служатъ для вычисленія разстоянія между рейкою и штативомъ и разности ихъ высотъ. Для простоты вычисленія принимаютъ обыкновенно $l = 1$, т. е. выражаютъ сперва горизонтальныя разстоянія и высоты въ длинѣ

---

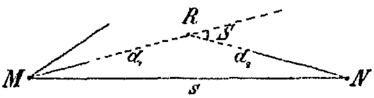
*) Наблюденія на среднюю марку не входятъ въ вычисленіе и служатъ только для разъясненія недоразумѣній: отсчеты по тремъ маркамъ даютъ послѣдовательный ходъ чиселъ, позволяющій тотчасъ возстановить порядокъ, если въ журналѣ записи перепутаны.

рейки; повѣркою служитъ разность $h_\alpha - h_\beta$, которая, при $l = 1$, должна равняться единицѣ.

Числовой примѣръ (см. шт. № 8 отдѣльной таблицы):

	Данныя			Вычисленіе	
(1)	$\alpha = +1^\circ 48' 52''$	(4)	$lg\, sin\, \alpha$		8.50055
(2)	$\beta = -0\ 29\ 25$	(5)	$-lg\, sec\, \beta$		— 2
(3)	$\alpha - \beta = +2\ 18\ 17$	(6)	$lg\, cosec\, (\alpha - \beta)$		1.39562
		(7)	$-lg\, sec\, \alpha$		— 22
		(8)	$lg\, sin\, \beta$		„ 7.93231
		(9)	h_α		+ 0.7873
		(10)	h_β		— 0.2127

Подобныя вычисленія для 15 штативовъ занимаютъ первыя 10 строкъ отдѣльной таблицы, причемъ порядокъ строкъ показанъ здѣсь числами въ скобкахъ. Для каждаго штатива, кромѣ перваго и послѣдняго, вычисляютъ переднюю и заднюю рейки (вправо и влѣво отъ толстой черты, надъ которою стоитъ № штатива).



Черт. 209.

Для вычисленія разстоянія s между двумя смежными штативами M и N (черт. 209) имѣемъ въ треугольникѣ, образуемомъ двумя штативами и промежуточною рейкою, двѣ стороны d_1 и d_2, вычисленныя вышеуказаннымъ способомъ, и уголъ между ними, равный дополненію до 180° суммы угловъ при M и N, полученныхъ непосредственными измѣреніями на соотвѣтствующихъ штативахъ (углы между рейкою и штативомъ). Рѣшеніе такихъ треугольниковъ объяснено въ § 37, 2-й случай, однако, имѣя въ виду то обстоятельство, что углы при M и N въ треугольникѣ MRN всегда очень малы и что, слѣдовательно, искомое разстояніе s всегда близко къ суммѣ разстояній $d_1 + d_2$, здѣсь пользуются обыкновенно слѣдующимъ упрощеннымъ пріемомъ вычисленія. Если назвать *внѣшній* уголъ треугольника MRN при R, равный суммѣ угловъ $M+N$, черезъ S, то

$$s^2 = d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + 2\, d_1 d_2 \,.\, \cos S$$

или, замѣняя $\cos S$ черезъ $1 - 2\,\sin^2\frac{S}{2}$:

$$s^2 = (d_1 + d_2)^2 - 4 d_1 d_2 \,.\, \sin^2\frac{S}{2}$$

откуда, полагая

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \sin\frac{S}{2}\,.\,\frac{\sqrt{d_1 d_2}}{\frac{1}{2}\,(d_1+d_2)} \\ s &= (d_1+d_2)\,.\,\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (148)$$

Величина $\dfrac{\sqrt{d_1 d_2}}{\frac{1}{2}\,(d_1+d_2)}$ есть отношеніе геометрическаго средняго изъ сторонъ d_1 и d_2 къ ихъ среднему ариѳметическому; представивъ ее въ видѣ

$$\frac{\sqrt{\dfrac{d_1}{d_2}}}{\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{d_1}{d_2}\right)}$$

не трудно составить таблицу съ двумя входами, въ которой по углу S и разности логариѳмовъ сторонъ d_1 и d_2 давался бы прямо $lg\sec\theta$, т. е. величина, которую надо вычесть изъ $lg\,(d_1 + d_2)$, чтобы получить $lg\,s$ по второй изъ формулъ (148). Такая таблица имѣется въ концѣ книги и даетъ возможность вычислять съ пятью знаками треугольники съ внѣшнимъ угломъ не болѣе 10°.

Такъ какъ треугольникъ MRN, образуемый рейкою и двумя ближайшими штативами, имѣетъ больше данныхъ, чѣмъ необходимо для его рѣшенія (двѣ стороны и два угла), то тутъ является еще повѣрка какъ вычисленій, такъ и самыхъ наблюденій. Именно, изъ извѣстнаго соотношенія:

$$\frac{\sin M}{d_2} = \frac{\sin N}{d_1} = \frac{\sin S}{s}$$

получается:

$$\sin M = d_2 \cdot \frac{\sin S}{s} \quad \text{и} \quad \sin N = d_1 \cdot \frac{\sin S}{s} \qquad (149)$$

Вычисленные углы M и N, въ предѣлахъ точности наблюденій, должны быть согласными съ наблюденными.

Числовой примѣръ (см. △ **8.R.9** отдѣльной таблицы; числа въ скобкахъ показываютъ порядокъ выписки угловъ и логариомовъ, а черточки — величины данныя).

		$lg\,d_1 - lg\,d_2$	(2)		0.00695
$\angle N$ наблюденный	—	$lg\,d_1$	—	$2^\circ 33' \ 9''$	1.39538
$\angle N$ вычисленный	(8)	$lg \sin S - lg\,s$	(7)	7	7.25324
$\angle M$ наблюденный	—	$lg\,d_2$	—	2 35 34	1.40233
$\angle M$ вычисленный	(9)	$-lg \sec \theta$	(4)	36	— 44
		$G\Sigma$	(3)		0.29757
		$lg \sin S$	(6)		8.95270
$\angle S = M + N$	(1)	$lg\,s$	(5)	5 8 43	1.69946

Разность въ $2''$ между вычисленными и наблюденными углами M и N вполнѣ объясняется ошибками наблюденій.

Въ нижеслѣдующей отдѣльной таблицѣ рѣшеніе треугольниковъ, образуемыхъ двумя послѣдовательными штативами и промежуточною рейкою, занимаютъ строки 18—27. Необходимо замѣтить, что въ зависимости отъ того, которое изъ разстояній больше, d_1 или d_2, разность $lg\,d_1 - lg\,d_2$ ставится вверху или внизу (строки 19 или 25) съ тѣмъ, чтобы Гауссово число $G\Sigma$ приходилось у логариома бóльшаго d.

157. Вычисленіе нивелиръ-теодолитнаго ряда. Когда вычислены разности высотъ и разстоянія между всѣми смежными штативами, тогда дальнѣйшая вычислительная работа заключается въ опредѣленіи разностей высотъ и разстояній между сосѣдними закладными точками, а потомъ въ опредѣленіи тѣхъ же величинъ между конечными точками нивелиръ-теодолитнаго ряда. Такимъ путемъ полигонъ, составленный всѣми отдѣльными штативами, замѣняется сперва полигономъ, составленнымъ од-

	закл. 1 точка		2		3		4		закл. 5 точка		6		7		8
1	− 0 8 54	− 0 41 33	+ 3 33 16	+ 0 5 33	+ 3 7 40	+ 0 11 38	+ 1 43 59	+ 1 13 57	+ 1 11 56	+ 0 20 55	+ 3 44 50	+ 2 3 13	− 1 20 45	+ 5 4 21	
2	0 31 57	0 26 47	2 6 45	2 59 18	2 6 27	2 15 22	1 22 20	1 56 50	3 29 17	2 1 51	3 25 55	3 35 41	3 11 12	2 5 9	
3	− 0 40 51	− 1 8 20	+ 1 26 31	− 2 53 45	+ 1 1 13	− 2 3 44	+ 0 21 39	− 0 42 53	− 2 17 21	− 1 40 56	+ 0 18 55	− 1 32 28	− 4 31 57	+ 2 59 12	
4	n 7.41312	n 8.08229	8.79237	7.20802	8.73690	7.52943	8.48062	8.33263	8.32062	7.78422	8.81528	8.55430	n 8.37083	8.94653	− 1.8367
5	− 3	− 8	− 14	− 56	− 7	− 28	− 1	− 3	− 34	− 19	− 1	− 16	− 136	− 59	− 4.6323
6	2.03181	2.10841	1.43342	1.28289	1.43445	1.40487	1.62074	1.46879	1.21581	1.45054	1.22284	1.20274	1.25501	1.43894	
7	0	− 3	− 83	0	− 65	0	− 20	− 10	− 10	− 1	− 93	− 28	− 12	− 170	+ 2.7956
8	n 8.07491	n 8.29833	8.40078	n 8.70347	8.25057	n 8.55612	7.79918	n 8.09600	n 8.60144	n 8.46770	7.74057	n 8.42966	n 8.89776	8.71687	
9	− 0.2785	− 1.5510	+ 1.6813	+ 0.0309	+ 1.4835	+ 0.0859	+ 1.2629	+ 0.6330	+ 0.3436	+ 0.1716	+ 1.0917	+ 0.5713	− 0.4212	+ 2.4260	
10	− 1.2785	− 2.5510	+ 0.6813	− 0.9691	+ 0.4835	− 0.9141	+ 0.2629	− 0.3670	− 0.6564	− 0.8284	+ 0.0917	− 0.4287	− 1.4212	+ 1.4260	
11			− 1.2785	− 2.5510	− 0.5972	− 3.5201	− 0.1137	− 4.4342	+ 0.1492	− 4.8012	− 0.5072	− 5.6296	− 0.4155	− 6.0583	
12	+ 1.2725		+ 1.6504		+ 1.3976		+ 0.6299		+ 0.1720		+ 0.5204		− 2.8472		
13			+ 1.2725		+ 2.9229		+ 4.3205		+ 4.9504		+ 5.1224		+ 5.6428		+ 2.7956
14	—		+ 2.545		+ 5.846		+ 8.641		+ 9.901		+ 10.245		+ 11.286		+ 5.591
15	+ 3.915		+ 6.460		+ 9.761		+ 12.556		+ 13.816		+ 14.160		+ 15.201		+ 9.506
16	− 0.705		− 0.683		− 0.696		− 0.713		− 0.643		− 0.672		− 0.437		− 0.720
17	+ 3.210		+ 5.777		+ 9.065		+ 11.843		+ 13.173		+ 13.488		+ 14.764		+ 8.786
18	**1.R.2**		**2.R.3**		**3.R.4**		**4.R.5**		**5.R.6**		**6.R.7**		**7.R.8**		
19		0.07652		0.23242		0.28670		0.23170		0.23497		0.29134		0.18312	
20				− 1		0		− 1				− 2			
21	0 5 4	2.03178	0 31 14	1.43245	0 12 34	1.43373	0 18 14	1.62053	0 14 59	1.21537	0 30 55	1.22190	0 16 59	1.25353	
22	5	5.13760	10	6.52503	38	6.13157	19	6.10589	63	6.42569	58	6.73284	61	6.44116	
23	0 6 4	2.10830	0 22 0	1.28233	0 11 53	1.40459	0 12 59	1.46866	0 25 54	1.45034	0 29 40	1.20230	0 25 59	1.43665	
24	3	0	4		49		55		51	− 1	37		57	− 1	
25		0.26445		0.15012		0.02914		0.15187		0.19924		0.01960		0.21905	
26		7.51035		8.18989		7.85200		7.95811		8.07526		8.24606		8.09685	
27	0 11 8	2.37275	0 53 14	1.66486	0 24 27	1.72043	0 31 13	1.85222	0 40 53	1.64957	1 0 35	1.51322	0 42 58	1.65569	

28	153° 2′14″	209°55′16″	186° 8′35″	195°33′8″	197°53′10″	149° 7′16″	222°58′40″
29	− 26 57 46	+ 29 55 16	+ 6 8 35	+ 15 33 8	+ 17 53 10	− 30 52 44	+ 42 58 40
30		− 26 57 46	+ 2 57 30	+ 9 6 5	+ 24 39 13	+ 42 32 23	+ 11 39 39
							+ 54 38 19

1.2.3

3.2 = − 4 19 30
5.3 = + 3 19 24
5.2 = − 1 0 6
10.5 = + 8 37 6
10.2 = + 7 37 0
15.10 = − 22 52 6
15.2 = − 15 15 6

1) − 4 19 30	1.66486
2) − 26 57 46	2.44389
3) − 22 38 16	2.37275
9.65649	1.32135
1.66486	2.44265
9.95002	9.99876
0.06990	8.87870
2.37275	
1.61488	0.75787

2.1 = − 22 38 16 | 5.4 = + 3 32 4
4.2 = + 29 55 16 | 4.1 = + 7 17 0
5.1 = + 10 49 4

1.3.5

1) + 3 19 24	2.09173
3) + 10 49 4	2.60194
5) + 7 29 40	2.44389
9.27343	1.36516
2.09173	2.60121
9.99221	9.99927
0.15732	8.76395
2.44389	
2.08394	0.35995

3.4.5

	0.13179
5) + 2 36 31	1.72043
	6.93770
3) + 3 32 4	1.85222
	− 61
	0.24012
	9.02943
4) + 6 8 35	2.09173

4.3 = + 2 36 31 | 7.6 = + 7 32 22
3.1 = + 7 29 40 | 8.7 = − 7 37 3
4.1 = + 10 6 11 | 8.6 = − 0 4 41
6.4 = + 15 33 8 | 9.8 = + 8 44 32
6.1 = + 25 39 19 | 9.6 = + 8 39 51
10.9 = − 8 49 48
10.6 = − 0 9 57
10.1 = + 25 29 22

1.5.10

1) + 8 37 6	2.31487
5) + 25 29 22	2.77303
10) + 16 52 16	2.60194
9.63382	1.94869
2.31487	2.76810
9.95553	9.99507
0.16616	9.18059
2.60194	
2.27040	0.33154

5.6.7

5) + 7 32 22	1.51322
6) + 17 53 10	1.88257
7) + 10 20 48	1.64957
9.48732	1.00054
1.51322	1.87880
9.97848	9.99623
0.22923	9.12174
1.64957	
1.49170	0.15787

6.5 = + 10 20 48
8.6 = − 30 52 44
8.5 = − 20 31 56

7.5 = − 12 54 53
9.7 = + 42 58 40
9.5 = + 30 3 47

5.7.8

5) − 7 37 3	1.65569
7) − 20 31 56	2.07826
8) − 12 54 53	1.88257
9.54498	1.20067
1.65569	2.07441
9.97149	9.99615
0.19184	9.12626
1.88257	
1.62718	0.25539

5.8.9

5) + 8 44 32	1.69946
8) + 30 3 47	2.21744
9) + 21 19 15	2.07826
9.69979	1.39925
1.69946	2.21237
9.93725	9.99493
0.13411	9.18688
2.07826	
1.63671	0.44155

8		9		закл. 10 точка		11		12		13		14		закл. 15 точка
+1 48 52	+1 55 8	−0 18 47	+1 50 12	+2 21 33	+2 26 14	−0 49 43	+1 11 6	+0 33 34	−0 31 24	−0 31 59	+1 1 33	+0 9 43	+1 3 25	
2 18 17	2 16 5	2 5 57	2 29 20	3 0 41	2 53 30	2 46 18	1 57 22	1 2 31	0 59 37	0 54 18	0 46 21	1 4 51	0 43 36	
−0 29 25	−0 20 57	−2 24 44	−0 39 8	−0 39 8	−0 27 16	−3 36 1	−0 46 16	−0 28 57	−1 31 1	−1 26 17	+0 15 12	−0 55 8	+0 19 49	
8.50055	8.52485	*n* 7.73750	8.50583	8.61451	8.62864	*n* 8.16021	8.31556	7.98963	*n* 7.96065	*n* 7.96864	8.25293	7.45124	8.26590	−5.7778
−2	−1	−39	−3	−3	−1	−86	−4	−2	−15	−14	0	−6	−1	−1.7114
1.39562	1.40258	1.43617	1.36225	1.27956	1.29716	1.31555	1.46681	1.74030	1.76093	1.80149	1.87024	1.72439	1.89680	
−22	−24	−1	−22	−37	−39	−5	−9	−2	−2	−2	−7	0	−7	−4.0674
n 7.93231	*n* 7.78491	*n* 8.62417	*n* 8.05626	*n* 8.05626	*n* 7.89935	*n* 8.79793	*n* 8.12898	*n* 7.92537	*n* 8.42280	*n* 8.39961	7.64557	*n* 8.20512	7.76075	+2.7956
+0.7873	+0.8461	−0.1490	+0.7380	+0.7835	+0.8429	−0.2985	+0.6058	+0.5369	−0.5265	−0.5888	+1.3279	+0.1498	+1.4544	−1.2718
−0.2127	−0.1539	−1.1490	−0.2620	−0.2165	−0.1571	−1.2985	−0.3942	−0.4631	−1.5265	−1.5888	+0.3279	−0.8502	+0.4544	(−2.5436)
		−0.2127	−0.1539	−1.3617	−0.4159	−1.5782	−0.5730	−2.8767	−0.9672	−3.3398	−2.4937	−4.9286	−2.1658	
−0.0588		−0.8870		−0.0594		−0.9043		+1.0634		−1.9167		−1.3046		
		−0.0588		−0.9458		−1.0052		−1.9095		−0.8461		−2.7628		−4.0674
		−0.118		−1.892		−2.010		−3.819		−1.692		−5.526		−8.135
		+9.388		+7.614		+7.496		+5.687		+7.814		+3.980		+1.371
		−0.688		−0.639		−0.700		−0.643		−0.650		−0.725		−0.716
		+8.700		+6.975		+6.796		+5.044		+7.164		+3.255		+0.655

8.R.9

	0.00695
2 33 9	1.39538
7	7.25324
2 35 34	1.40233
36	−44
	0.29757
	8.95270
5 8 43	1.69946

9.R.10

	0.26571
	−1
0 28 38	1.43577
30	6.48267
0 23 54	1.36200
62	
	0.07377
	8.18414
0 52 32	1.70147

10.R.11

	0.01760
0 13 39	1.27916
38	6.31895
0 14 10	1.29676
11	0
	0.29232
	7.90803
0 27 49	1.58908

11.R.12

	0.15204
0 17 21	1.31464
20	6.38815
0 24 36	1.46668
37	−1
	0.23163
	8.08645
0 41 57	1.69830

12.R.13

	0.02050
0 11 56	1.74026
51	5.79707
0 12 20	1.76076
25	0
	0.29090
	7.84873
0 24 16	2.05166

13.R.14

	0.06884
0 1 9	1.80133
5	4.69355
0 1 11	1.87017
15	0
	0.26798
	6.83170
0 2 20	2.13815

14.R.15

	0.17239
0 2 20	1.72433
15	5.08927
0 3 14	1.89672
20	0
	0.22333
	7.20932
0 5 34	2.12005

119°36′40″
−60 23 20

110°50′59″
−69 9 1
−60 23 20

229°18′41″
+49 18 41
−129 32 21

160°59′33″
−19 0 27
−80 13 40

172°11′11″
−7 48 49
−99 14 7

194°59′20″
+14 59 20
−107 2 56

−92° 3′36″
+54 38 19
−37 25 17

8.5 = +21 19 15
10.8 = −60 23 20
10.5 = −39 4 5

5.9.10

5) − 8 49 48	1.70147
9) −39 4 5	2.31487
10) −30 14 17	2.21744
9.79951	1.50098
1.70147	2.30969
9.89008	9.99482
0.09225	9.19129
2.21744	
1.59155	0.62589

9.5 = −30 14 17	12.11 = +27 56 32
5.1 = +16 52 16	15.12 = + 1 40 16
9.1 = −13 22 1	15.11 = +29 36 48
11.9 = −69 9 1	11.1 = −82 31 2

15.1 = −52 54 14

1.10.15

1) −22 52 6	2.66311
10) −52 54 14	2.97540
15) −30 2 8	2.77303
9.90180	2.56491
2.66311	2.93984
9.78043	9.96444
0.16681	9.62507
2.77303	
2.44354	0.32949

10.11.12

10) +27 56 32	1.69830
11) +49 18 41	1.90735
12) +21 22 9	1.58908
9.87982	1.46890
1.58908	1.87641
9.81422	9.96906
0.17811	9.59249
1.69830	
1.40330	0.29500

11.10 = +21 22 9	14.13 = −4 17 42
13.11 = −19 0 27	15.14 = +3 57 36
	15.13 = −0 20 6
	13.10 = +2 21 42

15.10 = +2 1 36

10.12.15

	0.67201
15) + 0 21 20	1.90735
	5.88546
10) + 1 40 16	2.57936
	−4
	0.08379
	8.54857
12) + 2 1 36	2.66311

12.13.14

	0.08649
14) − 3 31 7	2.05166
	6.73629
12) − 4 17 42	2.13815
	−99
	0.25993
	9.13338
13) − 7 48 49	2.39709

13.12 = − 3 31 7
15.13 = +14 59 20
15.12 = +11 28 13

12.14.15

12) + 3 57 36	2.12005
14) + 11 28 13	2.57936
15) + 7 30 37	2.39709
9.29854	1.41859
2.12005	2.57832
9.99124	9.99896
0.18123	8.84027
2.39709	
2.11129	0.28580

14.12 = + 7 30 37
12.10 = + 0 21 20
14.10 = + 7 51 57
10.1 = −30 2 8
14.1 = −22 10 11

−15 15 6 (15.2 при 1)
−37 25 17

нѣми закладными точками, а затѣмъ геодезическимъ разстояніемъ между конечными точками ряда.

Имѣя въ виду всегда большое число штативовъ и отсутствіе здѣсь частныхъ повѣрокъ, представляемыхъ подобнымъ этому вычисленіемъ полярныхъ координатъ въ тріангуляціяхъ, весьма полезно держаться однообразной схемы, для поясненія которой въ отдѣльной таблицѣ приведено полное вычисленіе 15-ти послѣдовательныхъ штативовъ ряда Сурнмяки-Выборгъ, представляющее *двѣ страницы* вычислительной тетради. Для облегченія ссылокъ первыя 30 строкъ перенумерованы въ послѣдовательномъ порядкѣ.

Послѣ вычисленія превышеній реекъ надъ ближайшими штативами, объясненнаго въ предъидущемъ § 156 (строки 1—10), выводятъ высоты послѣдовательныхъ штативовъ *). Если назвать эти высоты черезъ H, H_1, H_2...H_n (высота H перваго штатива должна быть извѣстна изъ другихъ опредѣленій), превышенія нижней марки передней рейки надъ осью инструмента черезъ h, h_1, h_2..., а превышенія нижней марки задней рейки надъ осью же инструмента черезъ h'_1, h'_2..., то связь между этими величинами представится равенствами:

$$H_1 = H + (h - h'_1)$$
$$H_2 = H_1 + (h_1 - h'_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H_n = H_{n-1} + (h_{n-1} - h'_n)$$

Съ другой стороны, означая черезъ H'_1, H'_2... высоты нижнихъ марокъ, получаемъ:

$$H'_1 = H + h$$
$$H'_2 = H'_1 + (h_1 - h'_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H'_n = H'_{n-1} + (h_{n-1} - h'_{n-1})$$

Повѣркою вычисленія служитъ слѣдующее соотношеніе

*) Вѣрнѣе осей инструмента (строка 15), которыя легко перевести затѣмъ въ высоты самыхъ точекъ стоянія (строка 17), имѣя высоты оси надъ землею (строка 16).

между каждыми H_i и H_i':

$$H_i = H'_i - h'_i \tag{150}$$

Такія суммировки исполнены въ строкахъ 11, 12 и 13-ой отдѣльной таблицы, причемъ строка 11-я представляетъ суммы превышеній нижнихъ марокъ, 12-я—разности h_i—h'_i, а 13-я—высоты осей инструмента на послѣдовательныхъ штативахъ относительно оси инструмента *перваго штатива страницы*, выраженныя въ длинѣ рейки, т. е. въ двойныхъ саженяхъ. Затѣмъ строка 14 представляетъ тѣ же высоты, выраженныя въ саженяхъ (числа строки 14-й суть удвоенныя числа строки 13-й). Строка 15-я даетъ абсолютныя высоты оси инструмента, полученныя изъ относительныхъ высотъ строки 14-й прибавленіемъ постояннаго числа—абсолютной высоты перваго штатива страницы. Въ данномъ случаѣ абсолютная высота оси штатива № **1**=3.915 саж., и потому для штативовъ **1—8** числа строки 15-й равны числамъ строки 14-й, сложеннымъ съ 3.915; для штативовъ же **9—15** числа строки 15-й равны числамъ строки 14-й, сложеннымъ съ 9.506, т. е. съ абсолютною высотою оси штатива № **8**.

Въ строкѣ 16-й помѣщены высоты оси инструмента, взятыя изъ полевого журнала (съ обратнымъ знакомъ), и, наконецъ, въ строкѣ 17-й—абсолютныя высоты земли на всѣхъ штативахъ. Въ послѣднемъ столбцѣ каждой страницы (строки 4—7) произведены повѣрки по формулѣ (150), а въ четныхъ страницахъ еще суммировки высотъ предъидущихъ.

Вычисленныя высоты уравниваютъ, какъ объяснено на стр. 619-ой; если же обнаружится значительное расхожденіе, то результаты повѣряются по наблюденнымъ вертикальнымъ угламъ марокъ штативовъ.

Строки 18—27, какъ было уже объяснено въ предъидущемъ § 156, представляютъ вычисленіе горизонтальныхъ разстояній между смежными штативами, и логариѳмы этихъ разстояній (въ двойныхъ саженяхъ) даны въ строкѣ 27-й (вторые столбцы).

Далѣе выписываютъ изъ полевого журнала въ одну строку (28-ю) подъ соотвѣтствующими №№ штативовъ горизонтальные углы между штативами (углы *ABC*, *BCD*... черт. 206), считая ихъ всегда въ смыслѣ: направленіе на передній минусъ направленіе на задній штативъ отъ 0° до 360°, а въ слѣдующую 29-ю строку пишутъ тѣ же углы, уменьшенные на 180°, такъ что знакъ остатка $+$ или $-$ прямо указываетъ, отклоняется ли направленіе на слѣдующій штативъ вправо или влѣво относительно предъидущаго. Тутъ же, на строкѣ 30-й, ведутъ послѣдовательную суммировку этихъ угловъ, и потому числа этой строки даютъ непосредственно уголъ, составляемый каждою промежуточною стороною полигона съ первою.

Такъ какъ внѣшніе углы строки 29-й входятъ въ послѣдующее вычисленіе треугольниковъ, образуемыхъ отдѣльными штативами, то необходимо ихъ сперва повѣрить.

Если нивелиръ-теодолитный рядъ проложенъ между двумя извѣстными уже точками, то сумма угловъ поворота (строка 30-я) у конечнаго штатива, въ предѣлахъ случайныхъ ошибокъ измѣренія горизонтальныхъ угловъ, должна равняться разности наблюденныхъ или вычисленныхъ азимутовъ послѣдней и первой сторонъ полигона, уменьшенной: 1) на 180° и 2) на сближеніе меридіановъ конечныхъ точекъ. Такимъ образомъ, если сумму угловъ поворота назвать черезъ ΣA, азимуты первой и послѣдней сторонъ полигона соотвѣтственно черезъ α и α_1, а сближеніе меридіановъ черезъ δ, то между этими величинами должно существовать соотношеніе:

$$\sum A = \alpha_1 - \alpha - (180^\circ + \delta) \tag{151}$$

Сближеніе меридіановъ вычисляется по формулѣ (см. форм. 114):

$$\delta = (\omega_1 - \omega) \,.\, \sin \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}$$

гдѣ φ и φ_1 — широты, а ω и ω_1 — долготы конечныхъ точекъ.

Если нивелиръ-теодолитный рядъ представляетъ замкнутый полигонъ, то сумма угловъ поворота должна равняться 360° (величиною сфер. избытка здѣсь обыкновенно пренебрегаютъ).

Въ каждомъ треугольникѣ, образованномъ тремя смежными штативами K, L и M, изъ предъидущихъ вычисленій извѣстны двѣ стороны (строка 27) и изъ упомянутыхъ выписокъ наблюденій (строка 29)—внѣшній уголъ при среднемъ штативѣ L. Рѣшеніе такого треугольника даетъ разстояніе KM и углы

LKM и LMK, противолежащіе даннымъ сторонамъ. Этимъ угламъ приписываютъ знаки + или —, смотря по знаку внѣшняго угла треугольника, и затѣмъ самые углы (съ ихъ знаками) переписываютъ подъ № соотвѣтствующихъ штативовъ, гдѣ находятся вершины этихъ вычисленныхъ угловъ. Такъ, напримѣръ, два столбца, озаглавленные **1.2.3**, представляютъ рѣшеніе треугольника, образуемаго штативами №№ **1**, **2** и **3** съ внѣшнимъ угломъ 2) = — 26°57′46″; вычисленные углы 1) и 3) переписаны въ правую сторону штатива № **1** подъ названіемъ 3.2 и въ лѣвую сторону штатива № **3** подъ названіемъ 2.1. Подобнымъ же образомъ рѣшены треугольники **3. 4. 5**, **5.6.7**, **10.11.12** и **12.13.14**.

Послѣ рѣшенія ряда треугольниковъ, образованныхъ тремя смежными штативами, переходятъ къ рѣшенію треугольниковъ, такъ сказать, высшаго порядка, образованныхъ вычисленными сторонами, соединяющими штативы черезъ одинъ. Въ каждомъ такомъ треугольникѣ двѣ стороны суть стороны ранѣе вычисленныхъ треугольниковъ, а внѣшній уголъ между ними равенъ измѣренному на соотвѣтствующемъ штативѣ горизонтальному углу между заднимъ и переднимъ штативами, уменьшенному на 180° и сложенному съ алгебраическою суммою сходящихся въ той же вершинѣ угловъ прежде рѣшенныхъ треугольниковъ.

Такое послѣдовательное рѣшеніе треугольниковъ, составляемыхъ вычисленными сторонами предъидущихъ, продолжается до тѣхъ поръ, пока вычислитель не дойдетъ до треугольника, вычисленная сторона котораго будетъ разстояніе между двумя послѣдовательными закладными точками. Выборъ штативовъ для составленія треугольниковъ высшаго порядка въ сущности произволенъ, но обыкновенно стараются составлять ихъ такъ, чтобы они выходили по возможности равнобедренными, что имѣетъ значеніе при наноскѣ штативовъ на съемочные планшеты (см. § 173).

Наконецъ съ полигономъ, образованнымъ послѣдовательными закладными точками, поступаютъ такъ, какъ съ полигономъ, составленнымъ штативами, и доходятъ до вычисленія разстоянія между конечными точками цѣлаго нивелиръ-теодолитнаго ряда. Легко понять, что число треугольниковъ, которые необходимо рѣшить для вычисленія разстоянія между двумя любыми точками ряда, равно числу промежуточныхъ штативовъ, совершенно независимо отъ выбора отдѣльныхъ треугольниковъ.

Что касается самаго способа рѣшенія треугольниковъ, образуемыхъ тремя штативами, то если внѣшній уголъ менѣе 10°, то пользуются объясненною выше таблицею и формулами (148), если же внѣшній уголъ болѣе 10°—формулами (36). Такъ, треугольники **3.4.5**, **12.13.14** и **10.12.15** рѣшены при помощи таблицы, всѣ прочіе—по общему пріему рѣшенія треугольниковъ по двумъ даннымъ сторонамъ и углу между ними.

Очень можетъ быть, что прочитавшему все вышеизложенное въ первый разъ вычисленіе нивелиръ-теодолитныхъ рядовъ покажется очень сложнымъ и утомительнымъ, но такое заключеніе будетъ неосновательно. Начинающему можно посовѣтовать продѣлать вычисленія приведенныхъ на отдѣльной таблицѣ пятнадцати штативовъ. Этого достаточно, чтобы совершенно ознакомиться съ ходомъ вычисленій и полюбить ихъ. Притомъ же вычисленіе нивелиръ-теодолитныхъ рядовъ, подобно вычисленію тріангуляціи, сопровождается рядомъ наслажденій. Дѣйствительно, указанная схема рѣшенія треугольниковъ заключаетъ въ себѣ и *повѣрку*. Такъ какъ внѣшній уголъ Q любого треугольника KQT составляется изъ нѣсколькихъ другихъ угловъ, то послѣ его образованія можно удостовѣриться въ томъ, что онъ составленъ вѣрно, и что суммировка внѣшнихъ угловъ всѣхъ ранѣе рѣшенныхъ треугольниковъ сдѣлана безъ ошибокъ. Для этого надо къ составленному углу Q придать алгебраическую сумму угловъ, имѣющихъ вершинами штативы K и T; полученный результатъ долженъ, по величинѣ и знаку, равняться алгебраической суммѣ угловъ между послѣдовательными штативами, непосредственно измѣренныхъ на всѣхъ точкахъ стоянія *между* K и T (кромѣ угловъ при K и T) и уменьшенныхъ на 180°. Напримѣръ, въ треугольникѣ **1.5.10**, составленный уголъ 5) $= +25°29'22''$; прибавивъ къ нему уголъ 5.2 $= -1°0'6''$ (при шт. **1**) и уголъ 9.5 $= -30°14'17''$ (при шт. **10**), получимъ величину $-5°45'1''$, т. е. горизонтальный уголъ поворота прямой **9.10** $(-60°23'20'' + 54°38'19'')$.

158. Погрѣшности нивелиръ-теодолитныхъ работъ. Точность опредѣленія опорныхъ точекъ нив.-теод. ряда какъ по горизонтальному разстоянію, такъ и по высотѣ зависитъ отъ многихъ обстоятельствъ: отъ ошибочности вычисленныхъ разстояній между рейками и штативами, отъ неточнаго знанія разстоянія между марками каждой рейки, отъ ошибокъ измѣренія горизонтальныхъ угловъ, отъ пренебреженія толщиною реекъ, отъ неравенства цапфъ зрительной трубы, перемѣнъ земного преломленія и пр. Подробныя изслѣдованія погрѣшностей нивелиръ-теодолитныхъ работъ можно найти въ статьяхъ: *Артамонова*—Способъ геодезическихъ работъ пьемонтскаго инженера Порро и работы съ нивелиръ-теодолитомъ на съемкахъ въ Россіи (Инженерный журналъ, 1877, № 3), *Цингера* — Опытъ нивелирныхъ работъ съ нив.-теодолитомъ (Записки В. Т. О. Главнаго Штаба, Часть XXXVI, 1878) и *Ернфельта*—Астрономо-геодезическія работы въ Финляндіи (тамъ-же, Часть XLVIII, 1892).

Ограничимся здѣсь выводомъ главнаго источника погрѣшностей, именно, выводомъ ошибки горизонтальнаго разстоянія между рейкою и штативомъ. Если въ формулѣ (146) ошибку разности угловъ $\alpha-\beta$ назвать черезъ γ, а происходящую отъ этого ошибку разстоянія d черезъ Δd и замѣнить для простоты выкладокъ косинусы всегда малыхъ угловъ α и β единицами, то будетъ:

$$d + \Delta d = \frac{l}{\sin[(\alpha-\beta)+\gamma]} = \frac{l}{\sin(\alpha-\beta)+\gamma}$$

Вычитая отсюда:

$$d = \frac{l}{\sin(\alpha-\beta)}$$

получимъ, пренебрегая малыми членами высшихъ порядковъ:

$$\Delta d = \pm\, l \,.\, \frac{\gamma}{\sin^2(\alpha-\beta)}$$

или, замѣняя $\sin^2(\alpha-\beta)$ черезъ $\frac{l^2}{d^2}$:

$$\Delta d = \pm\, \gamma \,.\, \frac{d^2}{l} \tag{152}$$

Такимъ образомъ ошибка горизонтальнаго разстоянія отъ рейки до штатива прямо-пропорціональна квадрату самого разстоянія и обратно-пропорціональна длинѣ рейки. Для реекъ въ 2 сажени длиною и полагая для γ величину $\pm$ 2″, легко получить слѣдующую табличку:

Разстояніе d въ саженяхъ.	100	200	300
Уголъ $\alpha - \beta$.	1°10′	35′	23′
Ошибка Δd въ саженяхъ	0.05	0.20	0.45

При увеличеніи числа пріемовъ измѣренія вертикальныхъ угловъ ошибка Δd, конечно, уменьшается, но зато она всегда быстро увеличивается съ увеличеніемъ разстоянія d; вотъ почему это разстояніе не должно превосходить 250 саж.

Изслѣдованіе результатовъ нивелиръ-теодолитныхъ работъ показало, что высоты опорныхъ точекъ получаются съ весьма большою точностью, превосходящею, какъ и слѣдовало ожидать, точность опредѣленія высотъ по зенитнымъ разстояніямъ на тріангуляціяхъ. Что же касается горизонтальныхъ разстояній, то они получаются далеко менѣе точно, чѣмъ разстоянія на тріангуляціяхъ, и средняя погрѣшность въ положеніи точки, отстоящей отъ начальной на 75 вер., выходитъ около $\pm$ 5 саж. Однако если нивелиръ-теодолитные ряды ведутся замкнутыми полигонами и притомъ опираются на не весьма отдаленныя другъ отъ друга точки тріангуляціи, то закладныя точки могутъ считаться вполнѣ надежными данными для инструментальныхъ съемокъ. Необходимо еще замѣтить, что точность результатовъ нивелиръ-теодолитныхъ работъ зависитъ отъ искусства, опытности и добросовѣстности наблюдателя въ гораздо большей степени, чѣмъ точность результатовъ тріангуляціи.

Для уменьшенія погрѣшностей и для ускоренія работы прибѣгаютъ иногда къ соединенію нивелиръ-теодолитныхъ рядовъ съ тріангуляціею. Именно, если рядъ вступаетъ въ открытое пространство, то, вмѣсто продолженія нивелиръ-теодолитнаго полигона, производитель работъ избираетъ два какіе нибудь удаленные штатива, начинаетъ отъ нихъ (какъ отъ базиса) тріангуляцію и ведетъ цѣпь треугольниковъ до тѣхъ поръ, пока лѣса или иныя препятствія не принудятъ перейти обратно отъ тріангуляціи къ нивелиръ-теодолитному полигону. Чтобы не возить съ собою особаго инструмента, наблюденія на точкахъ такой промежуточной тріангуляціи производятся тѣмъ же нивелиръ-теодолитомъ.

159. Уравниваніе нивелиръ-теодолитнаго ряда. Выше, въ § 157 было объяснено, что сумма внѣшнихъ угловъ полигона, составленнаго штативами нивелиръ-теодолитнаго ряда, должна равняться: для ряда, соединяющаго двѣ тригонометрическія (или астрономическія) точки—разности азимутовъ крайнихъ сторонъ, уменьшенной на 180° и на сближеніе меридіановъ конечныхъ точекъ (формула 151), а для ряда въ видѣ сомкнутаго полигона — 360°. Отъ ошибокъ измѣреній горизонтальныхъ угловъ эти необходимыя условія окажутся выполненными лишь случайно, и, прежде чѣмъ приступать къ дальнѣйшему вычисленію, полученную погрѣшность разбиваютъ поровну на всѣ углы. Но этого еще недостаточно. Если съ такимъ путемъ уравненными углами и вычисленными разстояніями между штативами опредѣлить географическое положеніе какой нибудь конечной точки ряда отъ начальной, то получится невязка какъ въ широтѣ, такъ и въ долготѣ. Поэтому передъ окончательнымъ вычисленіемъ нивелиръ-теодолитнаго ряда надо произвести особое уравниваніе сторонъ и угловъ.

Разберемъ случай, когда нивелиръ-теодолитный рядъ образуетъ замкнутый полигонъ. Ходъ вычисленія для ряда между двумя данными по широтѣ и долготѣ точками отличается отъ нижеизложеннаго лишь тѣмъ, что непосредственная невязка въ линейныхъ координатахъ получится предварительнымъ переводомъ въ линейныя мѣры невязки въ координатахъ географическихъ.

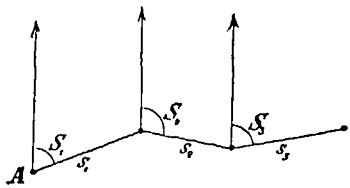
Назовемъ послѣдовательныя стороны полигона буквами s_1, s_2, s_3 ...., а углы, составленные ими съ произвольно избраннымъ направленіемъ, напримѣръ, съ меридіаномъ въ начальной точкѣ A (черт. 210), черезъ S_1, S_2, S_3 .... Эти углы легко получаются по формулѣ:

$$S_i = S_{i-1} + C_i \tag{153}$$

гдѣ C_i — уголъ поворота на точкѣ i, равный горизонтальному углу между направленіями на передній и задній штативы, уменьшенному на 180°. Извѣстно, что сумма проекцій всѣхъ сторонъ сомкнутаго многоугольника на любую ось равна нулю, такъ что должно быть:

$$\left.\begin{array}{l} s_1 . \cos S_1 + s_2 . \cos S_2 + \ldots + s_n . \cos S_n = 0 \\ s_1 . \sin S_1 + s_2 . \sin S_2 + \ldots + s_n . \sin S_n = 0 \end{array}\right\} \quad (p)$$

Если подставить въ эти два уравненія вычисленныя стороны и углы, то въ правыхъ частяхъ получатся, вообще говоря, не нули, а нѣкоторыя числа v_1 и v_2, называемыя *невязками координатъ*, такъ что



Черт. 210.

$$\left.\begin{array}{l} s_1 . \cos S_1 + s_2 . \cos S_2 + \ldots + s_n . \cos S_n = v_1 \\ s_1 . \sin S_1 + s_2 . \sin S_2 + \ldots + s_n . \sin S_n = v_2 \end{array}\right\} \quad (q)$$

Задача уравнительнаго вычисленія заключается въ опредѣленіи такихъ поправокъ $x_1, x_2 \ldots$ сторонъ $s_1, s_2 \ldots$ и такихъ поправокъ $y_1, y_2 \ldots$ угловъ $S_1, S_2 \ldots$, чтобы удовлетворились уравненія (p), т. е. чтобы было:

$$\left.\begin{array}{l} (s_1 + x_1) \cos (S_1 + y_1) + (s_2 + x_2) \cos (S_2 + y_2) + \ldots = 0 \\ (s_1 + x_1) \sin (S_1 + y_1) + (s_2 + x_2) \sin (S_2 + y_2) + \ldots = 0 \end{array}\right\} \quad (r)$$

Раскрывъ скобки, разложивъ синусы и косинусы суммъ на синусы и косинусы отдѣльныхъ угловъ, отбросивъ малые члены второго порядка, выразивъ пока искомыя поправки угловъ въ частяхъ радіуса и вычтя изъ результатовъ уравненія (q), получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} \cos S_1 . x_1 + \cos S_2 . x_2 + \ldots - s_1 \sin S_1 . y_1 - \\ \qquad - s_2 \sin S_2 . y_2 - \ldots + v_1 = 0 \\ \sin S_1 . x_1 + \sin S_2 . x_2 + \ldots + s_1 \cos S_1 . y_1 + \\ \qquad + s_2 \cos S_2 . y_2 + \ldots + v_2 = 0 \end{array}\right\} \quad (a)$$

Это и суть *условныя уравненія линейнаго полигона*, которыя надо рѣшить такъ, чтобы сумма квадратовъ искомыхъ поправокъ была наименьшею. Но величины x и y не однородны, поэтому введемъ вѣса, полагая ихъ для поправокъ сторонъ обратно-пропорціональными сторонамъ, а для поправокъ угловъ прямо-пропорціональными сторонамъ. Такимъ образомъ должно быть условіе:

$$\frac{x_1^2}{s_1} + \frac{x_2^2}{s_2} + \dots + s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + \dots = \text{minimum} \qquad (b)$$

Дифференцируя уравненія (a) и (b), получимъ:

$$\cos S_1 \,.\, dx_1 + \cos S_2 \,.\, dx_2 + \dots - s_1 \sin S_1 \,.\, dy_1 -$$
$$- s_2 \sin S_2 \,.\, dy_2 - \dots = 0$$

$$\sin S_1 \,.\, dx_1 + \sin S_2 \,.\, dx_2 + \dots + s_1 \cos S_1 \,.\, dy_1 +$$
$$+ s_2 \cos S_2 \,.\, dy_2 + \dots = 0$$

$$\frac{x_1}{s_1} \,.\, dx_1 + \frac{x_2}{s_2} \,.\, dx_2 + \dots + s_1 y_1 \,.\, dy_1 + s_2 y_2 \,.\, dy_2 + \dots = 0$$

Если умножить первое и второе уравненія соотвѣтственно на нѣкоторыя числа A и B и произведенія сложить съ третьимъ уравненіемъ, то, по неопредѣленности чиселъ A и B, величины dx и dy въ полученной суммѣ можно считать совершенно произвольными и, слѣдовательно, она удовлетворится не иначе, какъ положивъ:

$$\left.\begin{array}{ll}
x_1 = s_1 \cos S_1 \,.\, A + s_1 \sin S_1 \,.\, B & y_1 = - \sin S_1 \,.\, A + \cos S_1 \,.\, B \\
x_2 = s_2 \cos S_2 \,.\, A + s_2 \sin S_2 \,.\, B & y_2 = - \sin S_2 \,.\, A + \cos S_2 \,.\, B \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \quad (154)$$

а подставляя эти величины въ условныя уравненія (a), послѣ сокращеній получимъ наконецъ:

$$(s_1 + s_2 + \dots) A + v_1 = 0$$
$$(s_1 + s_2 + \dots) B + v_2 = 0$$

откуда:

$$A = -\frac{v_1}{[s]} \qquad B = -\frac{v_2}{[s]} \qquad (155)$$

Зная величины A и B, не трудно вычислить по формуламъ (154) искомыя поправки сторонъ и угловъ, причемъ, чтобы послѣднія получить въ секундахъ, надо правыя части умножить на постоянное $\varkappa = 206\,265$.

Легко видѣть, что трудъ уравнительнаго вычисленія возрастаетъ съ числомъ сторонъ полигона, поэтому вмѣсто уравниванія сторонъ и угловъ, составляемыхъ отдѣльными штативами, уравниваютъ обыкновенно стороны и углы, образуемые закладными точками нивелиръ-теодолитнаго ряда.

Что касается *уравниванія высотъ*, то оказавшуюся невязку разбиваютъ поровну между всѣми штативами; если же нивелиръ-теодолитный рядъ образуетъ систему замкнутыхъ полигоновъ, то поступаютъ по правиламъ, объясненнымъ въ § 151.

Числовой примѣръ. Въ полигонѣ, составленномъ закладными точками I, II.... VI, даны:

Углы поворота. Вычисленные.	Углы поворота. Исправл.	Длина сторонъ въ саженяхъ.	Азимуты.
I = + 79°47′ 5″	10″	I— II = 3644.22	293°36′38″
II = − 60 12 46	41	II—III = 5353.12	233 23 57
III = +131 33 30	35	III—IV = 7089.62	4 57 32
IV = + 55 0 37	42	IV— V = 5540.25	59 58 14
V = + 61 31 54	59	V—VI = 6366.27	121 30 13
VI = + 92 19 10	15	VI— I = 5950.93	213 49 28
Сумма = 359 59 30	60	Сумма = 33744.41	

Въ этой табличкѣ исправленные углы поворота образованы прибавленіемъ къ каждому углу, полученному вычисленіемъ ряда, по + 5″, потому что недостающія 30″ раздѣлены поровну на всѣ шесть угловъ. Азимутъ первой стороны I—II есть данный, прочіе получены по формулѣ (153), придавая къ предъидущему исправленные углы поворота.

Съ этими величинами вычисляютъ невязки полигона по формуламъ (q), именно:

	$s.\cos S$	$s.\sin S$
I—II	$+1459.575$	-3339.158
II—III	-3191.726	-4297.532
III—IV	$+7063.081$	$+612.833$
IV—V	$+2772.590$	$+4796.574$
V—VI	-3326.710	$+5427.929$
VI—I	-4777.568	-3201.256
	$v_1 = -0.758$	$v_2 = -0.610$

Слѣд., по формулѣ (155) $lg\,A = 5.3516$ $lg\,B = 5.2572$

Вставляя полученныя величины A и B въ формулы (154), пользуясь имѣющимися уже логариомами $s.\cos S$ и $s.\sin S$ и выражая поправки угловъ въ секундахъ, получимъ:

$x_1 = -0.028$ саж. $y_1 = +5''.74$
$x_2 = -0.149$ » $y_2 = +1.50$
$x_3 = +0.170$ » $y_3 = +3.31$
$x_4 = +0.149$ » $y_4 = -2.15$
$x_5 = +0.023$ » $y_5 = -5.90$
$x_6 = -0.165$ » $y_6 = -0.52$

Придавъ наконецъ эти поправки къ даннымъ выше сторонамъ и ихъ азимутамъ, получимъ слѣдующія уравненныя величины:

Азимуты S.	Углы поворота.	Стороны s.
		саженн.
293°36′43″.74	+ 79°47′16″.26	3644.192
233 23 58 .50	— 60 12 45 .24	5352.971
4 57 35 .31	+131 33 36 .81	7089.790
59 58 11 .85	+ 55 0 36 .54	5540.399
121 30 7 .10	+ 61 31 55 .25	6366.293
213 49 27 .48	+ 92 19 20 .38	5750.765

160. Уравниваніе боковыхъ предметовъ. Въ описаніи хода полевой работы съ нивелиръ-теодолитомъ было упомянуто, что съ каждой штативной точки, съ которой открывается болѣе или менѣе обширный кругозоръ, т. е. съ точки, особенно полезной *для* будущихъ съемщиковъ, наблюдаютъ выдающіеся *мѣстные предметы или* нарочно построенныя пирамиды.

Если боковой предметъ наблюдался лишь съ двухъ штативовъ, то, конечно, для вычисленія его положенія имѣется только все необходимое и ничего лишняго; если же онъ наблюдался съ трехъ или болѣе точекъ, то общія стороны смежныхъ треугольниковъ могутъ быть вычислены независимо два раза, и отъ неизбѣжныхъ погрѣшностей наблюденій получатся для нихъ, вообще говоря, разныя значенія. Передъ окончательнымъ вычисленіемъ всѣ *смежныя стороны необходимо* уравнять. Повидимому, такая задача не отличается отъ уравниванія уединенныхъ точекъ тріангуляцій и могла бы рѣшаться по правиламъ, объясненнымъ въ § 127. Однако на самомъ дѣлѣ обѣ задачи существенно различны. При уравниваніи уединенныхъ точекъ тріангуляціи разногласія приписываютъ ошибкамъ измѣреній угловъ, стороны же первоклассныхъ или второклассныхъ треугольниковъ принимаютъ неизмѣнными. Въ нивелиръ-теодолитныхъ же работахъ, наоборотъ, ошибки измѣреній горизонтальныхъ угловъ можно считать ничтожными по сравненію съ ошибками сторонъ полигона (см. § 158), и потому при уравниваніи наблюденій на боковые предметы надо исправлять не углы, а стороны.

Пусть съ четырехъ послѣдовательныхъ штативовъ нивелиръ-теодолитнаго ряда ***1***, ***2***, ***3*** и ***4*** (черт. 211) произведены наблюденія на боковой предметъ P, т. е. измѣрены углы 1, 2, $3 \ldots 6$. Изъ вычисленій извѣстны кромѣ того стороны $s_1 = \mathbf{12}$, $s_2 = \mathbf{23}$ и $s_3 = \mathbf{34}$. Для общихъ сторонъ $\mathbf{2}P$ и $\mathbf{3}P$ смежныхъ треугольниковъ имѣемъ *):

---

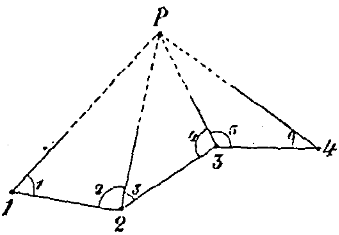
*) Здѣсь не приняты въ разсчетъ сферическіе избытки треугольниковъ, составленныхъ сторонами полигона и точкою P, во первыхъ потому, что они всегда ничтожны, а во вторыхъ и потому, что всѣ измѣренія нивелиръ-теодолитомъ не отличаются крайнею точностью, и вычисленія производятся обыкновенно лишь пятизначными логарифмами.

Изъ Δ-овъ **12P** и **23P** ... **2P** $= s_1 \cdot \frac{\sin 1}{\sin(1+2)} = s_2 \cdot \frac{\sin 4}{\sin(3+4)}$

Изъ Δ-овъ **23P** и **34P** ... **3P** $= s_2 \cdot \frac{\sin 3}{\sin(3+4)} = s_3 \cdot \frac{\sin 6}{\sin(5+6)}$

или, логариѳмируя:

$$\left.\begin{aligned} lg\, s_1 - lg\, s_2 + lg \frac{\sin 1}{\sin(1+2)} - lg \frac{\sin 4}{\sin(3+4)} &= 0 \\ lg\, s_2 - lg\, s_3 + lg \frac{\sin 3}{\sin(3+4)} - lg \frac{\sin 6}{\sin(5+6)} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (p)$$



Черт. 211.

Если подставить сюда углы, непосредственно измѣренные, и стороны, полученныя вычисленіями, то въ правыхъ частяхъ окажутся, вообще говоря, не нули, а нѣкоторыя числа v_1 и v_2, выраженныя въ единицахъ послѣдняго десятичнаго знака логариѳмовъ, т. е. будетъ:

$$\left.\begin{aligned} lg\, s_1 - lg\, s_2 + lg \frac{\sin 1}{\sin(1+2)} - lg \frac{\sin 4}{\sin(3+4)} &= v_1 \\ lg\, s_2 - lg\, s_3 + lg \frac{\sin 3}{\sin(3+4)} - lg \frac{\sin 6}{\sin(5+6)} &= v_2 \end{aligned}\right\} \quad (q)$$

По объясненной выше причинѣ задача уравнительнаго вычисленія должна заключаться въ опредѣленіи такихъ поправокъ x_1, x_2 и x_3 логариѳмовъ сторонъ s_1, s_2 и s_3, чтобы удовлетворились уравненія (p), т. е. чтобы:

$$\left.\begin{aligned} (lg\, s_1 + x_1) - (lg\, s_2 + x_2) + lg \frac{\sin 1}{\sin(1+2)} - lg \frac{\sin 4}{\sin(3+4)} &= 0 \\ (lg\, s_2 + x_2) - (lg\, s_3 + x_3) + lg \frac{\sin 3}{\sin(3+4)} - lg \frac{\sin 6}{\sin(5+6)} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (r)$$

Вычитая почленно (q) изъ (r), получимъ слѣдующія простыя условныя уравненія, выражающія связь между искомыми поправками x и ошибками сторонъ v:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + v_1 &= 0 \\ x_2 - x_3 + v_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Эти уравненія должны быть рѣшены подъ условіемъ:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{minimum} \qquad (b)$$

Дифференцируя уравненія (a) и (b), получимъ:

$$dx_1 - dx_2 = 0$$

$$dx_2 - dx_3 = 0$$

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = 0$$

Умноживъ первое и второе уравненія соотвѣтственно на неопредѣленныя пока числа A и B и сравнивая коэффиціенты у разныхъ dx во всѣхъ трехъ уравненіяхъ, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A \\ x_2 &= -A + B \\ x_3 &= -B \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Подставивъ эти значенія въ условныя уравненія (a) и рѣшая ихъ относительно A и B:

$$A = -\frac{1}{3}(2v_1 + v_2)$$

$$B = -\frac{1}{3}(v_1 + 2v_2)$$

и, наконецъ, послѣ подстановки въ (c):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{3}(2v_1 + v_2) \\ x_2 &= \frac{1}{3}(v_1 - v_2) \\ x_3 &= \frac{1}{3}(v_1 + 2v_2) \end{aligned}\right\} \qquad (156)$$

Подобныя формулы не трудно вывести для какого угодно числа направленій на боковой предметъ.

Необходимо замѣтить, что уравниваніе боковыхъ предметовъ *должно предшествовать* уравниванію нивелиръ-теодолитнаго ряда, потому что оно мѣняетъ стороны полигона. Не подлежитъ сомнѣнію, что наблюденія на боковые предметы со многихъ штативовъ и послѣдующее уравниваніе ихъ улучшаютъ результаты нивелиръ-теодолитныхъ работъ.

Числовой примѣръ. На четырехъ точкахъ ***1***, ***2***, ***3*** и ***4*** (черт. 211) измѣрены углы и извѣстны стороны:

		Въ саженяхъ.
$1 = 60°10'33''$		$lg s_1 = 2.64379$
$2 = 73\ 17\ 42$		$lg s_2 = 2.40962$
$3 = 80\ 51\ 46$		$lg s_3 = 2.51001$
$4 = 71\ 35\ 4$		
$5 = 119\ 27\ 15$		
$6 = 38\ 50\ 27$		

По формуламъ (q) получаемъ:

$$v_1 = -0.00030 \qquad v_2 = -0.00048$$

и далѣе, по формуламъ (156):

$$x_1 = +0.00036 \qquad x_2 = +0.00006 \qquad x_3 = -0.00042$$

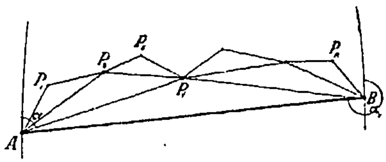
Слѣдовательно, логариѳмы уравненныхъ сторонъ будутъ:

$$lg\, s_1 = 2.64415$$
$$lg\, s_2 = 2.40968$$
$$lg\, s_3 = 2.50959$$

Легко убѣдиться, что съ этими сторонами и прежними углами $1, 2 \ldots 6$ вычисленіе отдѣльныхъ треугольниковъ не представитъ противорѣчій.

161. Вычисленіе географическихъ координатъ. Зная широту и долготу начальной точки и азимутъ на слѣдующій штативъ, легко вычислить широту, долготу и обратный азимутъ этого слѣдующаго и всѣхъ прочихъ штативовъ нивелиръ-теодолитнаго ряда. Однако промежуточные штативы не представляютъ точекъ, важныхъ для картографическихъ цѣлей, они не означаются на мѣстности надежнымъ образомъ и вскорѣ послѣ производства работъ вовсе пропадаютъ; поэтому географическія координаты вычисляются обыкновенно только для закладныхъ точекъ и для тѣхъ штативовъ, съ которыхъ открывается большой кругозоръ и которые, слѣдовательно, особенно удобны для начала предстоящей съемки.

Имѣя въ виду повторять вычисленія, проходя черезъ другія числа, весьма полезно опредѣлять положеніе нѣкоторыхъ точекъ черезъ одну или черезъ нѣсколько. Всего лучше вести вычисленіе координатъ каждой точки съ двухъ другихъ, опредѣленныхъ раньше. Такъ какъ обыкновенно географическія координаты конечныхъ точекъ ряда извѣстны, то вычисляютъ отъ нихъ дважды положеніе какой нибудь средней закладной точки, затѣмъ отъ крайнихъ и вычисленной средней опредѣляютъ положеніе двухъ промежуточныхъ и т. д. Словомъ, вычисленіе географическихъ координатъ точекъ нивелиръ-теодолитнаго ряда ведутъ въ порядкѣ, обратномъ вычисленію послѣдовательныхъ треугольниковъ того же ряда.



Черт. 212.

Что касается формулъ для вычисленія географическихъ координатъ, то по незначительности разстояній между точками пользуются обыкновенно упрощенными формулами (111) § 135, причемъ первая точка отъ концовъ ряда вычисляется шестизначными, а всѣ прочія — пятизначными логариѳмами.

Иногда случается, что азимуты на конечныхъ точкахъ нивелиръ-теодолитнаго ряда опредѣлены не достаточно точно или почему-либо вовсе не опредѣлены. Въ такихъ случаяхъ, послѣ вычисленія послѣдняго треугольника, образуемаго конечными точками A и B (черт. 212) и одною изъ промежуточныхъ P_i, рѣшаютъ обратную геодезическую задачу, т. е. по даннымъ широтамъ и долготамъ конечныхъ точекъ A и B вычисляютъ длину линіи AB и ея азимуты. Придавъ къ этимъ азимутамъ съ соотвѣтствующими знаками углы при A и B треугольника

AP_iB, получаютъ все, что нужно для вычисленія географическихъ координатъ точки P_i по двумъ даннымъ A и B, рѣшая прямую геодезическую задачу, и затѣмъ ведутъ работу, какъ объяснено выше.

Какъ бы тщательно работы ни производились, все же длины стороны AB по нивелиръ-теодолитному ряду и изъ рѣшенія обратной геодезической задачи оказываются обыкновенно не равными. Если разность невелика, и географическія координаты конечныхъ точекъ принимаются безошибочными, то всѣ стороны нивелиръ-теодолитнаго полигона исправляются очень просто: къ логариѳмамъ всѣхъ сторонъ придаютъ разность между логариѳмами стороны AB полученнымъ изъ рѣшенія обратной геодезической задачи и выведеннымъ изъ вычисленія нивелиръ-теодолитнаго ряда.

При вычисленіи нивелиръ-теодолитныхъ работъ за единицу всѣхъ линейныхъ разстояній принимаютъ длину рейки, т. е. 2 сажени, такъ что для перевода всѣхъ разстояній въ сажени слѣдовало бы ко всѣмъ логариѳмамъ прибавить число 0,30103, т. е. $lg\, 2$; для точной же установки ряда между данными точками разность логариѳмовъ двухъ упомянутыхъ опредѣленій линіи AB дастъ не это число, а другое, близкое къ нему, которое называется *логариѳмомъ рейки* или *поправкою ряда*. Понятно, что послѣ исправленія всѣхъ сторонъ полигона вычисленіе географическихъ координатъ всѣхъ промежуточныхъ точекъ полигона по двумъ даннымъ должно давать полное согласіе, и всякое расхожденіе результатовъ будетъ происходить только отъ ошибокъ вычисленій самихъ географическихъ координатъ.

XIII.

Физическое нивелированіе.

162. Физическіе приборы для нивелированія. Геометрическое и тригонометрическое нивелированія не всегда могутъ быть примѣнены, потому что требуютъ взаимной видимости нивелируемыхъ точекъ. При значительномъ удаленіи опредѣляемой точки отъ береговъ океана или отъ точки, высота которой извѣстна, эти способы требуютъ много времени и издержекъ: приходится проходить длинную нивелирную линію со множествомъ промежуточныхъ точекъ, знать высоты которыхъ, быть можетъ, вовсе не нужно. Вотъ почему при геодезическихъ рекогносцировкахъ, маршрутныхъ съемкахъ и географическихъ изслѣдованіяхъ малоизвѣстныхъ странъ примѣняютъ способы опредѣленія высотъ, основанные на показаніяхъ физическихъ приборовъ—барометра и термометра, и называемые поэтому *физическимъ нивелированіемъ*.

Извѣстно, что барометромъ измѣряется давленіе атмосферы; чѣмъ выше точка наблюденія надъ уровнемъ океана, тѣмъ меньше надъ нею слоевъ воздуха и тѣмъ, слѣдовательно, меньше давленіе. Знаменитый французскій математикъ и физикъ *Паскаль* (1623 — 1663), узнавъ объ удивительномъ открытіи ученика Галилея *Торричелли* (1608 — 1647), что воздухъ имѣетъ вѣсъ, догадался, что съ поднятіемъ на гору высота ртутнаго столба въ барометрѣ должна уменьшаться; это предположеніе было провѣрено его зятемъ *Перье*, который въ 1648 году совершилъ съ барометромъ восхожденіе на гору Пюи-де-Домъ, близъ города Клермона, и нашелъ, что съ поднятіемъ на высоту около 500 тоазовъ ртутный столбъ укоротился на $3^1/_8$ парижскаго дюйма. Опытъ Перье, описанный въ сочиненіи Паскаля «Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs», не только подтвердилъ теоретическій выводъ Торричелли о томъ, что жидкость въ закрытой вверху трубкѣ удерживается давленіемъ атмосферы, но повелъ къ открытію новаго способа опредѣленія высотъ.

Если бы плотность воздуха не измѣнялась съ высотою, то уменьшеніе ртутнаго столба было бы прямо-пропорціонально поднятію точки наблюденія надъ уровнемъ океана; на самомъ дѣлѣ плотность воздуха по мѣрѣ удаленія отъ поверхности земли быстро уменьшается. Пока не знали закона, которому слѣдуетъ это уменьшеніе, до тѣхъ поръ не было, конечно, возможности вычислять высоту точки наблюденія по показаніямъ барометра. Первый шагъ къ познанію названнаго закона сдѣланъ англійскимъ астрономомъ *Галлеемъ* (1656 — 1742); въ сочиненіи «A Discourse on the Rule of the decrease of the height of the mercury in the Barometer according as places are elevated above the surface of the Earth (Ph. Tr., 1686) онъ показалъ, что, съ увеличеніемъ высоты въ ариѳметической прогрессіи, давленіе атмосферы, а, слѣдовательно, и высота ртутнаго столба, уменьшаются въ прогрессіи геометрической. У поверхности земли, гдѣ плотность воздуха приблизительно въ 10 000 разъ меньше плотности ртути, пониженію ртутнаго столба барометра на 1 дюймъ должно соотвѣтствовать поднятіе на 10 000 дюймовъ или около 120 саженей (пониженію ртутнаго столба на 1 миллиметръ соотвѣтствуетъ поднятіе на 10 метровъ).

Однако формула, предложенная Галлеемъ для опредѣленія высотъ изъ барометрическихъ наблюденій, была неудовлетворительна; въ ней не принимались въ разсчетъ температура воздуха (которая, какъ извѣстно, быстро понижается съ высотою точки надъ уровнемъ океана), его влажность, широта мѣста наблюденія и пр. Тѣмъ не менѣе формула Галлея долгое время примѣнялась путешественниками; между прочимъ по ней опредѣлена была высота горы Пичинча во время знаменитой экспедиціи французскихъ ученыхъ въ Южную Америку (см. § 10).

Швейцарскій ученый *Делюкъ* (1727 — 1817) при своихъ гипсометрическихъ работахъ въ Альпахъ нашелъ, что барометрическія опредѣленія высотъ оказываются несогласными съ опредѣленіями, получаемыми изъ тригонометрическихъ наблюденій. Собранный имъ и обработанный затѣмъ матеріалъ далъ ему возможность вывести новую формулу, выражающую связь между высотою мѣста и показаніями физическихъ приборовъ. Эта формула, послужившая основаніемъ для всѣхъ дальнѣйшихъ изысканій въ томъ же направленіи, впервые появилась въ классическомъ двухтомномъ сочиненіи Делюка «Recherches sur les modifications de l'atmosphère», напечатанномъ въ Женевѣ, въ 1772 году. Значительныя усовершенствованія формулы Делюка сдѣланы были впослѣдствіи *Лапласомъ*, *Рамономъ* (1753—1827), *Бесселемъ*, *Рюльманомъ* и другими.

Вмѣстѣ съ теоретическими изысканіями шло и усовершенствованіе барометровъ, причемъ постепенно вырабатывались разные типы переносныхъ барометровъ какъ ртутныхъ, такъ и металлическихъ или анероидовъ. Лучшія системы переносныхъ ртутныхъ барометровъ изобрѣтены *Фортеномъ* (1750 — 1831), *Гей-Люссакомъ* (1778 — 1850), *Парротомъ* (1767 — 1852) и *Фусомъ* (1806—1854); наиболѣе удобными и точными анероидами признаются нынѣ анероиды *Ноде* (1786—1878) и *Гольдшмида* (1815 — 1876). Для непрерывнаго записыванія перемѣнъ давленія атмосферы служатъ такъ называемые барографы; ими пользуются на метеорологическихъ станціяхъ и при воздухоплаваніи. Лучшимъ приборомъ этого рода считается въ настоящее время барографъ *Ришара*.

Къ числу любопытныхъ, но слишкомъ сложныхъ приборовъ для измѣренія высотъ не очень удаленныхъ точекъ, напримѣръ, для изысканій при проложеніи желѣзныхъ дорогъ, принадлежитъ также дифференціальный барометръ, изобрѣтенный нашимъ знаменитымъ химикомъ *Менделѣевымъ*. Описаніе этого прибора и примѣненій его къ топографическимъ съемкамъ можно найти въ статьѣ *Обломіевскаго* (1834 — 1897): «Дифференціальный барометръ и его примѣненіе къ измѣренію высотъ», (Записки В. Т. Отдѣла Гл. Штаба, Часть XXXV, 1877; см. также Инженерный журналъ, 1876, №№ 1 и 2).

Ученые, занимавшіеся приготовленіями термометровъ *), *Фаренгейтъ* (1686 — 1736), *Реомюръ* (1683 — 1757) и *Цельзіусъ* замѣтили, что температура кипѣнія воды зависитъ отъ давленія атмосферы; это обстоятельство необходимо принимать въ разсчетъ при наноскѣ на шкалу основныхъ точекъ (0° и 100° въ термометрѣ Цельзіуса). *Делюкъ*, а затѣмъ *Араго* и *Дюлонгъ* (1785 — 1838) дали формулы для вычисленія температуры кипѣнія воды при разныхъ давленіяхъ. При этомъ уже самому Делюку пришла счастливая мысль, что выведенную имъ формулу можно обернуть, и тогда по температурѣ кипѣнія можно опредѣлять давленіе атмосферы, а отсюда и высоту точки наблюденія. Такимъ образомъ Делюку же принадлежитъ честь основанія такъ называемой *гипсотермометріи* или способа опредѣленія высотъ по наблюденіямъ температуры кипѣнія воды; однако сперва этотъ способъ не получилъ распространенія, и только послѣ трудовъ англійскаго естествоиспытателя *Кавендиша* (1731—1810), замѣтившаго, что для точности опредѣленія термометръ надо держать не въ самой кипящей водѣ (гдѣ будетъ излишнее давленіе), а въ ея парахъ, и французскаго физика *Реньо* (1810 — 1878), составившаго первыя точныя таблицы, дающія температуру кипѣнія при разныхъ давленіяхъ, гипсотермометрія сдѣлалась средствомъ для опредѣленія высотъ, по точности почти не уступающимъ способу опредѣленія высотъ при помощи барометровъ.

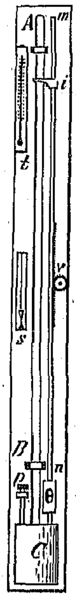
163. Ртутные барометры. Каждый ртутный барометръ состоитъ изъ запаянной сверху стеклянной трубки, наполненной ртутью, и шкалы, по которой отсчитывается высота ртутнаго столба отъ его свободной поверхности въ чашечкѣ до поверхности, ограниченной такъ называемою торричелліевою пустотою. Системы барометровъ различаются устройствомъ трубки и приспособленіями для установки шкалы въ такое положеніе, чтобы, во время отсчета, нуль шкалы оказался

---

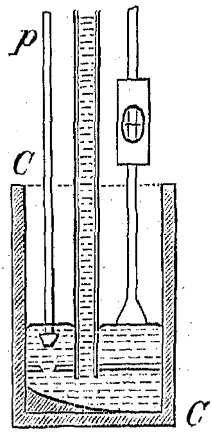
*) Воздушный термометръ изобрѣтенъ *Галилеемъ*, первый ртутный термометръ, со шкалою, основанною на постоянныхъ точкахъ замерзанія и кипѣнія воды, приготовленъ стекольнымъ мастеромъ *Фаренгейтомъ*, около 1709 года.

на уровнѣ свободной поверхности ртути въ резервуарѣ. Ртутные барометры бываютъ съ чашечкою и сифонные; для установки же шкалы или измѣняютъ уровень ртути въ резервуарѣ, приподымая и опуская его подвижное дно, или передвигаютъ всю шкалу вдоль трубки.

Знакомому съ подробностями устройства одного какого нибудь барометра не трудно понять устройство всякаго другого; поэтому ограничимся здѣсь описаніемъ переноснаго барометра русскаго физика *Паррота*. Трубка этого барометра прикрѣплена неподвижно къ доскѣ AB (черт. 213 и 214) маленькими скобочками и опущена нижнимъ открытымъ концомъ въ чашечку C со ртутью. Чашечка имѣетъ горизонтальную перегородку съ двумя отверстіями: въ одно вставлена барометрическая трубка, а другое закрывается (во время путешествій) металлическою конусообразною пробкою. Высота ртутнаго столба отсчитывается по шкалѣ mn при помощи передвижного указателя i съ верньеромъ. Нижняя часть шкалы оканчивается трубочкою, внутри которой свободно двигается поплавокъ изъ



Черт. 213.



Черт. 214.

слоновой кости, причемъ на вырѣзѣ трубочки и на шейкѣ поплавка имѣются черточки, расположенныя такъ, что, при ихъ совмѣщеніи дѣленія на шкалѣ показываютъ разстоянія отъ нижняго края поплавка, соприкасающагося съ поверхностью ртути въ чашечкѣ. Такимъ образомъ, чтобы сдѣлать вѣрный отсчетъ, надо сперва повернуть зубчатку r въ ту или другую сторону, пока упомянутыя черточки не покажутся одною прямой; послѣ установки шкалы приводятъ указатель i въ уровень съ верхнею выпуклостью ртути въ трубкѣ, причемъ для правильности расположенія глаза (для устраненія параллакса) пользуются, если имѣется, отраженіемъ мениска въ зеркальцѣ, вставленномъ въ доску сзади трубки. Дѣленія шкалы должны быть, конечно, изслѣдованы на компараторѣ, и ошибки ихъ принимаемы въ разсчетъ при наблюденіяхъ.

При барометрѣ къ той же доскѣ придѣланы: термометръ t, отсчеты котораго служатъ для приведенія показаній барометра къ опредѣленной температурѣ (обыкновенно къ 0°), и отвѣсикъ въ трубочкѣ s для приведенія шкалы въ вертикальное положеніе.

При упаковкѣ барометръ сперва наклоняютъ такъ, чтобы верхняя часть трубки совершенно заполнилась ртутью, а ртуть, бывшая въ чашечкѣ выше перегородки, скрылась въ ея внутренность; тогда завинчиваютъ пробку p, и если поверхъ перегородки осталась еще ртуть, то ее сливаютъ въ особую стклянку. Затѣмъ доску барометра закрываютъ другою доскою съ крючечками и укладываютъ въ кожаный чехолъ. Въ дорогѣ держатъ барометръ опрокинутымъ чашечкою вверхъ, вслѣдствіе чего воздухъ, случайно оказавшійся во внутренности чашечки, не можетъ попасть въ трубку. Послѣ пріѣзда на мѣсто и снятія верхней доски, барометръ приводятъ въ горизонтальное положеніе, затѣмъ, наклоняя постепенно чашечкою внизъ, вывинчиваютъ пробку p и осторожно доводятъ трубку до вертикальнаго положенія, опредѣляемаго отвѣсикомъ.

Путешественникъ долженъ имѣть съ собою запасныя: трубки, запаянныя съ одного конца, и ртуть. Если въ дорогѣ барометрическая трубка разобьется, то всю ртуть надо немедленно вылить, иначе винты и всѣ мѣдныя части снаряда испортятся отъ соприкосновенія со ртутью. Въ лабораторіяхъ нынѣ имѣются весьма простые и остроумные приборы для наполненія барометровъ. Въ экспедиціяхъ приходится дѣлать эту операцію безъ такихъ приборовъ, и потому не мѣшаетъ привести здѣсь нѣкоторыя подробности.

Прежде всего надо получить химически чистую ртуть. Всего лучше самому добыть ее изъ киновари, но это не всегда возможно, и большею частью приходится довольствоваться готовою. Продажная ртуть обыкновенно заключаетъ въ себѣ свинецъ, но есть и другія примѣси. Для очистки, ртуть выливаютъ въ глубокую тарелку, наполненную азотною кислотою, и долго мѣшаютъ стеклянною палочкой; эта кислота химически извлекаетъ бо́льшую часть примѣсей. За неимѣніемъ азотной кислоты берутъ сѣрную, или даже острый уксусъ, но въ послѣднемъ случаѣ нельзя ограничиться мѣшаніемъ въ тарелкѣ, а необходимо налить ртуть и уксусъ въ бутылку и усиленно взбалтывать въ продолженіи получаса. Затѣмъ ртуть промываютъ нѣсколько разъ водою, высушиваютъ въ мѣстѣ, защищенномъ отъ пыли, и процѣживаютъ сквозь чистую замшу. Барометрическую трубку передъ наполненіемъ ртутью надо хорошенько вымыть и высушить въ теплѣ.

Очищенная ртуть вливается въ трубку при помощи маленькой воронки, сдѣланной изъ куска плотной чистой бумаги. Наполнивъ трубку не совсѣмъ до верху, отверстіе ея закрываютъ пальцемъ, защищеннымъ кускомъ замши, и, медленно оборачивая нѣсколько разъ, слѣдятъ, чтобы всѣ пузырьки воздуха соединились вмѣстѣ и вышли вонъ; упрямые пузырьки можно извлечь тонкою желѣзною проволокою. Потомъ трубку дополняютъ очищенною же ртутью и нагрѣваютъ на спиртовой лампочкѣ, начиная сверху и постоянно поворачивая трубку, чтобы пламя дѣйствовало равномѣрно. Когда ртуть закипитъ, то надо быть очень внимательнымъ, чтобы капли не выбрасывались вонъ. Далѣе отверстіе снова закрываютъ пальцемъ и трубку опускаютъ въ чашечку барометра, наполненную тоже очищенною и прокипяченою ртутью; пока трубка держится еще въ наклонномъ положеніи, палецъ отымаютъ, постепенно приводятъ трубку въ вертикальное положеніе и заправляютъ ея конецъ въ отверстіе перегородки. Наконецъ останется лишь укрѣпить трубку на доскѣ при помощи скобочекъ.

Высота столба ртути въ барометрѣ выражаетъ истинное давленіе атмосферы только въ томъ случаѣ, если верхняя часть трубки совершенно пуста. Въ противномъ случаѣ отсчитанная высота меньше истинной. Судить о пустотѣ можно по рѣзкому металлическому звуку, который слышится при наклоненіи трубки. Если звукъ удара глухой, то надъ ртутью имѣется нѣкоторое количество воздуха, и барометръ не годенъ для наблюденій *).

---

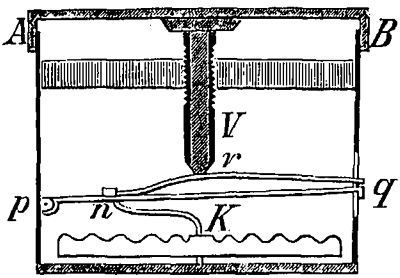
*) Поправку за давленіе оставшагося воздуха можно опредѣлить и вводить въ вычисленіе, но это къ сожалѣнію никогда почти не дѣ-

164. Анероиды. Показанія ртутныхъ барометровъ даютъ непосредственно давленіе атмосферы, но большое количество тяжелой жидкости и значительная длина трубки дѣлаютъ эти приборы не совсѣмъ удобными для путешественниковъ, особенно для изслѣдователей горъ, при восхожденіи на которыя значительный грузъ весьма обременителенъ. Не мудрено, что металлическіе барометры или анероиды, изобрѣтенные во Франціи въ концѣ 40-хъ годовъ XIX-го вѣка почти одновременно, хотя и независимо другъ отъ друга, бѣднымъ мечтателемъ *Види* (1805—1866), и богатымъ заводчикомъ *Бурдономъ* (1808—1884), вслѣдствіе своей легкости и незначительности объема, доведенные въ послѣднее время до размѣровъ карманныхъ часовъ, получили большое распространеніе. Правда, показанія анероидовъ относительны, и для перевода ихъ въ абсолютныя необходимо время отъ времени сравнивать анероиды со ртутными барометрами, но если поправки прибора не мѣняются, то наблюденія съ анероидами даютъ довольно точные результаты.

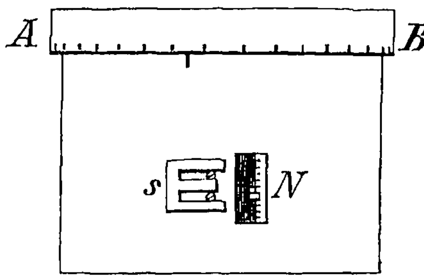
Устройство анероидовъ основано на измѣняемости вида тонкостѣнныхъ, почти пустыхъ внутри металлическихъ коробочекъ вслѣдствіе перемѣнъ давленія наружнаго воздуха. При увеличеніи давленія коробочка сжимается, при уменьшеніи, наоборотъ, расширяется. Для приданія стѣнкамъ бо́льшей подвижности ихъ дѣлаютъ обыкновенно въ видѣ волнообразно изогнутыхъ круглыхъ пластинокъ. Существующія системы анероидовъ различаются почти исключительно только механизмами, передающими незначительныя передвиженія стѣнокъ коробочки указателю, по которому эти передвиженія отсчитываются. Ниже описаны подробности устройства анероидовъ Гольдшмида и Ноде, чаще другихъ примѣняемыхъ для опредѣленія высотъ.

лается. Надо измѣрить длину части трубки надъ ртутью и подлить въ чашечку столько ртути, чтобы надртутное пространство сократилось въ извѣстное число разъ, напримѣръ вдвое. Новое измѣреніе высоты ртутнаго столба въ связи съ прежде полученнымъ даетъ все, что нужно для вычисленія упомянутой поправки. Такое изслѣдованіе особенно удобно дѣлать въ такъ называемыхъ *сифонныхъ барометрахъ*, въ которыхъ открытое колѣно трубки гораздо длиннѣе, чѣмъ высота стѣнокъ сосуда барометровъ съ чашечкою. Сифонные барометры имѣютъ еще и другое преимущество: въ нихъ исключается вліяніе волосности (см. стр. 641).

Въ анероидѣ *Гольдшмида* (черт. 215 и 216) тонкостѣнная коробочка K прикрѣплена своею нижнею частью ко дну наружной оправы анероида, а къ противоположной, волнообразно изогнутой стѣнкѣ придѣлана стоечка съ носикомъ n, упирающимся въ рычажекъ pq съ указателемъ на концѣ; этотъ указатель движется по небольшой шкалѣ N на наружной стѣнкѣ внѣшней оправы. Чтобы увеличить точность отсчета, крышка AB внѣшней оправы снабжена изнутри винтомъ V, упирающимся въ пружинку r, придѣланную къ рычажку pq и имѣющую другой указатель, рядомъ съ первымъ. Ободокъ крышки



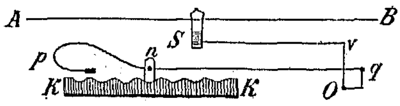
Черт. 215.



Черт. 216.

внѣшней оправы раздѣленъ на 100 равныхъ частей, а высота хода винта V соотвѣтствуетъ передвиженію указателя на одно дѣленіе по шкалѣ N. Въ дорогѣ, для устраненія давленій рычажка pq на носикъ n внутренней коробочки, крышку AB отвинчиваютъ на нѣсколько оборотовъ (вращая ее по направленію награвированной снаружи стрѣлки), чтобы коробочка анероида могла свободно расширяться, и, приподнявъ рычажекъ пальцемъ за указатель, передвигаютъ задержку s Передъ отсчитываніемъ рычажекъ освобождаютъ и крышку AB ввинчиваютъ до тѣхъ поръ, пока конецъ винта V не упрется въ пружинку r, а указатели на этой пружинкѣ и на рычажкѣ pq не совмѣстятся; цѣлыя дѣленія отсчитываются на шкалѣ N, а части ихъ до 0.001 на ободѣ крышки (десятыя доли дѣленій крышки оцѣниваются на глазъ). Легко понять цѣль дополнительной пружинки r: она предохраняетъ коробочку анероида отъ рѣзкихъ давленій въ случаѣ неосторожнаго вращенія крышки болѣе, чѣмъ слѣдуетъ и даетъ возможность производить отсчетъ всегда при нѣкоторомъ постоянномъ надавливаніи рычажка pq на носикъ n, именно, при надавливаніи, соотвѣтствующемъ совмѣщенію указателей.

Анероидъ *Ноде* имѣетъ болѣе сложное внутреннее устройство, но зато отсчеты его дѣлаются непосредственно, безъ всякихъ предварительныхъ манипуляцій. Къ пустотѣлой коробочкѣ K (черт. 217) совершенно того же вида, какъ въ анероидѣ Гольдшмида, придѣлана стоечка n, подпираемая изогнутою пружиною pq, одинъ конецъ которой неподвиженъ, а другой соединенъ съ колѣнчатымъ стержнемъ, вращающимся около неподвижной оси O. Конецъ r этого колѣнчатаго стержня соединенъ съ тонкою цѣпочкою, намотанною и прикрѣпленною къ валику S, на который насажена стрѣлка AB, движущаяся по круговому циферблату. На этотъ же валикъ насажена еще спиральная пружинка, удерживающая цѣпочку всегда въ натянутомъ положеніи. Не трудно понять, что измѣненія давленія, производя повышеніе и пониженіе верхней волнообразной стѣнки коробочки K, преобразовываются во вращательное движеніе валика S и связанной съ нимъ стрѣлки анероида.



Черт. 217.

Чтобы переводить показанія анероидовъ въ показанія ртутнаго барометра, ихъ необходимо по временамъ (обыкновенно передъ выѣздомъ и послѣ возвращенія изъ экспедиціи) сравнивать съ нормальными приборами. Для этого въ центральныхъ метеорологическихъ учрежденіяхъ, какъ, напримѣръ, въ Главной Физической Обсерваторіи въ С.-Петербургѣ, имѣются особыя камеры съ воздушными насосами и съ приспособленіемъ для измѣненія температуры. Въ эти камеры помѣщаютъ изслѣдуемые анероиды и нормальный барометръ и производятъ отсчеты ихъ показаній при разныхъ давленіяхъ воздуха и разной температурѣ. Изъ такихъ отсчетовъ составляются *таблички поправокъ* каждаго анероида, т. е. числа, которыя должно прибавлять (съ соотвѣтствующимъ знакомъ) къ показаніямъ анероида для разныхъ его отсчетовъ и разныхъ температуръ, чтобы получить показанія нормальнаго ртутнаго барометра. Если поправки оказываются очень большими, то ихъ можно уменьшить вращеніемъ особыхъ исправительныхъ винтиковъ, имѣющихся въ крышкахъ анероидовъ.

Если бы поправки анероида оставались постоянными, то показанія его заслуживали бы такого же довѣрія, какъ показанія ртутныхъ барометровъ. На самомъ же дѣлѣ оказывается, что, съ теченіемъ времени, поправки каждаго анероида мѣняются и притомъ мѣняются не равномѣрно, т. е. не пропорціонально времени. Такимъ образомъ, если послѣ возвращенія изъ экспедиціи поправки анероида значительно измѣнились противъ полученныхъ до выѣзда, то нѣтъ никакой возможности знать, каковы были поправки во время наблюденій. Всего лучше опредѣлять поправки почаще и имѣть съ собою не одинъ, а нѣсколько анероидовъ и притомъ различныхъ системъ; тогда среднее изъ ихъ показаній можно считать близкимъ къ истинѣ.

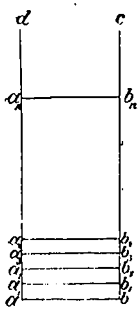
165. Гипсометрическая формула. Чтобы найти связь между высотою точки наблюденія и показаніемъ барометра, выдѣлимъ мысленно столбъ воздуха (произвольнаго, но одинаковаго на всемъ протяженіи сѣченія) отъ уровня океана до крайнихъ предѣловъ атмосферы. Раздѣлимъ этотъ столбъ $abcd$ (черт. 218) горизонтальными плоскостями $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ ..... $a_n b_n$ на слои равной высоты, но столь тонкіе, что плотность воздуха въ каждомъ слоѣ можно считать одинаковою и равною соотвѣтственно α, β, γ ..... Назовемъ еще вѣса столбовъ воздуха $abcd$, $a_1 b_1 cd$, $a_2 b_2 cd$ ..... черезъ p, p_1, p_2 ....; тогда вѣса отдѣльныхъ слоевъ воздуха abb_1a_1, $a_1b_1b_2a_2$..... выразятся, очевидно, разностями $p-p_1$, p_1-p_2..... Извѣстно, что, при равныхъ объемахъ, плотности всякаго вещества пропорціональны массамъ или, что все равно *), ихъ вѣсамъ, и потому можно составить

*) Вѣсъ каждаго тѣла уменьшается съ удаленіемъ отъ земной поверхности, но для простоты вывода онъ принятъ здѣсь постояннымъ; поправка за уменьшеніе вѣса введена въ окончательную формулу (158).

рядъ пропорцій:

$$\begin{aligned} \alpha : \beta &= (p - p_1) : (p_1 - p_2) \\ \beta : \gamma &= (p_1 - p_2) : (p_2 - p_3) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (a)$$

Съ другой стороны, по закону *Маріотта* (1620—1684), плотность газа при прочихъ равныхъ условіяхъ пропорціональна производимому на него давленію, т. е. въ данномъ случаѣ плотности отдѣльныхъ слоевъ воздуха пропорціональны вѣсамъ давящихъ на нихъ столбовъ, такъ что можно составить другой рядъ пропорцій:



Черт. 218.

$$\begin{aligned} \alpha : \beta &= p_1 : p_2 \\ \beta : \gamma &= p_2 : p_3 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (b)$$

Изъ равенства первыхъ отношеній пропорцій (a) и (b) получаемъ равенство вторыхъ, т. е.

$$\begin{aligned} (p - p_1) : (p_1 - p_2) &= p_1 : p_2 \\ (p_1 - p_2) : (p_2 - p_3) &= p_2 : p_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Откуда, составивъ произведенія крайнихъ и среднихъ членовъ, послѣ сокращеній получимъ:

$$\begin{aligned} p_1^2 &= p \cdot p_2 \\ p_2^2 &= p_1 \cdot p_3 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

или

$$\frac{p}{p_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2}{p_3} = \ldots. = \frac{p_{n-1}}{p_n} \qquad (c)$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ высоты отдѣльныхъ слоевъ надъ уровнемъ океана возрастаютъ въ ариѳметической прогрессіи ($aa_1 = a_1a_2 = a_2a_3 \ldots$), то рядъ равенствъ ($c$) показываетъ, что, съ увеличеніемъ высоты слоевъ въ ариѳметической прогрессіи, давленіе остающихся надъ ними столбовъ атмосферы уменьшается въ прогрессіи геометрической. Но давленіе атмосферы измѣряется высотою ртутнаго столба въ барометрѣ; поэтому, называя показанія барометра, соотвѣтствующія давленіямъ p, p_1, p_2.... черезъ B, B_1, B_2...., рядъ (c) можно замѣнить слѣдующимъ:

$$\frac{B}{B_1} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{B_2}{B_3} \ldots\ldots = \frac{B_{n-1}}{B_n}$$

Пусть знаменатель этой прогрессіи будетъ $\frac{1}{r}$, тогда:

$$B_1 = \frac{B}{r}$$

$$B_2 = \frac{B_1}{r} = \frac{B}{r^2}$$

$$B_3 = \frac{B_2}{r} = \frac{B}{r^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$B_n = \frac{B}{r^n} \qquad (d)$$

Положимъ, что число слоевъ въ столбѣ $abb_n a_n$ равно n, а высота каждаго слоя s, тогда высота столба $abb_n a_n$, которую обозначимъ черезъ h, очевидно будетъ:

$$h = s \,.\, n \qquad (e)$$

Но изъ равенства (d) имѣемъ:

$$r^n = \frac{B}{B_n}$$

или, послѣ логариѳмированія:

$$n \, lg \, r = lg \frac{B}{B_n}$$

и

$$n = \frac{1}{lg \, r} \,.\, lg \frac{B}{B_n}$$

Вставляя это въ (e), получимъ:

$$h = \frac{s}{lg \, r} \,.\, lg \frac{B}{B_n}$$

Обозначивъ, наконецъ, постоянный коэффиціентъ $\frac{s}{lg\,r}$ черезъ A, имѣемъ:

$$h = A \,.\, lg\,\frac{B}{B_n}$$

Если разсматривать двѣ точки, абсолютныя высоты которыхъ суть h и h_1, а показанія барометра на нихъ и на уровнѣ океана равны B, B_1 и B_0, то, согласно предъидущей формулѣ, получимъ:

$$h_1 = A \,.\, lg\,\frac{B_0}{B_1}$$

$$h = A \,.\, lg\,\frac{B_0}{B}$$

Отсюда разность высотъ двухъ разсматриваемыхъ точекъ выразится формулою:

$$h_1 - h = A \,.\, lg\,\frac{B}{B_1} \tag{157}$$

Эта формула выведена въ предположеніи, что температура, влажность и сила тяжести на обѣихъ точкахъ наблюденія одинаковы; на самомъ дѣлѣ физическія условія на нихъ различны, и потому сюда надо ввести поправочные множители. Многіе ученые занимались выводомъ этихъ множителей и опредѣленіемъ ихъ постоянныхъ, а равно коэффиціента A *); не останавливаясь на этихъ выводахъ, приведемъ полную *гипсометрическую формулу* въ томъ видѣ, какъ она дана хемницкимъ профессоромъ *Рюльманомъ* (Die barometrischen Höhenmessungen, Leip-

*) Коэффиціентъ A можетъ быть выведенъ двумя путями: 1) изъ наблюденій барометра въ двухъ точкахъ, высоты которыхъ извѣстны изъ точныхъ нивелировокъ, тогда, очевидно:

$$A = \frac{h_1 - h}{lg\,B - lg\,B_1}$$

и 2) изъ отношенія плотностей ртути и воздуха при извѣстныхъ давленіи и температурѣ. По опытамъ *Араго* и *Біо* это отношеніе, при давленіи 760 миллиметровъ и температурѣ 0°, равно 10 463, слѣдовательно, чтобы ртуть въ барометрѣ понизилась на 1 милл., надо подняться на высоту 10 463 милл. или приблизительно на 4.9 сажени; отсюда:

$$4.9 = A\,(lg\,760 - lg\,759) \qquad \text{и} \qquad A = \text{около } 8\,600 \text{ саж.}$$

zig, 1870):

$$h_1 - h = 18\,429.^m1\,(1 + 0.00262\cos 2\varphi)\,.\,\{1 + 0.00183\,(t + t_1)\}\,.$$

$$\left(1 + \frac{h + h_1}{a}\right)\cdot\left\{1 + 0.189\left(\frac{E}{B} + \frac{E_1}{B_1}\right)\right\}\cdot(lg\,B - lg\,B_1) \qquad \textbf{(158)}$$

гдѣ h и h_1—абсолютныя высоты нижней и верхней точекъ наблюденія въ метрахъ, φ—географическая широта *), a—большая полуось земного сфероида, t и t_1 — температуры воздуха въ градусахъ термометра Цельзіуса, B и B_1 — наблюденныя показанія барометровъ, приведенныя къ температурѣ 0°, и наконецъ E и E_1 — упругости паровъ въ атмосферѣ на обѣихъ точкахъ, опредѣляемыя гигрометрами или психрометрами.

Приведенія показаній ртутнаго барометра къ температурѣ 0° вычисляется очень просто по формулѣ:

$$\Delta B = -B\,.\,\frac{T}{5\,550} \qquad \textbf{(159)}$$

гдѣ ΔB—искомое приведеніе отсчитанной высоты барометра B, T — температура ртути, полученная по термометру *при барометрѣ*, а дробь $^1/_{5550}$—коэффиціентъ расширенія ртути, т. е. измѣненіе ея объема при измѣненіи температуры на 1° C. Впрочемъ, поправка за температуру берется обыкновенно изъ готовыхъ таблицъ, въ которыя введено и соотвѣтствующее расширеніе мѣдной шкалы барометра.

Для весьма точныхъ работъ слѣдовало бы вводить еще поправку за понижение ртутнаго столба отъ волосности; однако эта поправка, зависящая отъ внутренняго діаметра трубки и высоты мениска, не поддается точному вычисленію, и ею обыкновенно вовсе пренебрегаютъ.

Формула Рюльмана выведена для идеальнаго состоянія атмосферы, какого на самомъ дѣлѣ никогда не бываетъ. Достаточно вспомнить, что даже главный *температурный* поправочный членъ всегда ошибоченъ: среднее изъ показаній тер-

*) Въ отношеніи поправки за широту мѣста надо различать ртутные барометры и анероиды: показанія первыхъ зависятъ отъ широты, а показанія вторыхъ не зависятъ. На экваторѣ ртутный барометръ показываетъ больше, чѣмъ анероидъ, на полюсахъ наоборотъ.

мометровъ нижней и верхней точекъ наблюденія не есть средняя температура всѣхъ промежуточныхъ слоевъ воздуха. Другіе же поправочные члены, по сравненію съ температурнымъ, ничтожны, и для вычисленія обыкновенныхъ наблюденій путешественниковъ могутъ быть отброшены. Если принять среднія величины добавочныхъ множителей и перевести постоянный коэффиціентъ изъ метровъ въ сажени, то получится слѣдующая упрощенная гипсометрическая формула:

$$h_1 - h = 8656^c.8\,(1 + 0.00366\,t_n)\,.\,(lg\,B - lg\,B_1) \qquad \textbf{(160)}$$

гдѣ h и h_1—абсолютныя высоты нижней и верхней точекъ наблюденія въ саженяхъ, t_n — ариѳметическое среднее изъ температуръ воздуха въ градусахъ термометра Цельзіуса, а B и B_1—наблюденныя показанія барометровъ, приведенныя къ 0°.

Числовой примѣръ. Въ 1831 году для опредѣленія высоты горы Парингъ въ Трансильванскихъ Альпахъ произведены наблюденія (Записки В. Т. Депо, Ч. XXI, 1860):

Сел. Карбунешти (нижн. точка)	Гора Парингъ (верхн. точка)
$B = 659.2$ пар. полулиніи	$B_1 = 499.9$ пар. полулиніи
$T = t = 20^\circ.7$ $R = 25^\circ.9$ C	$T_1 = t_1 = 7^\circ.3$ $R = 9^\circ.1$ C

Приведенія къ 0° по формулѣ (159) составляютъ — 3.1 и — 0.8 пар. полулиніи. Подставляя въ формулу (160), имѣемъ:

$$h_1 - h = 8656.8\,(1 + 0.00366 \times 17.5)\,.\,(lg\,656.1 - lg\,499.1) = 1094.1 \text{ саж.}$$

а такъ какъ абсолютная высота сел. Карбунешти, т. е. $h = 99.4$ саж., то абсолютная высота горы Парингъ выходитъ 1193.5 сажени или 2546.4 метра.

Для сокращенія числовыхъ выкладокъ при обработкѣ барометрическихъ наблюденій, составлены вспомогательныя таблицы. На русскомъ языкѣ пользуются особенною извѣстностью изданія Императорскаго Русскаго Географическаго Общества: *Шарнгорстъ*—Таблицы для вычисленія высотъ изъ барометрическихъ наблюденій, 1887, *Срезневскій* — Инструкція для опредѣленія высотъ помощью барометрическихъ наблюденій, 1891 и *Пѣвцовъ*—О барометрическомъ нивелированіи, 1895. У Шарнгорста высоты даются въ футахъ, а у Срезневскаго и Пѣвцова — въ метрахъ.

Формула (160) требуетъ логариѳмированія; для вычисленія малыхъ разностей высотъ ее можно преобразовать въ болѣе простую, не требующую обязательнаго логариѳмированія. Именно:

$$lg\,B - lg\,B_1 = lg\,\frac{B}{B_1} = lg\,\frac{2B}{B+B_1} - lg\,\frac{2B_1}{B+B_1} =$$

$$= lg\left(1 + \frac{B-B_1}{B+B_1}\right) - lg\left(1 - \frac{B-B_1}{B+B_1}\right)$$

Разложивъ послѣдніе члены въ ряды по формулѣ:

$$lg\,(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right)$$

и отбрасывая вторыя и высшія степени дроби $\frac{B-B_1}{B+B_1}$, получимъ:

$$lg\,B - lg\,B_1 = 2M \cdot \frac{B-B_1}{B+B_1}$$

Подставивъ это выраженіе въ формулу (160) и умноживъ ея постоянный коэффиціентъ на $2M = 0.868\,589$, получимъ наконецъ:

$$h_1 - h = 7519^c\,(1 + 0.00366 t_n)\,\frac{B-B_1}{B+B_1} \qquad \textbf{(161)}$$

Эта формула, значеніе буквъ которой то же, что и въ формулѣ (160), предложена впервые шотландскимъ физикомъ *Лесли* (1766—1832). Примѣнивъ ее къ предъидущему числовому примѣру, находимъ:

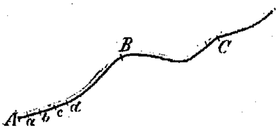
$$h_1 - h = 7519^c\,(1 + 0.00366 \times 17.5)\,\frac{656.1 - 499.1}{656.1 + 499.1} = 1087 \text{ саж.}$$

т. е. величину, довольно близкую къ вычисленной по формулѣ (160). Чѣмъ меньше разность высотъ, тѣмъ ближе результаты, получаемые по формуламъ (160) и (161).

Легко замѣтить, что при пользованіи предъидущими формулами совершенно безразлично, въ какихъ мѣрахъ даны высоты барометра, но необходимо обращать вниманіе на родъ термометровъ; температурный коэффиціентъ 0.00366 соотвѣтствуетъ шкалѣ Цельзіуса, поэтому если наблюдатель имѣетъ другіе термометры, то ихъ показанія должно переводить въ градусы термометра Цельзіуса.

165. Барометрическое нивелированіе. Барометрическія наблюденія, имѣющія цѣлью опредѣленіе высотъ точекъ, бываютъ: 1) *соотвѣтствующія*, когда производятъ наблюденія на двухъ точкахъ одновременно или почти одновременно и затѣмъ выводится относительное превышеніе или разность высотъ обѣихъ точекъ, и 2) *абсолютныя*, когда наблюдаютъ лишь на одной точкѣ и вычисляютъ затѣмъ прямо высоту точки надъ уровнемъ океана.

1) Пусть требуется опредѣлить разность высотъ двухъ точекъ A и B (черт. 219) и положимъ, что работаютъ два наблюдателя. Оба наблюдателя производятъ сперва отсчеты своихъ барометровъ, термометровъ и часовъ на точкѣ A; затѣмъ одинъ изъ нихъ отправляется на точку B и, произведя тамъ одно или нѣсколько наблюденій, въ теченіи извѣстнаго времени, возвращается на точку A и снова производитъ здѣсь отсчеты своихъ приборовъ.



Черт. 219.

Пока первый наблюдатель находится въ отсутствіи, второй, остающійся на точкѣ A, производитъ систематическіе отсчеты барометра и термометра черезъ нѣкоторые промежутки времени, напримѣръ, черезъ каждые полчаса. При благопріятныхъ обстоятельствахъ отсчеты наблюдателя, остающагося на мѣстѣ, мѣняются незначительно и въ правильной постепенности, такъ что простымъ интерполированіемъ легко вычислить показанія, соотвѣтствующія временамъ отсчетовъ наблюдателя въ точкѣ B; получатся какъ бы одновременныя наблюденія на обѣихъ точкахъ. Результаты подставляются затѣмъ въ гипсометрическую формулу.

Положимъ теперь, что требуется опредѣлить относительныя высоты нѣсколькихъ точекъ. Это особенно часто случается при изысканіи путей сообщенія и при нивелировкѣ горныхъ дорогъ. Въ этомъ случаѣ предполагаемый путь разбиваютъ на отдѣльные участки такой длины, чтобы каждый участокъ можно было пройти или проѣхать въ теченіи одного дня; пусть эти намѣченныя точки ночлеговъ будутъ B, C..... (черт. 219), отстоящія другъ отъ друга не далѣе 30—50 верстъ. Въ начальной точкѣ A оба наблюдателя производятъ отсчеты своихъ приборовъ, затѣмъ первый наблюдатель отправляется въ дорогу и на всѣхъ достойныхъ опредѣленія точкахъ a, b, c...., напримѣръ, на перевалахъ, въ долинахъ, у рѣкъ и пр., останавливается и производитъ отсчеты своихъ барометра, термометра и часовъ. Пріѣхавъ на ночь въ точку B, первый наблюдатель останавливается здѣсь на два дня, причемъ систематически отсчитываетъ приборы черезъ извѣстные промежутки времени, напр. каждые полчаса. Второй наблюдатель, оставаясь цѣлыя сутки въ точкѣ A, отсчитываетъ и записываетъ показанія своихъ приборовъ каждые полчаса и затѣмъ, на слѣдующій день, отправляется по тому же сообщенному ему маршруту въ точку B, производя наблюденія на тѣхъ же точкахъ a, b, c..... Пріѣхавъ въ B, второй наблюдатель остается здѣсь на ночлегъ, свѣряетъ свои приборы съ приборами перваго наблюдателя и на слѣдующее утро ѣдетъ дальше въ точку C, производя дорогою наблюденія на новыхъ промежуточныхъ точкахъ. На точкѣ C онъ останавливается на два дня, а первый наблюдатель такимъ же образомъ переѣзжаетъ изъ B въ D съ остановками въ C и на всѣхъ промежуточныхъ точкахъ для производства отсчетовъ своихъ приборовъ и т. д. Изъ такихъ наблюденій на каждомъ участкѣ отъ A до B, отъ B до C и т. д. получается все, что нужно для двукратнаго вывода разностей высотъ какъ крайнихъ, такъ и всѣхъ промежуточныхъ точекъ. Дѣйствительно, для каждаго наблюденія въ точкахъ a, b, c..... перваго наблюдателя легко вычислить по интерполяціи соотвѣтствующее наблюденіе въ точкѣ A второго наблюдателя, а каждому наблюденію въ тѣхъ же точкахъ второго наблюдателя найдется соотвѣтствующее наблюденіе въ B перваго наблюдателя. При такомъ порядкѣ исключаются и личныя ошибки наблюдателей. Экспедицію очень полезно закончить въ исходной точкѣ A, пріѣхавъ туда тою же или другою дорогою; черезъ это получается новая независимая повѣрка по смыканію полигона.

Еще лучше работать втроемъ. Если, напримѣръ, во время переѣзда одного наблюдателя изъ A въ B въ обѣихъ этихъ точкахъ находятся два другихъ наблюдателя, то изъ ихъ наблюденій можно легче и точнѣе судить о постоянствѣ или измѣненіи давленія, температуры и пр.

При производствѣ соотвѣтствующихъ наблюденій надо выбирать по возможности близкія точки. Если разстояніе данныхъ точекъ болѣе 25 верстъ, то необходимо вводить одну или нѣсколько промежуточныхъ точекъ, особенно если путь представляетъ значительныя неровности. Конечно, если бы показанія барометра зависѣли только отъ высоты, то горизонтальное разстояніе не имѣло бы значенія; на самомъ же дѣлѣ всѣмъ извѣстно, что показанія барометра непрерывно измѣняются даже на одномъ мѣстѣ. При нормальныхъ условіяхъ погоды эти перемѣны происходятъ довольно медленно и на значительномъ пространствѣ почти однообразно, поэтому въ наблюденіяхъ двухъ близкихъ точекъ онѣ исключаются. Если же точки очень удалены, и притомъ между ними лежатъ горы, то перемѣна давленія атмосферы на одной обыкновенно не сопровождается соотвѣтствующею перемѣною на другой, и вычисленныя высоты оказываются невѣрными.

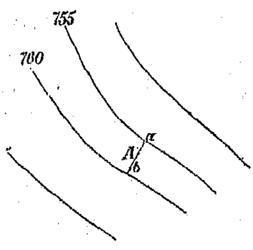
Вообще необходимо помнить, что гипсометрическая формула выведена въ предположеніи, что обѣ точки находятся на одной отвѣсной линіи, и что воздушные слои расположены въ нѣкоторой правильной послѣдовательности, т. е. въ предположеніи условій, которыхъ въ природѣ никогда не бываетъ. Напримѣръ, температура считается убывающею снизу вверхъ, а между тѣмъ въ Большомъ С.-Бернарѣ, селеніи, лежащемъ на 2 версты выше Женевы, при юго-западныхъ вѣтрахъ неоднократно наблюдалась температура болѣе высокая, чѣмъ въ Женевѣ; влажность тоже считается убывающею снизу вверхъ, тогда какъ среди облака влажность, конечно, больше, чѣмъ у поверхности земли. Поэтому всѣ обстоятельства, нарушающія равновѣсіе атмосферы, какъ-то восходящіе и нисходящіе потоки воздуха, вѣтры, бури и т. п. вліяютъ на точность результатовъ барометрическаго нивелированія. Ненадежность выводовъ сказывается особенно рѣзко, если разность высотъ двухъ точекъ невелика, а горизонтальное разстояніе ихъ значительно, если между ними расположены горы, и, вообще, если рельефъ мѣстности весьма разнообразенъ. При благопріятныхъ обстоятельствахъ ошибка въ опредѣленіи высотъ изъ барометрическихъ наблюденій не превосходитъ 2—3 саж.; при неблагопріятныхъ она возрастаетъ до 20 и болѣе саженей. Во всякомъ случаѣ не слѣдуетъ вовсе производить наблюденій въ бурю, при сильномъ вѣтрѣ, во время грозы, дождя и снѣга, а также, когда быстрое паденіе барометра на начальной точкѣ предвѣщаетъ скорое наступленіе рѣзкихъ перемѣнъ въ атмосферѣ.

Другое обстоятельство, на которое слѣдуетъ обращать вниманіе при производствѣ соотвѣтствующихъ наблюденій, это частое сравниваніе приборовъ обоихъ наблюдателей; выше было упомянуто, что оно дѣлается при каждой встрѣчѣ наблюдателей, причемъ приборы должны быть помѣщены рядомъ, въ одинаковыхъ условіяхъ. Согласіе разностей отсчетовъ даетъ отличную повѣрку ихъ постоянства; къ сожалѣнію не только анероиды, но и ртутные барометры обнаруживаютъ иногда совершенно неожиданныя перемѣны показаній. Если каждый наблюдатель имѣетъ только по одному барометру, то до производства тщательныхъ изслѣдованій или сравненій съ нормальнымъ трудно открыть, чей приборъ поврежденъ; поэтому нельзя не посовѣтовать каждому наблюдателю имѣть нѣсколько барометровъ и при обнаруженіи разногласій испорченный приборъ вовсе не отсчитывать.

Соотвѣтствующія наблюденія могутъ быть произведены и однимъ наблюдателемъ, но тогда разстояніе между послѣдовательными точками должно быть какъ можно меньше. Сперва наблюденія производятся на одной точкѣ (A), затѣмъ наблюдатель переѣзжаетъ на другую (B), производитъ тамъ рядъ отсчетовъ и возвращается обратно въ A, гдѣ снова дѣлаетъ наблюденія. Среднее изъ отсчетовъ приборовъ на точкѣ A до выѣзда и послѣ возвращенія изъ B, если отсутствіе продолжалось не болѣе нѣсколькихъ часовъ, можно съ извѣстною вѣроятностью считать тѣмъ, которое было на точкѣ A во время отсчитыванія приборовъ на точкѣ B. Еще, конечно, лучше, если наблюдатель на время отсутствія изъ точки A установитъ тамъ барографъ.

2) Выводъ абсолютныхъ высотъ производится въ тѣхъ случаяхъ, когда наблюдатель одинъ и предпринимаетъ такую экспедицію, которая не позволяетъ возвращаться назадъ, на прежде посѣщенныя точки. Чтобы по записямъ времени наблюденія и показаній барометра и термометра получить абсолютную высоту точки, необходимо знать давленіе и температуру въ тотъ же моментъ для проекціи этой точки на уровень океана *). Соотвѣтствующія величины получаются вычисленіями изъ наблюденій, сдѣланныхъ около этого времени на окружающихъ метеорологическихъ обсерваторіяхъ и приведенныхъ къ уровню океана. Для этого на географическую карту наносятъ окружающія метеорологическія обсерваторіи и точку наблюденія и затѣмъ проводятъ на ней изобары и изотермы подобно тому, какъ съемщики проводятъ изогипсы по имѣющимся на планѣ высотамъ. Тогда не трудно узнать показанія барометра и термометра въ точкѣ, представляющей проекцію точки наблюденія на уровень океана.

Пусть точка наблюденія A (черт. 220) оказалась между изобарами 755 и 760; проведя черезъ точку A линію ab, приблизительно перпендикулярную къ названнымъ изобарамъ, составляютъ отношеніе Aa къ ba; если оно оказалось, напримѣръ, равнымъ $^2/_5$, то показаніе барометра въ точкѣ A на уровнѣ океана будетъ 757 м. Получивъ такимъ же образомъ соотвѣтствующее показаніе термометра, дѣйствительные отсчеты инструментовъ на точкѣ наблюденія и опредѣленные вышеуказаннымъ способомъ для воображаемой точки A на уровнѣ океана вставляютъ въ гипсометрическую формулу и обрабатываютъ ихъ, какъ бы соотвѣтствующія наблюденія.



Черт. 220.

Точность вывода высотъ по абсолютнымъ наблюденіямъ за-

*) Извѣстно, что и на уровнѣ океана показанія барометра (и термометра) постоянно мѣняются. Колебанія бываютъ весьма значительны, въ предѣлахъ отъ 700 до 800 миллиметровъ.

висить отъ близости и числа окружающихъ метеорологическихъ обсерваторій. Въ предѣлахъ Европейской Россіи выводъ можетъ быть сдѣланъ довольно удовлетворительно, такъ какъ такихъ обсерваторій здѣсь уже много, и Главная Физическая Обсерваторія ежедневно два раза издаетъ *синоптическія карты*, на которыхъ проведены изобары для 7 ч. утра и 9 ч. вечера. Въ Азіатской же Россіи метеорологическихъ обсерваторій очень мало, и для проведенія изобаръ нерѣдко приходится пользоваться наблюденіями, сдѣланными на обсерваторіяхъ Китая и Индіи. Если точка наблюденія лежитъ за сотни верстъ отъ ближайшихъ метеорологическихъ обсерваторій, то при проведеніи изобаръ является всегда извѣстный произволъ и, слѣдовательно, нельзя ожидать и точности выводовъ. Чтобы получить надежные результаты для высотъ такихъ удаленныхъ отъ образованныхъ центровъ точекъ, всего лучше производить на нихъ ряды наблюденій въ теченіи довольно продолжительнаго времени, напримѣръ, въ теченіи цѣлаго года или даже многихъ лѣтъ.

167. Производство наблюденій. Не только ртутные барометры, но и анероиды представляютъ весьма нѣжные инструменты, требующіе бережнаго обращенія. При перевозкѣ ихъ надо тщательно оберегать отъ толчковъ и рѣзкихъ сотрясеній, а равно стараться защищать (даже когда они уложены въ чехлы) отъ дѣйствія прямыхъ солнечныхъ лучей кускомъ холста или зонтикомъ. Всего лучше, если барометры носятся самимъ наблюдателемъ на ремнѣ черезъ плечо. Особенно должно избѣгать перевозить барометры верхомъ рысью.

Для производства наблюденій барометры (и термометры) располагаются въ открытыхъ мѣстахъ, но непремѣнно въ тѣни и вдали отъ сильно нагрѣваемыхъ предметовъ, напримѣръ, скалъ и каменныхъ построекъ. Эти предметы даже ночью способны испускать лучистую теплоту, извращающую показанія приборовъ. Хорошо располагать барометры на складныхъ треногахъ не ниже 3-хъ фут. отъ поверхности почвы. Ртутные барометры должно вѣшать отвѣсно, а анероиды класть горизонтально. Отсчеты надо начинать съ термометра, пока теплота наблюдателя не успѣла измѣнить его показанія.

Разногласія показаній ртутныхъ барометровъ происходятъ отъ невѣрности шкалъ, разности діаметровъ трубокъ и неодинаковаго совершенства пустоты. Послѣдняя причина дѣйствуетъ всего больше; отъ первыхъ двухъ разногласія не превосходятъ сотыхъ долей миллиметра.

Въ предъидущемъ § 166 было уже объяснено, почему не слѣдуетъ наблюдать въ бурную погоду, при сильномъ вѣтрѣ, дождѣ, снѣгѣ и грозѣ, а также и передъ наступленіемъ грозы. Показанія барометра даже при нормальныхъ условіяхъ погоды не отличаются постоянствомъ: съ утра давленіе постепенно увеличивается и около 8 часовъ достигаетъ наибольшей величины; затѣмъ давленіе непрерывно уменьшается, достигая около 4-хъ часовъ пополудни наименьшей величины, послѣ чего снова увеличивается и ночью имѣетъ другіе maximum и minimum — около 10 час. веч. и 2 час. ночи, однако значительно меньшіе, чѣмъ дневные. Поэтому при производствѣ *абсолютныхъ* наблюденій надо выбирать тѣ часы дня, когда показанія барометра близки къ среднему суточному, т. е. около 7 ч. утра и 9 ч. вечера; изъ наблюденій между этими часами получаются слишкомъ большія высоты, а внѣ ихъ, наоборотъ, слишкомъ малыя. Зимою результаты барометрическихъ нивелировокъ хуже, чѣмъ лѣтомъ. Часы, наиболѣе благопріятные для производства абсолютныхъ барометрическихъ наблюденій, мѣняются по временамъ года; по изслѣдованіямъ *Рюльмана* эти часы оказываются:

Въ	январѣ	полдень.					
»	февралѣ	10	ч.	утра	и 4	ч.	пополудни
»	мартѣ	8	»	»	» 6	»	»
»	апрѣлѣ и маѣ . . .	7	»	»	» 7	»	»
»	іюнѣ и іюлѣ . . .	6	»	»	» 9	»	»
»	августѣ	7	»	»	» 8	»	»
»	сентябрѣ	8	»	»	» 6	»	»
»	октябрѣ	10	»	»	» 4	»	»
»	ноябрѣ	11	»	»	» 2	»	»
»	декабрѣ	около 1 часа дня.					

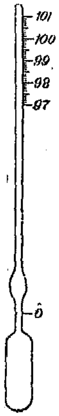
Однако эти часы наблюденій годны не для всѣхъ мѣстъ. Ртутный столбъ барометра и коробочка анероида не сразу принимаютъ положенія, соотвѣтствующія давленію атмосферы; они всегда немного отстаютъ вслѣдствіе тренія и инерціи. Для полученія вѣрныхъ показаній надо передъ отсчетами ртутнаго барометра слегка наклонить трубку, чтобы устранить прилипаніе, и снова точно вывѣрить по отвѣсу; передъ отсчетомъ же анероида надо слегка постучать пальцемъ по его крышкѣ.

При производствѣ наблюденій въ малоизслѣдованныхъ странахъ надо стараться вести работу сомкнутыми переѣздами, чтобы, возвращаясь на прежнія точки, имѣть данныя для повѣрки наблюденій и вычисленій. Если это невозможно, то, передвигаясь, напримѣръ, вдоль рѣчной долины, кромѣ наблюденій на избранныхъ точкахъ по дорогѣ и на вершинахъ горъ, надо время отъ времени спускаться къ самой рѣкѣ и наблюдать барометръ близъ уровня воды; такимъ путемъ тоже получится повѣрка, потому что высоты точекъ по рѣкѣ должны непрерывно повышаться или понижаться.

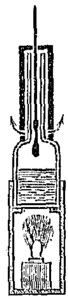
Наконецъ, передъ выѣздомъ въ экспедицію и послѣ возвращенія изъ нея необходимо свѣрять свои инструменты съ нормальными приборами постоянныхъ обсерваторій. Понятно, что гдѣ только это возможно, надо для той же цѣли заѣзжать и на попутныя метеорологическія обсерваторіи, а также производить своими инструментами наблюденія на точкахъ, высоты которыхъ уже опредѣлены прежними наблюдателями.

Ошибку отсчета барометра можно оцѣнить вообще въ 0.2 миллиметра; ошибка же высоты, вычисленной по гипсометрической формулѣ зависитъ отъ абсолютной высоты точки наблюденія: при малыхъ высотахъ ошибкѣ 0.2 миллиметра въ высотѣ ртутнаго столба соотвѣтствуетъ всего 1 сажень въ вычисленной высотѣ точки наблюденія; на большихъ же высотахъ, напримѣръ, на высотѣ 5 верстъ, та же ошибка отсчета соотвѣтствуетъ уже 2 саж. Дѣйствительныя ошибки превосходятъ упомянутыя обыкновенно разъ въ десять. При большихъ высотахъ особенно ненадежные результаты получаются анероидами. Ими вообще не слѣдуетъ пользоваться, когда абсолютныя высоты точекъ наблюденія превосходятъ 2 версты.

168. Гипсотермометръ. *Гипсотермометрами* называются точные термометры съ подраздѣленіемъ на 0.°1 и даже мельче, служащіе для опредѣленія высотъ по наблюденію температуры кипѣнія воды. Главное ихъ отличіе отъ обыкновенныхъ термометровъ заключается въ томъ, что по нимъ можно отсчитывать только высшія температуры и температуры около точки замерзанія (черт. 221); въ промежуткѣ же между соотвѣтствующими дѣленіями имѣется расширеніе трубки. Такимъ образомъ при малой длинѣ всего прибора дѣленія шкалы очень крупны, и потому температуру кипѣнія можно отсчитывать весьма точно; вмѣстѣ съ тѣмъ нижняя часть шкалы, съ дѣленіями около 0°, позволяетъ повѣрять постоянную точку прибора — температуру таянія льда. Съ этою же цѣлью приготовляютъ иногда наборъ изъ нѣсколькихъ термометровъ, изъ которыхъ по одному можно отсчитывать лишь температуры отъ 70 до 80°, по другому отъ 80 до 90°, а по третьему — высшія. Такіе термометры имѣютъ въ верхнихъ частяхъ трубокъ другія расширенія для предохраненія отъ разрыва при болѣе высокихъ температурахъ.



Черт. 221.


Черт. 222.

Для кипяченія воды служитъ небольшой металлическій сосудъ (черт. 222) съ двойною трубкою наверху; внутрь этой трубки вставляется термометръ съ такимъ разсчетомъ, чтобы шарикъ его не погружался въ воду, а находился лишь въ ея парахъ, и чтобы по части трубки, находящейся снаружи, можно было произвести отсчетъ. Подъ сосудъ ставится спиртовая лампочка. Весь приборъ съ принадлежащими къ нему термометрами укладывается въ небольшой кожаный чехолъ, носимый на ремнѣ черезъ плечо.

Температура кипѣнія воды зависитъ отъ примѣсей, всегда растворенныхъ въ водѣ рѣкъ и колодцевъ; поэтому наблюдатель, кромѣ запаса спирта для лампочки, долженъ имѣть съ собою также запасъ дождевой или дистиллированной воды. Воду надо кипятить передъ отсчитываніемъ температуры не менѣе 10 минутъ и производить отсчетъ не однажды, а 2—3 раза.

Даже хорошіе термометры мѣняютъ свои показанія съ теченіемъ времени; поэтому передъ поѣздкой въ экспедицію и послѣ возвращенія изъ нея необходимо производить сравненія дорожныхъ термометровъ съ нормальными термометрами метеорологическихъ обсерваторій или самостоятельно опредѣлять точку замерзанія.

Лучшими термометрами считаются нынѣ термометры французскаго мастера *Бодена*, приготовляемые изъ такъ называемаго іенскаго стекла (завода Цейсса въ Іенѣ); у нихъ вдоль трубки впущена красная нитка.

Постепенное пониженіе температуры кипѣнія воды съ уменьшеніемъ давленія видно изъ нижеслѣдующей таблицы, въ которой T означаетъ температуру въ градусахъ Цельзіуса, а B—соотвѣтствующее давленіе въ миллиметрахъ.

T	B	T	B	T	B	T	B
85.0	433.19	87.0	468.32	89.0	505.81	91.0	545.77
85.1	434.90	87.1	470.14	89.1	507.74	91.1	547.83
85.2	436.60	87.2	471.96	89.2	509.69	91.2	549.90
85.3	438.32	87.3	473.79	89.3	511.64	91.3	551.98
85.4	440.04	87.4	475.63	89.4	513.60	91.4	554.07
85.5	441.76	87.5	477.47	89.5	515.56	91.5	556.16
85.6	443.49	87.6	479.32	89.6	517.53	91.6	558.26
85.7	445.23	87.7	481.17	89.7	519.50	91.7	560.36
85.8	446.97	87.8	483.03	89.8	521.48	91.8	562.47
85.9	448.72	87.9	484.89	89.9	523.47	91.9	564.59
86.0	450.47	88.0	486.76	90.0	525.47	92.0	566.72
86.1	452.23	88.1	488.64	90.1	527.47	92.1	568.85
86.2	454.00	88.2	490.52	90.2	529.48	92.2	570.98
86.3	455.77	88.3	492.41	90.3	531.49	92.3	573.13
86.4	457.54	88.4	494.31	90.4	533.51	92.4	575.28
86.5	459.32	88.5	496.21	90.5	535.54	92.5	577.44
86.6	461.11	88.6	498.12	90.6	537.57	92.6	579.61
86.7	462.91	88.7	500.03	90.7	539.61	92.7	581.78
86.8	464.71	88.8	501.95	90.8	541.65	92.8	583.96
86.9	466.51	88.9	503.87	90.9	543.71	92.9	586.14

T	B	T	B	T	B	T	B
93.0	588.33	95.0	633.66	97.0	681.88	99.0	733.16
93.1	590.53	95.1	636.00	97.1	684.37	99.1	735.81
93.2	592.74	95.2	638.35	97.2	686.87	99.2	738.46
93.3	594.95	95.3	640.70	97.3	689.37	99.3	741.13
93.4	597.17	95.4	643.06	97.4	691.89	99.4	743.80
93.5	599.40	95.5	645.43	97.5	694.41	99.5	746.48
93.6	601.64	95.6	647.81	97.6	696.93	99.6	749.17
93.7	603.88	95.7	650.20	97.7	699.47	99.7	751.86
93.8	606.13	95.8	652.59	97.8	702.02	99.8	754.57
93.9	608.38	95.9	654.99	97.9	704.57	99.9	757.28
94.0	610.64	96.0	657.40	98.0	707.13	100.0	760.00
94.1	612.91	96.1	659.81	98.1	709.69	100.1	762.73
94.2	615.19	96.2	662.23	98.2	712.27	100.2	765.47
94.3	617.47	96.3	664.66	98.3	714.85	100.3	768.21
94.4	619.76	96.4	667.10	98.4	717.44	100.4	770.97
94.5	622.06	96.5	669.54	98.5	720.04	100.5	773.73
94.6	624.37	96.6	671.99	98.6	722.65	100.6	776.50
94.7	626.68	96.7	674.45	98.7	725.27	100.7	779.28
94.8	629.00	96.8	676.92	98.8	727.89	100.8	782.07
94.9	631.32	96.9	679.40	98.9	730.52	100.9	784.86

По этой таблицѣ легко перевести наблюденную температуру кипѣнія въ соотвѣтствующее давленіе, которое вставляется затѣмъ въ гипсометрическую формулу.

Числовой примѣръ. Горный инженеръ *Богдановичъ* для опредѣленія высоты перевала Тогрекынъ въ Русскомъ Хребтѣ (отдѣляющемъ западную часть пустыни Гоби отъ нагорнаго Тибета) наблюдалъ тамъ въ 1890 году температуру кипѣнія воды и получилъ $T = 87^\circ.85\ C$. Температура наружнаго воздуха была $t = 11^\circ.5\,C$. По таблицѣ находимъ, что наблюденной температурѣ кипѣнія соотвѣтствуетъ давленіе $B_1 = 483.96$ миллиметра. Отсюда по формулѣ (160), въ которой полагаемъ $B = 760$ и $t_n = \frac{0 + 11.5}{2} = 5^\circ.75$, получаемъ:

$$H = 1732.4 \text{ сажени.}$$

Гипсотермометры очень удобны для путешествія, потому что эти приборы гораздо легче для перевозки, чѣмъ ртутные барометры. Ихъ возятъ съ собою и для опредѣленія поправокъ анероидовъ, которые, какъ было замѣчено выше, мѣняютъ иногда свои показанія скачками. Однако по сравненію со ртутными барометрами гипсотермометры даютъ менѣе точные результаты. Дѣйствительно, 0°.1 шкалы термометра соотвѣтствуетъ перемѣнѣ высоты ртутнаго столба почти на 3 миллиметра, и, слѣдовательно, чтобы получать давленіе съ точностью до 0.1 миллиметра, было бы необходимо отсчитывать температуру кипѣнія воды съ точностью до $\frac{1}{300}^\circ$, что въ настоящее время невозможно. Ошибка въ температурѣ кипѣнія воды въ 0°.1 соотвѣтствуетъ ошибкѣ въ вычисленіи высоты около 14 саж. на уровнѣ океана, а на большихъ высотахъ она' конечно, еще значительнѣе.

На случай потерь возятъ съ собою не одинъ, а нѣсколько гипсотермометровъ; понятно, что кромѣ нихъ наблюдатель долженъ имѣть и обыкновенные вывѣренные термометры для измѣренія температуры воздуха.

XIV

Съемочные планшеты.

169. Системы планшетовъ. Точныя топографическія съемки на большихъ пространствахъ возможны лишь тогда, когда основаніемъ ихъ служатъ геодезическія точки, полученныя вычисленіемъ изъ тріангуляцій и нивелиръ-теодолитныхъ рядовъ. Эти точки наносятся на бумагу по своимъ географическимъ координатамъ и служатъ исходными данными для составленія геометрической сѣти и съемки подробностей.

Все предполагаемое къ съемкѣ пространство предварительно разбивается на участки, снимаемые отдѣльными производителями работъ и сводимые вмѣстѣ лишь впослѣдствіи, при составленіи общихъ картъ. Въ старину какъ заграницею, такъ и въ Россіи, съемочные участки представляли правильные квадраты, но вычисленіе прямоугольныхъ линейныхъ координатъ геодезическихъ точекъ для такихъ квадратовъ непосредственно изъ тріангуляцій представляло совершенно излишнюю работу, а сведеніе отдѣльныхъ участковъ въ общую карту сопряжено было съ извѣстными практическими затрудненіями; поэтому въ настоящее время каждый планшетъ мензульной съемки представляетъ равнобочную трапецію, ограниченную дугами меридіановъ и параллелей; рамки планшетовъ выбираются обыкновенно черезъ цѣлое число минутъ, въ зависимости отъ масштаба и географической широты снимаемаго пространства. Такъ, въ сѣверной полосѣ Европейской Россіи для съемокъ полуверстового масштаба меридіанныя рамки берутся черезъ $12'$, а рамки по параллелямъ черезъ $6'$, что составляетъ трапеціи, очень близкія къ квадратамъ, имѣющимъ около 20 дюймовъ въ сторонѣ; въ средней Россіи рамки берутся черезъ 9′ по долготѣ и 5′ по широтѣ, что составляетъ трапеціи, близкія къ квадратамъ около 17 дюймовъ въ сторонѣ и т. д. Такой способъ разбивки планшетовъ, предложенный впервые прусскимъ геодезистомъ *Мюфлингомъ*, принятъ въ Россіи въ 1848 г. (см. Записки В. Т. Депо, Часть XVII, стр. 39—48) и имѣетъ то преимущество, что геодезическія точки на такіе планшеты наносятся непосредственно по своимъ географическимъ координатамъ, вычисляемымъ для всѣхъ точекъ тріангуляцій и закладныхъ точекъ нивелиръ-теодолитныхъ рядовъ; вмѣстѣ съ тѣмъ этотъ способъ позволяетъ весьма легко и удобно сводить отдѣльные планшеты въ общую карту или составлять потомъ карты въ любомъ масштабѣ и въ любой проекціи.

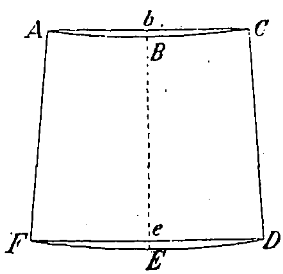
На пространствѣ каждаго отдѣльнаго съемочнаго планшета дуги меридіановъ и параллелей всегда можно считать прямыми линіями, такъ какъ уклоненія этихъ дугъ отъ прямыхъ меньше, чѣмъ точность графическихъ построеній и деформація самой бумаги. Дѣйствительно, если развернуть на плоскость коническую поверхность, касающуюся къ параллели земного сфероида подъ широтою φ, то радіусъ ρ такой параллели будетъ (см. форм. 198):

$$\rho = p \,.\, cotg\, \varphi$$

гдѣ p—длина нормали подъ широтою φ. Уголъ же между производящими конуса, соотвѣтствующими меридіанамъ на сфероидѣ, будетъ ничто иное, какъ такъ называемое сближеніе меридіановъ (см. стр. 521), и можетъ быть вычисленъ по формулѣ

$$\delta = \lambda \,.\, sin\, \varphi$$

гдѣ λ—разность долготъ рамокъ планшета. Замѣна сферической трапеціи $ABCDEF$ (черт. 223) прямолинейною $ACDF$ равносильна пренебреженію стрѣлками bB и eE и разностью въ длинахъ дугъ ABC, FED и прямыхъ AC, FD.



Черт. 223.

Называя длину стрѣлки bB черезъ h, а разность длины дуги ABC и прямой AC, соотвѣтствующей параллели, черезъ Δ, легко найти приближенныя выраженія:

$$h = \frac{1}{8\varkappa^2} . p . cotg\ \varphi . \delta''^2$$

$$\Delta = \frac{8}{3\,a} . h^2 \text{ (см. § 84, стр. 260)}$$

$$\text{гдѣ } \delta = \lambda . Sin\,\varphi, \quad a = \frac{\lambda}{\varkappa} . p . cos\,\varphi, \quad \text{а} \quad \varkappa = 206264.8$$

Здѣсь по прежнему φ—широта разсматриваемой параллели, λ—разность долготъ рамокъ планшета и p—длина нормали сфероида подъ широтою φ.

Напримѣръ, для широты $\varphi = 60^\circ$ и $\lambda = 12'$, величины h и Δ выходятъ соотвѣтственно меньше 2 и 0.002 сажени; при масштабѣ 250 саженей въ дюймѣ онѣ составляютъ на бумагѣ лишь 0.008 и 0.000008 дюйма, т. е. величины, которыми можно пренебречь при графическихъ построеніяхъ.

Подобнымъ же образомъ не трудно доказать, что и площадь прямолинейной трапеціи отличается отъ поверхности соотвѣтствующей трапеціи на сфероидѣ на величины, исчезающія по сравненію съ точностью графическихъ построеній и деформаціею бумаги, (вычисленіе поверхности сфероидическихъ трапецій производится по формулѣ для P_2, см. стр. 80).

170. Вычисленіе рамокъ. Рамки съемочныхъ трапецій, ограниченныхъ дугами меридіановъ и параллелей, которыя, какъ объяснено выше, можно считать прямолинейными, вычисляются весьма просто, когда извѣстны величины [1] и [2] (см. § 135) для разныхъ географическихъ широтъ. Пусть размѣры планшета суть θ'' по широтѣ и λ'' по долготѣ; припоминая, что [1] и [2] суть величины $\frac{\varkappa}{\rho}$ и $\frac{\varkappa}{p}$, выраженныя въ саженяхъ, а рамки надо знать въ дюймахъ и притомъ въ масштабѣ m предполагаемой съемки (для полуверстового масштаба $m = \frac{1}{21000}$), и называя длины рамокъ черезъ a, b и c (черт. 224), получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{84\,m\,.\,\lambda}{[2]}\,.\,\cos\varphi \\ b &= \frac{84\,m\,.\,\lambda}{[2]}\,.\,\cos\varphi_1 \\ c &= \frac{84\,m\,.\,\theta}{[1]} \end{aligned}\right\} \qquad (162)$$

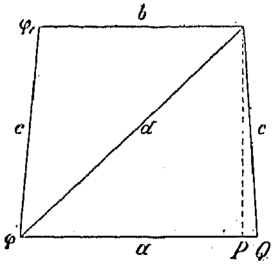
гдѣ m—масштабъ, φ и φ_1—широты южной и сѣверной рамокъ, λ и θ—размѣры планшета по долготѣ и широтѣ въ секундахъ, а величины [1] и [2] берутся изъ геодезическихъ таблицъ для средней широты $\frac{\varphi + \varphi_1}{2}$.

Для удобства и повѣрки построенія рамокъ вычисляютъ еще діагональ трапеціи d. Опустивъ изъ вершины перпендикуляръ на основаніе, легко видѣть, что діагональ представится формулою:

$$d^2 = a^2 + c^2 - 2a\,.\,PQ$$

Но такъ какъ разсматриваемая трапеція есть равнобочная, то, очевидно:

$$PQ = \frac{a-b}{2}$$



Черт. 224.

Подставивъ это въ предъидущее выраженіе, получимъ послѣ сокращенія:

$$d = \sqrt{ab + c^2} \qquad (163)$$

Числовой примѣръ. Пусть требуется вычислить размѣры планшета Финляндской съемки полуверстового масштаба, границы котораго опредѣляются широтами и долготами:

$$\varphi = 60^\circ\,18'\,0'' \qquad \omega = -\,1^\circ\,24'\,0''$$

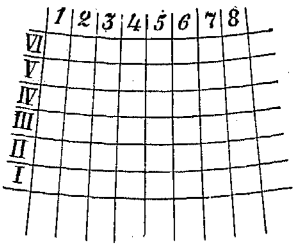
$$\varphi_1 = 60\;\;24\;\;0 \qquad \omega_1 = -\,1\;\;36\;\;0$$

Для этого планшета $\theta = 6' = 360''$, $\lambda = 12' = 720''$, $m = \frac{1}{21000}$, $[1] = 8.83844$ и $[2] = 8.83771$.

По формуламъ (162) и (163) получаемъ:

$$\begin{array}{llll} lg\,a = 1.31669 & a = 20.734 & \text{дюйма} \\ lg\,b = 1.31536 & b = 20.671 & » \\ lg\,c = 1.31992 & c = 20.889 & » \\ lg\,d = 1.46850 & d = 29.410 & » \\ lg\,P = 2.03388 & P = 108.11 & \text{кв. верстъ.} \end{array}$$

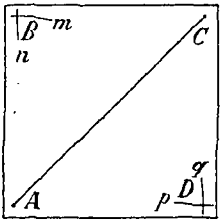
Если снимается обширное пространство, напримѣръ, цѣлая губернія, то оно предварительно разбивается на отдѣльные планшеты, какъ показано на черт. 225, причемъ ряды по параллелямъ означаются обыкновенно римскими, а отдѣльные листы въ каждомъ рядѣ арабскими цифрами. Само собою разумѣется, что размѣры рамокъ (а также діагоналей и площадей) надо вычислить только для одного планшета каждаго ряда.



Черт. 225.

171. Построеніе рамокъ. Мензульныя доски представляютъ правильные квадраты отъ 24 до 28 дюймовъ въ сторонѣ. Передъ съемкою на нихъ набиваютъ холстъ, на который наклеиваютъ сперва листъ ватманской бумаги (всею поверхностью), а затѣмъ листъ бумаги александрійской (только по краямъ) и наносятъ на него сперва рамки планшета, а затѣмъ всѣ имѣющіяся для него геодезическія точки. Если всѣ геодезическія точки даннаго планшета лежатъ внутри его, или хотя и внѣ, но очень близко къ рамкамъ, то трапецію наносятъ съ такимъ разсчетомъ, чтобы она заняла совершенно симметричное положеніе относительно краевъ доски; если же нужно нанести точки, лежащія далеко отъ рамокъ, напримѣръ, въ разстояніи 2 — 3 дюймовъ, то трапецію располагаютъ ближе къ одному краю, но во всякомъ случаѣ такъ, чтобы свободныя за рамкою поля были не уже $1^1/_2$ дюйма (на нашихъ планшетахъ поля бумаги за рамками принято дѣлать въ 1.2 дюйма).

Зная размѣры трапеціи, легко нанести ее на планшетъ, для чего пользуются нормальною масштабною линейкою и штангенъ-циркулемъ. Сперва проводятъ прямую приблизительно по діагонали доски и на ней накалываютъ точки A и C (черт. 226), которыя представляютъ два противолежащіе угла трапеціи и разстояніе между которыми равно діагонали d. Затѣмъ изъ этихъ точекъ, какъ изъ центровъ, радіусами, равными соотвѣтственно длинамъ рамокъ c и b, c и a, проводятъ небольшія дуги m и n, p и q; взаимныя пересѣченія ихъ дадутъ остальные два угла трапеціи B и D. Наконецъ, по масштабу берутъ опять длину діагонали d и, *приложивъ ножки* штангенъ-циркуля къ точкамъ B и D, повѣряютъ вѣрность построенія.



Черт. 226.

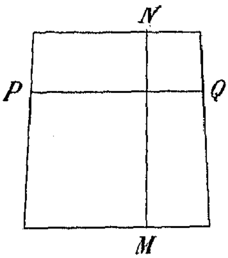
При Управленіяхъ Съемокъ, гдѣ ежегодно приходится наносить рамки многихъ планшетовъ, существовали прежде особыя мѣдныя доски, въ которыхъ разъ на всегда высверливались небольшія дырочки для угловъ разныхъ планшетовъ. Если такую доску наложить на мензульный планшетъ, то наноска рамокъ производится простымъ прокалываніемъ иглою соотвѣтствующихъ точекъ.

172. Нанесеніе точекъ. Послѣ рамокъ приступаютъ къ нанесенію *на планшетъ всѣхъ* точекъ, данныхъ тріангуляціею и нивелиръ-теодолитными работами. Каждая точка опредѣляется пересѣченіемъ двухъ прямыхъ—ея меридіаномъ и параллелью, проводимыми черезъ всю трапецію планшета. Линейныя координаты x и y вычисляются по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{по южной рамкѣ} & \ldots\ldots\ldots & x & = \dfrac{\omega-\omega_0}{\lambda}\cdot a \\ \text{по сѣверной рамкѣ} & \ldots\ldots\ldots & x_1 & = \dfrac{\omega-\omega_0}{\lambda}\cdot b \\ \text{по восточной и западной рамкамъ} & \ldots & y & = \dfrac{\varphi-\varphi_0}{\theta}\cdot c \end{array}\right\} \quad (164)$$

Для повѣрки вычисляютъ (а потомъ и наносятъ) координаты x и y независимо отъ двухъ угловъ трапеціи. Суммы этихъ x-овъ и y-овъ должны равняться соотвѣтствующимъ сторонамъ трапецiи—a, b и c.

Напоска производится по масштабу штангенъ-циркулемъ. Сперва откладываютъ по сѣверной и южной рамкамъ длины x-овъ и полученныя точки соединяютъ прямою MN (черт. 227); затѣмъ, отложивъ координаты y-овъ на восточной и западной рамкахъ, проводятъ прямую PQ. Положенiе данной точки, очевидно, опредѣлится пересѣченiемъ этихъ двухъ прямыхъ.



Черт. 227.

Числовой примѣръ. На мензульный планшетъ предъидущаго примѣра (§ 170) нанести точку по даннымъ географическимъ координатамъ:

$$\varphi_0 = \quad 60^\circ 21' 23''.983$$
$$\omega_0 = -1 \quad 28 \quad 11 \quad .740$$

По формуламъ (164) имѣемъ въ дюймахъ:

повѣрка.

$$x = \frac{468.260}{720} \times 20.734 = 13.485 \qquad x' = \frac{251.740}{720} \times 20.734 = 7.249 \qquad x + x' = 20.734$$

$$x_1 = \frac{468.260}{720} \times 20.671 = 13.443 \qquad x_1' = \frac{251.740}{720} \times 20.671 = 7.227 \qquad x_1 + x_1' = 20.670$$

$$y = \frac{203.983}{360} \times 20.889 = 11.836 \qquad y' = \frac{156.017}{360} \times 20.889 = 9.053 \qquad y + y' = 20.889$$

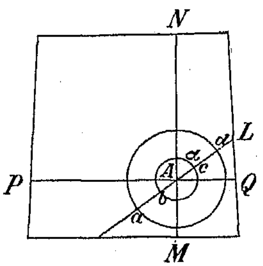
Послѣ наноски всѣхъ точекъ положенiе ихъ на планшетѣ повѣряется еще по разстоянiямъ, извѣстнымъ изъ трiангуляцiи или нивелиръ-теодолитныхъ работъ. Для этого разстоянiя s, данныя обыкновенно въ саженяхъ на мѣстности, переводятся, конечно, въ дюймы при масштабѣ съемки m, по формулѣ:

$$s_1 = s \,.\, 84 \,.\, m \tag{165}$$

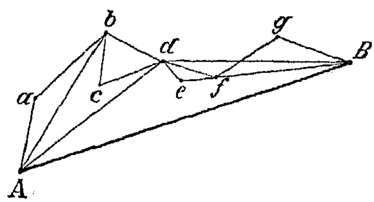
173. Нанесенiе угловъ. Весьма часто случается, что для орiентированiя можетъ служить отдаленная геодезическая точка, которую нельзя вовсе нанести на планшетъ. Тогда прочерчиваютъ только направленiе на нее по азимуту, извѣстному изъ вычисленiй. Это направленiе можетъ быть получено: 1) построеніемъ угла при помощи таблицъ хордъ и 2) вычисленіемъ длины отрѣзковъ, образуемыхъ пересѣченіями даннаго направленія съ рамками планшета.

1) Имѣя въ виду повѣрку графическаго построенія, описываютъ не одну дугу, а двѣ концентрическія окружности (черт. 228) произвольныхъ радіусовъ, напримѣръ, въ 4 и въ 8 дюймовъ. Полученныя, по взятымъ изъ таблицъ хордъ, и построенныя четыре точки a, b, c и d, а равно и данная точка A должны оказаться на одной прямой, которая и представитъ требуемое оріентировочное направленіе.

2) Зная положеніе данной точки A и, слѣдовательно, длины AM и AQ, легко вычислить отрѣзки p и q, образуемые на



Черт. 228.



Черт. 229.

рамкахъ планшета прямою AL, проходящею черезъ точку A подъ даннымъ азимутомъ $\alpha = \angle NAL$. Для случая, представленнаго на чертежѣ, эти отрѣзки будутъ (пренебрегая неперпендикулярностью прямыхъ MN и PQ къ рамкамъ планшета):

$$p = AM \,.\, tg\,\alpha$$

$$q = AQ \,.\, cotg\,\alpha$$

При наноскѣ нивелиръ-теодолитныхъ рядовъ, кромѣ точекъ, извѣстныхъ по ихъ географическимъ координатамъ, т. е. закладныхъ точекъ, необходимо строить и штативы, положеніе которыхъ извѣстно лишь по разстояніямъ и угламъ. Положимъ, что между закладными точками A и B (черт. 229) нужно нанести на планшетъ всѣ промежуточные штативы a, b, c... g. Эти точки строятся при помощи таблицъ хордъ въ порядкѣ, обратном ихъ вычисленію. Сперва по даннымъ угламъ поворота dAB и dBA строятъ направленія Ad и Bd и опредѣляютъ точку d, затѣмъ, такимъ же образомъ, по A и d строятъ точку b, а по d и B точку f, по A и b точку a и т. д. Повѣркою построенія служатъ разстоянія между точками: прочертивъ, напримѣръ, прямыя Ad и Bd по угламъ при A и B, удостовѣряются, равны-ли длины Ad и Bd разстояніямъ, вычисленнымъ по нивелиръ-теодолитному ряду.

Точность послѣдовательнаго нанесенія штативовъ по двумъ раньше построеннымъ постепенно уменьшается отъ ошибокъ графическихъ построеній, и потому съемщикъ отнюдь не долженъ пользоваться штативными точками, какъ основаніемъ для своей геометрической сѣти. Для горизонтальныхъ разстояній онѣ служатъ только повѣрочными точками. Другое дѣло ихъ высоты: высоты штативныхъ точекъ опредѣляются на нивелиръ-теодолитныхъ работахъ совершенно съ такою же точностью, какъ и высоты закладныхъ, слѣдовательно, въ отношеніи высотъ, всѣ штативы могутъ служить надежными исходными и повѣрочными точками работы съемщика.

Высоты точекъ какъ тригонометрическихъ, такъ и полученныхъ изъ нивелиръ-теодолитныхъ рядовъ подписываются въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ планшета, съ точностью до 0.01 саж.

XV.

Картографическія проекціи.

174. О проекціяхъ картъ вообще. Чтобы сдѣлать изображеніе всей земной поверхности или части ея, воображаютъ (для удобства и точности нанесенія отдѣльныхъ точекъ и контуровъ) систему меридіановъ и параллелей, раздѣляющихъ поверхность Земли на небольшія сфероидическія трапеціи.

Если пространство, которое желаютъ изобразить, незначительно по сравненію съ размѣрами земного сфероида, то, имѣя въ виду неизбѣжныя погрѣшности графическихъ построеній, его можно принять за плоскость и, слѣдовательно, изобразить въ извѣстномъ уменьшеніи безъ всякихъ искаженій, т. е. съ полнымъ подобіемъ контуровъ и съ сохраненіемъ истинныхъ отношеній площадей отдѣльныхъ участковъ. Въ § 169 было объяснено, что пространство, ограниченное близкими дугами меридіановъ и параллелей, представляетъ равнобочную плоскую трапецію, верхнее и нижнее основанія которой суть длины соотвѣтствующихъ дугъ параллелей, а бока—длины дугъ меридіановъ, уменьшенныя въ требуемомъ масштабѣ. Углы такой трапеціи для всѣхъ практическихъ цѣлей можно считать прямыми, и потому всѣ нанесенные контуры сохранятъ какъ подобіе, такъ и свое квадратное содержаніе; другими словами, масштабъ изображенія какъ по всѣмъ направленіямъ изъ любой точки, такъ и въ разныхъ его точкахъ, будетъ одинаковый. Такое изображеніе называется *планомъ*.

Иное дѣло—изобразить всю земную поверхность или большую часть ея на одной плоскости. Если прикладывать одну къ другой, соотвѣтствующими сторонами, трапеціи, представляющія отдѣльные участки, ограниченные меридіанами и параллелями, слѣдующими черезъ извѣстное число градусовъ, то нельзя уже получить сплошного изображенія. При соединеніи такихъ трапецій основаніями получатся заостренныя полосы съ просвѣтами по меридіанамъ; при соединеніи же ихъ боками—пояса, хотя и одинаковой ширины, но опять съ просвѣтами, на этотъ разъ по параллелямъ. По мѣрѣ удаленія отъ первой положенной трапеціи упомянутые просвѣты прогрессивно расширяются, и контуры береговъ, рѣкъ и т. п., вѣрные на каждой отдѣльной трапеціи, но являясь разорванными по частямъ, не могутъ дать яснаго и нагляднаго понятія о своемъ истинномъ расположеніи на земной поверхности.

Причина невозможности соединить отдѣльные планы на одной плоскости заключается въ томъ, что сфероидическая поверхность Земли принадлежитъ къ поверхностямъ, которыя нельзя развернуть на плоскость безъ складокъ или разрывовъ; изъ всѣхъ кривыхъ поверхностей на плоскость развертываются только поверхности цилиндрическія и коническія. Если изображенія сдѣланы въ весьма крупномъ масштабѣ, такъ что каждая сфероидическая трапеція представляетъ листъ значительной величины, то никто и не соединяетъ ихъ всѣ заразъ; при сложеніи же четырехъ и даже девяти трапецій просвѣты оказываются столь узкими, что, вообще говоря, не превосходятъ неизбѣжной деформаціи бумаги во время черченія, печатанія и храненія. Но изображенія въ видѣ отдѣльныхъ трапецій нельзя назвать общимъ изображеніемъ страны, части свѣта или всей Земли: это скорѣе атласъ, листами котораго пользуются порознь, по мѣрѣ надобности. Такія изображенія получили въ послѣднее время большое распространеніе и извѣстны подъ названіемъ *многогранныхъ проекцій*, потому что если ихъ сложить вмѣстѣ, то получится не плоскость и не сферическая поверхность, а многогранникъ.

Большую часть или всю земную поверхность можно изобразить въ одномъ масштабѣ только на *глобусѣ*, т. е. на тѣлѣ, подобномъ обитаемому нами сфероиду. Но чтобы глобусъ былъ годенъ для практическаго пользованія, его, по необходимости, приходится дѣлать небольшихъ размѣровъ, въ такомъ мелкомъ масштабѣ *), при которомъ нельзя помѣщать всѣхъ подробностей; глобусы служатъ лишь для общаго ознакомленія съ расположеніемъ материковъ и океановъ, для общихъ соображеній и при первоначальномъ изученіи географіи.

Для подробнаго изученія земной поверхности и для многихъ практическихъ цѣлей глобусы недостаточны; тутъ необходимы *географическія карты*, т. е. сплошныя изображенія на плоскости большихъ пространствъ и даже всей Земли. Такъ какъ сдѣлать сплошное изображеніе въ одномъ масштабѣ по всѣмъ направленіямъ и на всемъ протяженіи карты невозможно, то прибѣгаютъ къ *картографическимъ проекціямъ*, или условнымъ построеніямъ, при которыхъ имѣется въ виду удовлетворить тѣмъ или инымъ требованіямъ, причемъ масштабъ въ разныхъ направленіяхъ и въ разныхъ мѣстахъ изображенія, вообще говоря, не одинаковъ. Различіе масштаба представляетъ, конечно, неудобство географическихъ картъ, но такъ какъ масштабъ мѣняется въ разныхъ направленіяхъ и при переходѣ отъ одного мѣста къ другому постепенно, по извѣстнымъ законамъ, и для лучшихъ проекцій эти перемѣны не очень значительны, то на практикѣ это неудобство почти не ощутительно. Обыкновенно вдоль одной или нѣсколькихъ линій (меридіановъ или параллелей) масштабъ имѣетъ постоянную величину и именно ту, въ которой уменьшенъ глобусъ, служащій основаніемъ построенія проекціи; этотъ масштабъ называется *главнымъ*, по всѣмъ прочимъ направленіямъ будутъ *частные масштабы*.

Такимъ образомъ существенное *различіе между планомъ* и *картою* заключается въ томъ, что планъ представляетъ изображеніе небольшой части земной поверхности *въ постоянномъ масштабѣ*, а карта—изображеніе *въ масштабѣ перемѣнномъ*.

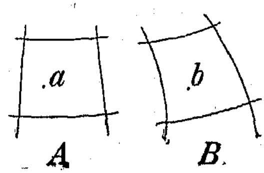
*) Для всемірной выставки въ Парижѣ (1889 г.) сдѣланъ былъ глобусъ въ одну милліонную. Хотя такой масштабъ никакъ нельзя назвать крупнымъ, однако глобусъ имѣлъ 6 саж. въ діаметрѣ и вѣсилъ 600 пудовъ. На глобусѣ помѣстили только главныя особенности рельефа земной поверхности, границы государствъ, морскіе пути, желѣзныя дороги и т. п. Для обозрѣнія отдѣльныхъ частей устроена была особая спиральная галерея.

Съ математической точки зрѣнія плана нельзя сдѣлать даже и для маленькаго участка, но, имѣя въ виду громадные размѣры земного сфероида и неизбѣжныя погрѣшности графическихъ построеній, извѣстную часть поверхности Земли на практикѣ можно считать плоскостью; вообще говоря, такое допущеніе справедливо до тѣхъ поръ, пока разность между дугами на уровенной поверхности и соотвѣтствующими имъ касательными или хордами меньше предѣльной точности масштаба чертежа.

Задача построенія картографическихъ проекцій въ сущности неопредѣленная, и для ея рѣшенія подчиняютъ проекцію извѣстнымъ, напередъ поставленнымъ условіямъ. Можно, напримѣръ, требовать, чтобы меридіаны и параллели изображались на картѣ кривыми данныхъ классовъ, чтобы сохранялось подобіе безконечно-малыхъ фигуръ, чтобы сохранялись площади фигуръ, масштабъ по извѣстному направленію, масштабъ по заданному контуру, чтобы большіе круги на сферѣ изображались прямыми на проекціи и т. п. Въ каждой проекціи преслѣдуется одна или нѣсколько цѣлей въ ущербъ другимъ, и проекціи, которая удовлетворяла бы всѣмъ цѣлямъ вмѣстѣ (какъ изображеніе на планѣ) не только не существуетъ, но и не можетъ существовать. Разнообразіе картографическихъ проекцій подобно разнообразію въ кройкѣ криволинейныхъ предметовъ изъ плоскихъ кусковъ ткани: при кройкѣ аэростатовъ дѣлаютъ вырѣзки, при кройкѣ чепчиковъ—пояса и т. п.

Необходимость картографическихъ проекцій была сознана еще въ древности, и, до открытія сфероидическаго вида Земли, проекціи примѣнялись для изображенія звѣзднаго неба. *Анаксимандръ*, *Эратосѳенъ*, *Гиппархъ*, *Птоломей* и др. изобрѣли первые роды проекцій. Въ эпоху великихъ открытій необходимость хорошихъ географическихъ картъ почувствовалась съ особенною настоятельностью; ученые путешественники и географы, каковы *Генрихъ Мореплаватель*, *Меркаторъ*, *Апіанъ* и др. оставили замѣчательные слѣды въ картографіи. Теоретическими изысканіями въ области картографическихъ проекцій занимались заграницею *Ламбертъ*, *Лагранжъ*, *Гауссъ*, *Тиссо* и многіе другіе, а въ Россіи *Эйлеръ*, *Чебышевъ*, *Коркинъ*, *Марковъ* и *Граве*.

Вслѣдствіе упомянутой уже условности изображенія поверхности Земли на плоскости, въ разное время изобрѣтено множество проекцій, подробное изученіе которыхъ составляетъ предметъ особой отрасли прикладныхъ математическихъ наукъ—*картографіи*. Задача картографіи ограничивается построеніемъ только сѣти меридіановъ и параллелей, слѣдующихъ черезъ одинаковые промежутки по долготѣ и широтѣ (черезъ извѣстное число градусовъ или минутъ). Такимъ образомъ каждой сфероидической трапеціи A (черт. 230), ограниченной дугами меридіановъ и параллелей на земномъ сфероидѣ, соотвѣтствуетъ на картѣ нѣкоторый прямолинейный или криволинейный четыреугольникъ B на плоскости и каждой точкѣ a на поверхности Земли соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная точка b на картѣ, причемъ не трудно опредѣлить координаты этой послѣдней, когда даны широта и долгота точки a. Въ принятомъ въ настоящее время способѣ производства точныхъ съемокъ отдѣльными участками, ограниченными именно дугами меридіановъ и параллелей, наполненіе картографической сѣтки контурами и вообще всѣми подробностями топографическихъ съемокъ не представляетъ затрудненій (см. гл. XVI).



Черт. 230.

Для удобства изученія проекціи дѣлятъ на группы, причемъ самое дѣленіе основывается *либо на свойствахъ изображеній*, либо на способахъ ихъ построеній.

По свойству изображеній проекціи бываютъ:

1) **Конформныя** *(ортоморфныя, автогоническія)*, сохраняющія подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ. На этихъ проекціяхъ масштабъ сохраняется по всѣмъ направленіямъ изъ каждой отдѣльной точки, но на весьма маломъ (правильнѣе *безконечно-маломъ*) *протяженіи*; при переходѣ отъ точки къ точкѣ масштабъ мѣняется, и въ разныхъ частяхъ карты, вообще говоря, различенъ. Другими словами, на этихъ проекціяхъ масштабъ въ каждой отдѣльной точкѣ не зависитъ отъ азимута направленія, и потому безконечно-малые и равные кружки, взя-

тые въ разныхъ мѣстахъ сфероидической поверхности, изображаются всегда кружками же, но діаметры этихъ кружковъ въ разныхъ мѣстахъ карты различны.

2) **Эквивалентныя** (*гомалографическія, авталическія*), сохраняющія площади участковъ. На этихъ проекціяхъ масштабъ въ каждой точкѣ по разнымъ направленіямъ различенъ, но средняя его величина какъ вокругъ взятой, такъ и во всѣхъ другихъ точкахъ карты остается неизмѣнною. Каждый кружокъ на любомъ мѣстѣ сфероидической поверхности изображается на картѣ равновеликимъ ему эллипсомъ, и вообще каждая замкнутая фигура любыхъ размѣровъ изображается хотя и не подобною, но равновеликою ей замкнутою фигурою.

Такъ какъ сфероидическая поверхность не можетъ быть развернута на плоскость безъ складокъ или разрывовъ, то условія конформности и эквивалентности не совмѣстимы.

3) **Произвольныя** не сохраняютъ ни подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ, ни равенства площадей, но зато обладаютъ нѣкоторыми преимуществами по простотѣ построенія или удобству рѣшенія на нихъ извѣстныхъ практическихъ задачъ.

По способу построенія проекціи бываютъ:

1) **Перспективныя**, на которыхъ контуры земной поверхности изображаются такъ, какъ они представлялись бы въ перспективѣ на картинной плоскости (если бы Земля была прозрачна); точка зрѣнія и картинная плоскость могутъ имѣть весьма различныя положенія одна относительно другой и по отношенію къ центру Земли.

2) **Зенитныя**, въ которыхъ контуры переносятся, по извѣстнымъ правиламъ, на касательную или сѣкущую плоскость, проводимую перпендикулярно къ произвольно избранному радіусу Земли. Точки, одинаково удаленныя отъ центральной на земной поверхности, лежатъ въ этихъ проекціяхъ на окружности, центръ которой есть изображеніе избранной центральной точки.

3) **Цилиндрическія**, на которыхъ отдѣльные контуры переносятся сперва на поверхность вписаннаго или описаннаго около земного сфероида цилиндра; этотъ цилиндръ предполагается затѣмъ разрѣзаннымъ по одной изъ образующихъ и развернутымъ на плоскость.

4) **Коническія,** на которыхъ контуры переносятся сперва на поверхность сѣкущаго или касательнаго къ земной поверхности конуса; затѣмъ поверхность конуса предполагается разрѣзанною по одной изъ образующихъ и развернутою на плоскость.

Въ нижеслѣдующихъ краткихъ описаніяхъ образованія и важнѣйшихъ свойствъ наиболѣе употребительныхъ проекцій онѣ слѣдуютъ въ порядкѣ способовъ построенія, но для каждой отдѣльной проекціи указано, къ какому роду она принадлежитъ, придерживаясь дѣленія по свойству изображеній.

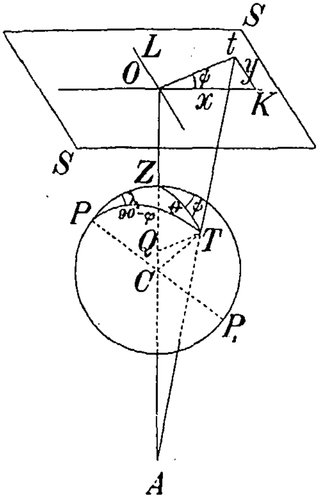
175. Перспективныя проекціи вообще. Для построенія перспективныхъ проекцій воображаютъ сфероидъ, представляющій Землю, уменьшенную въ нѣкоторомъ заданномъ *главномъ масштабѣ*, и затѣмъ проектируютъ точки и линіи поверхности этого сфероида на извѣстнымъ образомъ расположенную плоскость. Зная положенія точки зрѣнія и картинной плоскости относительно центра воображаемаго сфероида, легко получить изображеніе его поверхности построеніемъ или вычисленіемъ.

Такъ какъ въ перспективныхъ проекціяхъ представляютъ обыкновенно очень большія части земной поверхности (напримѣръ, цѣлое полушаріе), то главный масштабъ берется весьма мелкимъ и, для облегченія построенія, Землю принимаютъ за правильный шаръ, поверхность котораго равна поверхности земного сфероида; радіусъ R такого шара вычисляется по приближенной формулѣ (см. § 25, стр. 66):

$$R = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2\right) \qquad (166)$$

гдѣ a—большая полуось земного сфероида, а e—его эксцентриситетъ. Для сфероида Кларка (1880 г.) $R = 5\,972$ версты.

Хотя точка зрѣнія и картинная плоскость могутъ имѣть произвольныя положенія относительно центра шара, но въ перспективныхъ проекціяхъ ограничиваются случаями, когда картинная плоскость перпендикулярна къ прямой, соединяющей точку зрѣнія съ центромъ шара. На черт. 231-омъ A — точка зрѣнія, C — центръ шара, представляющаго уменьшенное изображеніе Земли, и SS — картинная плоскость. Чтобы получить изображеніе любой точки поверхности шара, надо провести прямую черезъ нее и точку зрѣнія до пересѣченія съ картинною плоскостью; такъ, изображеніе точки T будетъ въ t, мѣстѣ пересѣченія прямой AT съ плоскостью SS.



Черт. 231.

Построеніе точекъ можно замѣнить болѣе точнымъ вычисленіемъ. Пусть плоскость чертежа представляетъ одинъ изъ меридіановъ, и сѣверный полюсъ Земли находится въ P; соединивъ дугою большого круга точку T съ Z— мѣстомъ пересѣченія луча AC, проведеннаго черезъ центръ шара, съ его поверхностью, легко замѣтить, что положеніе точки T вполнѣ опредѣляется сферическими координатами:

$$\theta = \smile ZT \text{ и } \psi = \angle P_1ZT$$

которыя можно вычислить, когда извѣстны географическія координаты точекъ T и Z, т. е. ихъ широты φ и φ_0 и разность долготъ λ; именно, изъ сферическаго треугольника PZT имѣемъ:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \sin\varphi_0 . \sin\varphi + \cos\varphi_0 . \cos\varphi . \cos\lambda \\ \sin\theta . \sin\psi &= \cos\varphi . \sin\lambda \qquad (a) \\ \sin\theta . \cos\psi &= -\cos\varphi_0 . \sin\varphi + \sin\varphi_0 . \cos\varphi . \cos\lambda \end{aligned}$$

Положеніе изображенія t на плоскости SS всего проще опредѣлить прямоугольными координатами

$$x = OK \text{ и } y = tK$$

относительно взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ OK и OL, пересѣкающихся въ O, проекціи Z, причемъ OK лежитъ въ плоскости чертежа и, слѣдовательно, представляетъ изображеніе меридіана PZP_1. Такъ какъ плоскій уголъ tOK равенъ сферическому углу TZP_1, т. е. ψ, то легко видѣть, что

$$x = Ot \cdot \cos\psi$$
$$y = Ot \cdot \sin\psi \tag{b}$$

Назвавъ еще разстоянія точки зрѣнія отъ картинной плоскости и отъ центра шара, т. е. отрѣзки AO и AC черезъ a и b и опустивъ перпендикуляръ TQ изъ T на AO, получимъ

$$Ot : QT = AO : AQ$$

Если R — радіусъ шара, то

$$QT = R \cdot \sin\theta \qquad AO = a \qquad AQ = b + R \cdot \cos\theta$$

слѣдовательно:

$$Ot = \frac{a \cdot R \cdot \sin\theta}{b + R \cdot \cos\theta}$$

Подставивъ это выраженіе въ уравненія (b) и замѣняя сферическія координаты θ и ψ географическими по формуламъ (a), получимъ окончательно:

$$x = \frac{a \cdot R\ (\sin\varphi_0 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda - \cos\varphi_0 \cdot \sin\varphi)}{b + R\ (\sin\varphi_0 \cdot \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda)}$$
$$y = \frac{a \cdot R \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda}{b + R\ (\sin\varphi_0 \cdot \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda)} \tag{167}$$

Вотъ общія формулы, по которымъ можно вычислить положеніе точки на картинной плоскости по данному положенію соотвѣтствующей точки на земной поверхности; вмѣстѣ съ тѣмъ онѣ заключаютъ и всю теорію перспективныхъ проекцій. Если изъ обѣихъ формулъ исключить широту φ, то останется уравненіе между x, y и λ; отъ подставленія въ него для λ разныхъ величинъ, получатся уравненія меридіановъ. Если же, наоборотъ, изъ обѣихъ формулъ исключить долготу λ, то останется уравненіе между x, y и φ; отъ подставленія въ него для φ разныхъ величинъ, получатся уравненія параллелей. Не трудно замѣтить, что полученныя уравненія будутъ второй степени относительно координатъ x и y, откуда слѣдуетъ, что меридіаны и параллели представляются въ перспективныхъ проекціяхъ вообще кривыми второго порядка, т. е. эллипсами, гиперболами и параболами, а въ частныхъ случаяхъ кругами и прямыми. Впрочемъ этотъ выводъ очевиденъ: такъ какъ меридіаны и параллели на земной поверхности (считая ее шаромъ) суть круги, то ихъ проекціи на плоскость только и могутъ быть разными видами кривыхъ второго порядка.

Характеръ перспективныхъ проекцій не зависитъ отъ удаленія картинной плоскости SS (черт. 231); если перемѣщать ее параллельно самой себѣ, то измѣняется лишь масштабъ изображенія (величина a входитъ въ выраженія координатъ x и y только множителемъ). Въ зависимости же отъ положенія точки зрѣнія перспективныя проекціи раздѣляются на четыре рода: 1) *Ортографическія*—когда точка зрѣнія удалена на безконечное разстояніе; 2) *Стереографическія*—когда точка зрѣнія лежитъ на поверхности шара; 3) *Центральныя*—когда точка зрѣнія находится въ центрѣ шара; 4) *Внѣшнія*—когда точка зрѣнія лежитъ внѣ шара, но на конечномъ отъ него разстояніи.

Во всѣхъ этихъ родахъ перспективныхъ проекцій остается еще неопредѣленнымъ положеніе оси вращенія Земли; смотря по тому, пересѣкаетъ ли перпендикуляръ, опущенный изъ точки зрѣнія на картинную плоскость, земную поверхность въ полюсѣ, на экваторѣ или подъ нѣкоторою промежуточною широтою, всѣ перечисленные роды перспективныхъ проекцій могутъ быть *полярными*, *экваторіальными* и *горизонтными*.

176. Ортографическія проекціи. Такъ какъ точка зрѣнія въ ортографическихъ проекціяхъ, предложенныхъ еще знаменитымъ греческимъ геометромъ *Аполлоніемъ* (около 210 г. до Р. Х.), находится въ безконечномъ удаленіи отъ шара, то положеніе картинной плоскости не измѣняетъ ни способа построенія, ни масштаба изображенія; обыкновенно принимаютъ, что картинная плоскость проходитъ черезъ центръ шара, и на нее проектируютъ одно полушаріе.

Для изслѣдованія искаженій контуровъ въ ортографическихъ проекціяхъ вообще, вообразимъ безконечно-малыя дуги AB и AC (черт. 232), расположенныя: AB — по большому кругу, проходящему черезъ точку Z, а AC—по малому кругу, имѣющему Z полюсомъ. Проекціями этихъ дугъ на картинной плоскости будутъ безконечно-малыя же дуги ab и ac, причемъ

$$ab = AB \cdot \cos\theta$$

$$ac = AC$$

гдѣ θ—угловое разстояніе A отъ Z.

Отсюда видно, что если главный масштабъ, въ которомъ представлена земная поверхность въ видѣ шара, принять за единицу, то частные масштабы на проекціи въ направленіи ZA (m) и ему перпендикулярномъ (m_1) будутъ:

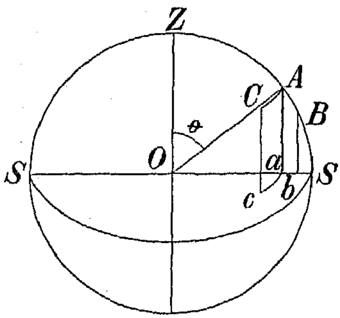
$$m = \frac{ab}{AB} \quad \text{и} \quad m_1 = \frac{ac}{AC}$$

т. е.

$$m = \cos\theta \quad \text{и} \quad m_1 = 1$$

а масштабъ (M) безконечно-малой площади, выражаемый, очевидно, произведеніемъ этихъ двухъ масштабовъ, будетъ:

$$M = \cos\theta$$



Черт. 232.

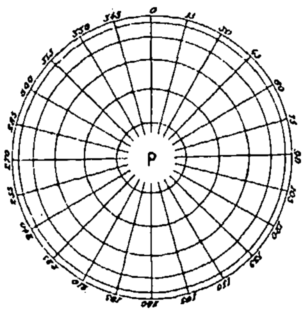
Такимъ образомъ ортографическія проекціи не сохраняютъ ни подобія фигуръ, ни площадей; только у центра карты, гдѣ $\theta = 0$, частные масштабы по всѣмъ направленіямъ равны единицѣ, т. е. главному масштабу, по мѣрѣ же удаленія отъ центра масштабъ m, въ направленіи радіусовъ карты, уменьшается сперва медленно, а затѣмъ быстрѣе и у краевъ обращается въ нуль. Безконечно-малые кружки на шарѣ изображаются: у центра карты равновеликими имъ кружками, въ прочихъ мѣстахъ карты — эллипсами, а на самыхъ краяхъ просто черточками.

Общія формулы (167) для вычисленія прямоугольныхъ координатъ, послѣ раздѣленія на a и подстановки $a = b = \infty$, обращаются въ частныя формулы для ортографическихъ проекцій:

$$
\begin{aligned}
x &= R\,(\sin\varphi_0 \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\lambda - \cos\varphi_0 \,.\, \sin\varphi) \\
y &= R \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\lambda
\end{aligned}
\qquad (168)
$$

Смотря по положенію картинной плоскости относительно оси вращенія Земли, ортографическія проекціи бываютъ:

1) **Полярная,** когда картинная плоскость совпадаетъ съ плоскостью экватора; въ этой проекціи (черт. 233) меридіаны представляются прямыми, пересѣкающимися въ центрѣ карты подъ углами, равными разностямъ ихъ долготъ, а параллели — кругами, имѣющими общимъ центромъ середину карты—изображеніе полюса. Если раздѣлить четверть окружности ZS (черт. 232) на произвольное число равныхъ частей, напримѣръ, на 6 частей по 15°, и изъ точекъ дѣленія опустить перпендикуляры на радіусъ экватора OS, то полученные отрѣзки дадутъ радіусы соотвѣтствующихъ параллелей. Эти радіусы ρ для любой широты φ (здѣсь $0 = 90°—\varphi$) можно получить и вычисленіемъ, по формулѣ:



Черт. 233.

$$\rho = R \,.\, \cos\varphi \qquad (169)$$

Формулы (168) обращаются для полярной ортографической проекціи въ слѣдующія ($\varphi_0 = 90°$):

$$
\begin{aligned}
x &= R \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\lambda \\
y &= R \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\lambda
\end{aligned}
\qquad (170)
$$

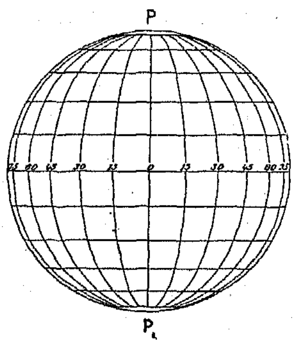
2) **Экваторіальная,** когда картинная плоскость совпадаетъ съ плоскостью какого нибудь меридіана. Въ этой проекціи (черт. 234) меридіаны представляются вообще эллипсами, имѣющими общую большую ось, равную діаметру шара, а малыя оси ихъ равны $R \,.\, \sin\lambda$; параллели же изображаются параллельными прямыми, отстоящими отъ центра проекціи на

величины $R \cdot \sin\varphi$. Малыя оси эллиптическихъ меридіановъ и разстоянія параллелей отъ проекціи экватора можно получить и чертежомъ: они равны отрѣзкамъ радіуса OS (черт. 232), способъ полученія которыхъ объясненъ выше.

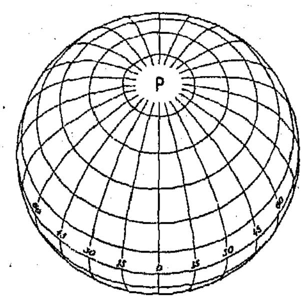
Для экваторіальной ортографической проекціи ($\varphi_0 = 0°$) формулы (168) обращаются въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} x &= -R \cdot \sin\varphi \\ y &= R \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (171)$$

3) **Горизонтная,** когда картинная плоскость параллельна горизонту любой точки, заданной своими широтою и долготою. На этой проекціи меридіаны и параллели представляются



Черт. 234.



Черт. 235.

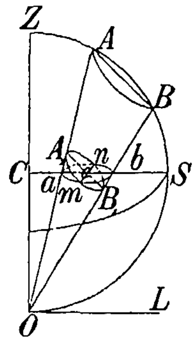
вообще эллипсами, кромѣ меридіана центральной точки проектируемаго полушарія, представляющагося прямою. По трудности построенія эллипсовъ, горизонтную ортографическую проекцію чертятъ по точкамъ, прямоугольныя координаты которыхъ вычисляются по формуламъ (168). Общій видъ этой проекціи для горизонта точки, имѣющей широту $\varphi_0 = 60°$, изображенъ на чертежѣ 235.

Ортографическія проекціи примѣняются только для изображенія небольшихъ частей земной поверхности, причемъ за плоскость проекціи берутъ плоскость, касательную къ уровенной поверхности Земли въ центральной точкѣ проектируемаго участка. Извѣстно, что каждый съемочный планшетъ съ рельефомъ, выраженнымъ изогипсами, представляетъ именно горизонтную ортографическую проекцію снятаго участка. Большія же пространства земной поверхности изображаются въ ортографической проекціи лишь въ исключительныхъ случаяхъ, напримѣръ, для графическаго предсказанія обстоятельствъ солнечныхъ затменій; въ этомъ случаѣ дѣло идетъ не о дѣйствительныхъ разстояніяхъ между точками, а только о построеніи кривыхъ, отдѣляющихъ пространства съ полнымъ и частнымъ затменіями. Для цѣлыхъ полушарій ортографическая проекція примѣняется еще въ картахъ Луны; здѣсь, благодаря тому обстоятельству, что жители Земли видятъ всегда только одну половину своего спутника, изображенія всѣхъ подробностей его поверхности выходятъ въ экваторіальной ортографической проекціи именно такими, какими онѣ представляются земному обитателю въ дѣйствительности.

177. Стереографическія проекціи. При построеніи стереографическихъ проекцій картинная плоскость принимается проходящею черезъ центръ шара, а точка зрѣнія помѣщается на его поверхности въ точкѣ, въ которой поверхность шара пересѣкается радіусомъ, перпендикулярнымъ къ картинной плоскости. Эти проекціи были предложены еще *Гиппархомъ*, но замѣчательныя свойства ихъ были открыты лишь впослѣдствіи. Важнѣйшія изъ этихъ свойствъ суть:

1) *Всякій большой или малый кругъ шара изображается въ стереографическихъ проекціяхъ тоже кругомъ.* Пусть AB (черт. 236) представляетъ произвольно взятый на шарѣ кругъ. Для простоты доказательства положимъ, что плоскость этого круга перпендикулярна къ плоскости чертежа; это не будетъ ограниченіемъ общности, потому что фигуру всегда можно повернуть около діаметра ZO такъ, чтобы центръ круга AB совпалъ съ плоскостью чертежа, когда и выполнится поставленное условіе. Лучи, проведенные изъ точки зрѣнія O ко всѣмъ точкамъ окружности AB, образуютъ наклонный круговой конусъ, всякое сѣченіе котораго плоскостью, параллельною плоскости его основанія, будетъ, конечно, кругомъ; докажемъ, что и сѣченіе этого конуса картинною плоскостью, т. е. кривая

amb n тоже кругъ. Для этого вообразимъ плоскость A_1mB_1n, параллельную плоскости круга AB и пересѣкающую радіусъ CS въ точкѣ c, *лежащей между точками* a и b, а плоскость чертежа по прямой A_1B_1; тогда образуются подобные треугольники A_1ca и B_1cb; дѣйствительно, если провести прямую OL, параллельную CS, то $\angle aA_1c$, равный $\angle OAB$, равенъ $\angle BOL$, какъ имѣющему ту же мѣру—половину дуги BSO; послѣдній же уголъ, равный $\angle BbS$, равенъ $\angle cbB_1$; кромѣ того $\angle A_1ca = B_1cb$. Изъ подобія названныхъ треугольниковъ выходитъ:



Черт. 236.

$$ac : A_1c = cB_1 : cb$$

откуда

$$ac \,.\, cb = A_1c \,.\, cB_1 \qquad (a)$$

Далѣе, плоскости amb и A_1mB_1, обѣ перпендикулярныя къ плоскости чертежа, пересѣкаются по прямой mcn, тоже перпендикулярной къ плоскости чертежа, и потому, на основаніи свойства перпендикуляра, опущеннаго изъ произвольной точки окружности на діаметръ, имѣемъ:

$$\overline{mc}^2 = A_1c \,.\, cB_1 \qquad (b)$$

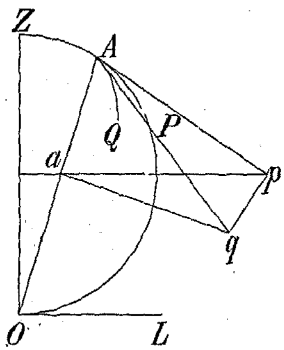
Сравнивая (a) и (b), получаемъ:

$$\overline{mc}^2 = ac \,.\, cb$$

т. е. перпендикуляръ mc, относительно кривой amb, обладаетъ свойствомъ, присущимъ только кругу, а такъ какъ плоскость сѣченія A_1mB_1 взята произвольно, то подобнымъ же образомъ можно доказать, что всякая точка на этой кривой обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, откуда слѣдуетъ, что и вся кривая $ambn$ есть кругъ.

2) *Въ стереографическихъ проекціяхъ сохраняется подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ*, т. е. это конформныя проекціи. Пусть PAQ (черт. 237) представляетъ сферическій уголъ, вершина и одна сторона котораго лежатъ въ плоскости чертежа.

Этотъ уголъ измѣряется плоскимъ угломъ между касательными, проведенными въ вершинѣ къ составляющимъ его дугамъ большихъ круговъ. *Проекціею такого плоскаго угла будетъ* $\angle paq$, составленный прямыми ap и aq, представляющими пересѣченіе плоскостей pAa и qAa съ картинною плоскостью. Такъ какъ *плоскости* qAp *и* qap *перпендикулярны къ плоскости* чертежа, то линія ихъ пересѣченія, т. е. прямая qp тоже перпендикулярна къ плоскости чертежа, и, слѣдовательно, треугольники qAp и qap—прямоугольные при p. Далѣе, треугольникъ Apa равнобедренный, потому что углы его aAp и Aap равны углу AOL (OL проведена параллельно ap):



Черт. 237.

$\angle aAp = \angle AOL$, какъ измѣряющіеся половиной той же дуги AO,

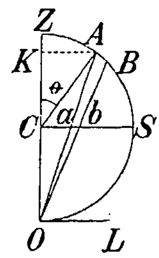
$\angle Aap = \angle AOL$, какъ соотвѣтствующіе.

Треугольники Apq и apq, имѣющіе общій катетъ pq и равные катеты Ap и ap, равны; слѣдовательно, равны и углы pAq и paq, что и требовалось доказать.

Въ предъидущемъ построеніи одна изъ сторонъ угла PAQ предполагалась въ плоскости чертежа. Для каждаго другого угла съ тою же вершиною всегда можно провести дугу AP въ плоскости чертежа и доказать равенство угловъ на шарѣ и на проекціи, разсматривая равенство суммы или разности двухъ угловъ, изъ которыхъ каждый имѣетъ одну сторону въ плоскости чертежа. Наконецъ, если бы вершина угла A находилась въ произвольной точкѣ поверхности шара, то ничто не мѣшало бы предварительно повернуть фигуру около діаметра ZO такъ, чтобы эта вершина оказалась въ плоскости чертежа.

Изъ доказаннаго равенства угловъ непосредственно вытекаетъ подобіе фигуръ на проекціи и на поверхности шара.

Вслѣдствіе подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ, масштабъ изображенія въ стереографическихъ проекціяхъ остается неизмѣннымъ по всѣмъ направленіямъ изъ одной точки, но мѣняется при переходѣ отъ одной точки къ другой. Не трудно найти зависимость масштаба отъ удаленія точки отъ центра проекціи. Пусть полуокружность ZSO (черт. 238) изображаетъ разрѣзъ полушара съ радіусомъ R, начерченнаго въ главномъ масштабѣ, A и B—двѣ безконечно-близкія точки, такъ что дугу AB можно замѣнить стягивающею ее хордою. Проведя лучи OA и OB, получимъ на картинной плоскости двѣ точки a и b, соотвѣтствующія точкамъ A и B на поверхности шара. Если принять главный масштабъ за единицу, то масштабъ (m) изображенія у точки A выразится дробью:



Черт. 238.

$$m = \frac{ab}{AB} \tag{a}$$

Изъ подобія треугольниковъ Oab и OAB, имѣющихъ общій уголъ въ O и равные углы CbO и OAB (оба равны углу BOL и измѣряются половиною дуги BSO), имѣемъ:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{aO}{BO}$$

въ предѣлѣ же, когда точки A и B сольются въ одну:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{aO}{AO} \tag{b}$$

Опустивъ перпендикуляръ AK изъ A на прямую OZ, соединивъ A съ центромъ шара C и означивъ уголъ ZCA буквою θ, получимъ:

$$\frac{aO}{AO} = \frac{CO}{KO} = \frac{R}{R + R\cos\theta} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2} \tag{c}$$

Изъ сравненія (a), (b) и (c) выходитъ:

$$m = \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2} \tag{d}$$

Масштабъ на стереографическихъ проекціяхъ не зависитъ отъ направленія и потому во всякомъ другомъ направленіи имѣетъ ту же величину; масштабъ же (M) безконечно-малыхъ площадей будетъ:

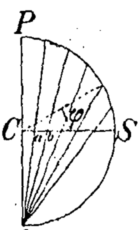
$$M = m^2 = \frac{1}{4} \sec^4 \frac{\theta}{2}$$

Въ центрѣ проекціи, гдѣ $\theta = 0°$, линейный масштабъ равенъ $^1/_2$, при удаленіи отъ центра онъ непрерывно возрастаетъ и у краевъ проекціи, гдѣ $\theta = 90°$, онъ достигаетъ 1; соотвѣтственно этому частные масштабы площадей измѣняются отъ $^1/_4$ до 1.

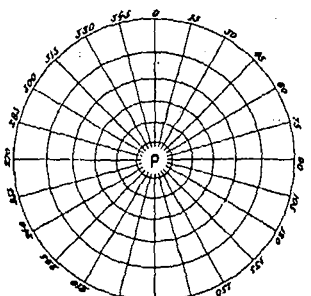
Общія формулы (167) для построенія перспективныхъ проекцій по точкамъ обращаются въ частныя для построенія стереографическихъ, если положить въ нихъ $a = b = R$; именно, тогда выходитъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{R(\sin\varphi_0 . \cos\varphi . \cos\lambda - \cos\varphi_0 \sin\varphi)}{1 + \sin\varphi_0 . \sin\varphi + \cos\varphi_0 . \cos\varphi . \cos\lambda} \\ y &= \frac{R . \cos\varphi . \sin\lambda}{1 + \sin\varphi_0 . \sin\varphi + \cos\varphi_0 . \cos\varphi . \cos\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad (172)$$

Смотря по положенію точки зрѣнія, стереографическія проекціи, подобно ортографическимъ, бываютъ слѣдующихъ трехъ родовъ:



Черт. 239.



Черт. 240.

1) **Полярная,** когда точка зрѣнія находится въ одномъ изъ полюсовъ, а картинная плоскость совпадаетъ съ плоскостью экватора. Въ этой проекціи (черт. 240) меридіаны представляются прямыми, пересѣкающимися въ центрѣ карты подъ углами, равными разностямъ ихъ долготъ, а параллели — концентрическими окружностями, имѣющими общимъ центромъ изображеніе полюса. Если раздѣлить четверть окружности PS (черт. 239) на произвольное число равныхъ частей, напримѣръ, на шесть частей по 15°, и соединить точки дѣленія съ O, то отрѣзки Ca, Cb... изобразятъ радіусы соотвѣт-

ствующихъ параллелей; для большей точности эти же радіусы ρ можно получить вычисленіемъ по формулѣ:

$$\rho = R.tg\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \tag{173}$$

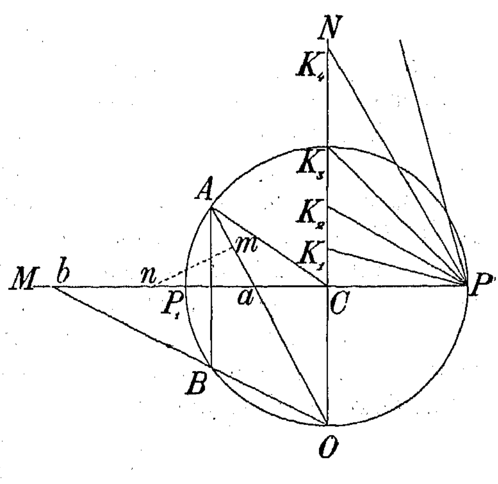
легко выводимой изъ чертежа.

Формулы (172) для стереографическихъ проекцій вообще въ случаѣ полярной проекціи ($\varphi_0=90^\circ$) обращаются въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{R.\cos\varphi.\cos\lambda}{1+\sin\varphi} \\ y &= \frac{R.\cos\varphi.\sin\lambda}{1+\sin\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{174}$$

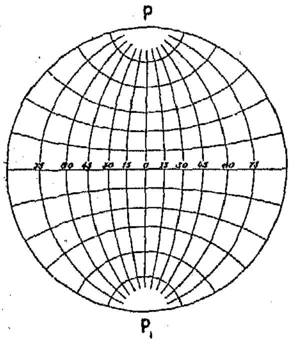
Эти формулы служать для построенія проекціи по точкамъ.

2) **Экваторіальная,** когда точка зрѣнія лежитъ на экваторѣ, а картинная плоскость совпадаетъ съ плоскостью какого нибудь меридіана. Въ этой проекціи (черт. 242) меридіаны и параллели изображаются дугами неконцентрическихъ круговъ, за исключеніемъ средняго меридіана карты и экватора, которые представляются двумя взаимно-перпендикулярными діаметрами основного круга проекціи. Способъ построенія показанъ на черт. 241, именно, на правой его половинѣ— построеніе меридіановъ, а на лѣвой — параллелей.



Черт. 241.

Такъ какъ въ стереографическихъ проекціяхъ сохраняются углы, и каждый кругъ на шарѣ изображается на проекціи тоже кругомъ, то легко понять, что всѣ круги, представляющіе меридіаны, проходя черезъ проекціи полюсовъ, должны пересѣкаться тамъ подъ углами, равными разностямъ долготъ, слѣдовательно, всѣ центры $K_1 K_2$... этихъ круговъ должны лежать на прямой CN, перпендикулярѣ къ PP_1 въ центрѣ C. Они получатся, если изъ P провести прямыя PK_1, PK_2..., составляющія между собою равные углы (напр. въ 15°). Отрѣзки PK_1, PK_2... суть радіусы, которыми на черт. 242 проведены послѣдовательные меридіаны. Назовемъ эти радіусы буквою ρ, а разстоянія точекъ K_1, K_2... отъ C буквою δ; ихъ легко получить и вычисленіемъ по формуламъ:



Черт. 242.

$$\begin{aligned} \rho &= R \,.\, cosec\, \lambda \\ \delta &= R \,.\, tg\, \lambda \end{aligned} \qquad (175)$$

гдѣ R — радіусъ шара въ главномъ масштабѣ, а λ — долготы послѣдовательныхъ меридіановъ, считая ихъ отъ средняго меридіана карты.

Для построенія проекціи любой параллели AB (черт. 241) подъ широтою φ надо провести прямыя OA и OB; точки пересѣченія ихъ съ CM, т. е. точки a и b представляютъ проекціи двухъ діаметрально противоположныхъ точекъ параллели; такъ какъ эта же параллель должна проходить и черезъ точки A и B (если вообразить, что чертежъ повернутъ на 90° около прямой MC), то центръ n параллели можно получить простымъ дѣленіемъ отрѣзка ab пополамъ, или же возставленіемъ перпендикуляра mn изъ середины отрѣзка Aa. Элементы, необходимые для построенія параллелей, легко получить и вычисленіемъ по формуламъ:

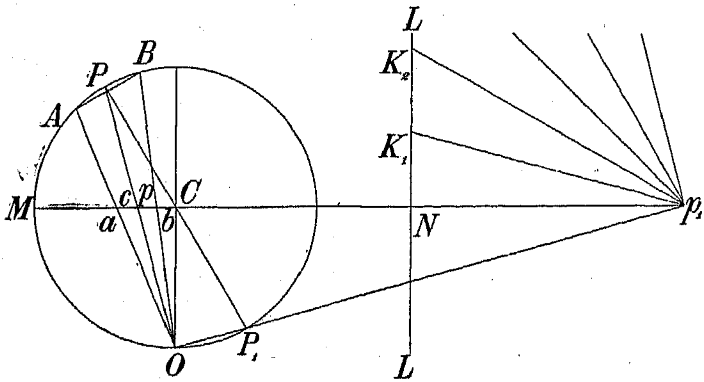
$$\begin{aligned} \delta_1 &= R \,.\, tg\, \frac{\varphi}{2} \\ \delta_2 &= R \,.\, cotg\, \frac{\varphi}{2} \\ \rho &= \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = R \,.\, cotg\, \varphi \end{aligned} \qquad (176)$$

гдѣ δ_1 и δ_2—разстоянія точекъ a и b отъ центра C, ρ — радіусъ, а φ—широта соотвѣтствующей параллели.

Для построенія экваторіальной стереографической проекціи по точкамъ можно воспользоваться формулами (172), которыя въ данномъ случаѣ ($\varphi_0=0°$) обращаются въ слѣдующія:

$$x = \frac{-R \cdot \sin\varphi}{1 + \cos\varphi \cdot \cos\lambda}$$
$$y = \frac{R \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda}{1 + \cos\varphi \cdot \cos\lambda} \qquad (177)$$

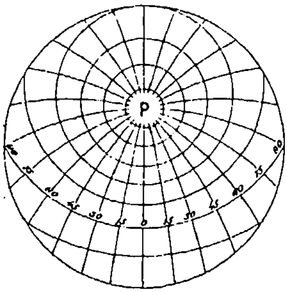
3) **Горизонтная,** когда картинная плоскость параллельна горизонту любой точки шара (съ широтою φ_0). Эта проекція для $\varphi_0=60°$ изображена на черт. 244, а способъ построенія выясненъ



Черт. 243.

на черт. 243. Прежде всего опредѣляютъ проекціи p и p_1 обоихъ полюсовъ, для чего проводятъ прямыя OP и OP_1; раздѣливъ отрѣзокъ pp_1 пополамъ, возставляютъ перпендикуляръ LL, на которомъ должны лежать центры всѣхъ изображеній меридіановъ, какъ круговъ, проходящихъ черезъ точки p и p_1; имѣя кромѣ того въ виду, что у полюсовъ всѣ меридіаны должны пересѣкаться подъ углами, равными разностямъ ихъ долготъ, проводятъ изъ p_1 прямыя p_1K_1, p_1K_2..., подъ равными углами, напримѣръ, черезъ 15°. Отрѣзки NK_1, NK_2.... представляютъ разстоянія центровъ, а длины p_1K_1, p_1K_2...— радіусы меридіановъ на проекціи. Подобно предъидущему, ихъ можно получить и вычисленіемъ; именно, сохраняя принятыя обозначенія, легко видѣть, что

$$pp_1 = R \,.\, tg\left(45^\circ - \frac{\varphi_0}{2}\right) + R \,.\, cotg\left(45^\circ - \frac{\varphi_0}{2}\right) = 2R \,.\, sec\,\varphi_0$$



Черт. 244.

$$\frac{pp_1}{2} = pN = Np_1 = R \,.\, sec\,\varphi_0$$

$$\delta = Np_1 \,.\, tg\,\lambda = R \,.\, sec\,\varphi_0 \,.\, tg\,\lambda \qquad (178)$$

$$\rho = Np_1 \,.\, sec\,\lambda = R \,.\, sec\,\varphi_0 \,.\, sec\,\lambda$$

Для построенія любой параллели AB (черт. 243) соединимъ A и B съ O; въ пересѣченіи съ MN получимъ двѣ точки a и b, которыя изобразятъ концы діаметра параллели на проекціи, и радіусъ ея будетъ половина отрѣзка ab, а центръ въ точкѣ c, причемъ $ac = cb$. Помимо такого простого графическаго построенія, необходимыя данныя можно получить и вычисленіемъ по формуламъ (значеніе буквъ см. форм. 176):

$$\delta_1 = R \,.\, tg\,\frac{\varphi - \varphi_0}{2}$$

$$\delta_2 = R \,.\, cotg\,\frac{\varphi + \varphi_0}{2} \qquad (179)$$

$$\rho = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = \frac{R \,.\, cos\,\varphi}{2\,sin\,\frac{\varphi + \varphi_0}{2} \,.\, cos\,\frac{\varphi - \varphi_0}{2}}$$

Если желаютъ построить горизонтную стереографическую проекцію по точкамъ, то надо пользоваться общими формулами (172).

Англійскій математикъ *Кэлей* (1821 — 1895) открылъ любопытную связь между различными горизонтными и экваторіальною стереографическими проекціями. Именно, если на черт. 242 вообразить хорду, параллельную проекціи экватора, съ угловымъ удаленіемъ отъ него φ_0, построить на ней, какъ на діаметрѣ, окружность и продолжить внутри этой окружности дуги всѣхъ меридіановъ и параллелей, то получится горизонтная проекція для широты φ_0. Меридіаны и параллели экваторіальной проекціи будутъ меридіанами и параллелями вновь построенной горизонтной, только масштабъ новой карты будетъ во столько разъ мельче прежней, во сколько взятая хорда меньше діаметра основного круга. При этомъ меридіаны экваторіальной проекціи, какъ исходящіе изъ проекціи полюса подъ равными углами, изобразятъ тѣ же меридіаны и на горизонтной, каждая же параллель будетъ соотвѣтствовать другой широтѣ φ_1, связанной съ прежнею широтою φ простымъ уравненіемъ:

$$tg\left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2}\right) = cotg\,\frac{\varphi_0}{2} \,.\, tg\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

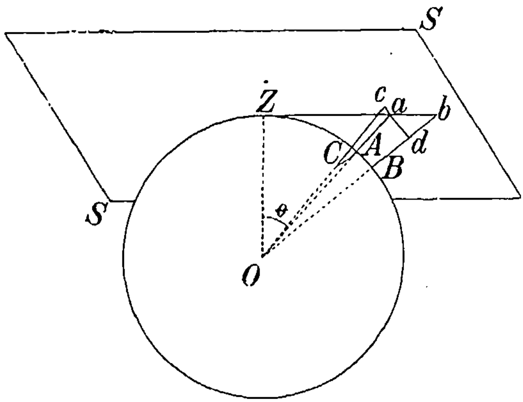
Стереографическія проекціи примѣняются почти исключительно къ изображенію цѣлыхъ полушарій, хотя ими можно пользоваться для изображенія частей какъ меньшихъ, такъ и бо̀льшихъ полушара; онѣ весьма удобны для графическаго рѣшенія разныхъ задачъ. Однако, вслѣдствіе значительныхъ перемѣнъ масштаба, стереографическія проекціи почти никогда не примѣняются къ изображенію отдѣльныхъ странъ.

Благодаря простотѣ построенія горизонтной стереографической проекціи, она часто служитъ для построенія по точкамъ зенитныхъ проекцій, выражаемыхъ уравненіемъ $\rho = f(\mu)$, какъ напр. формула (188). Именно, строятъ сперва горизонтную стереографическую проекцію для данной центральной точки карты и проводятъ на ней систему концентрическихъ круговъ, дающихъ геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ отъ центра на n°, $2n^\circ$, $3n^\circ$..., по правилу полярной стереографической проекціи, и систему радіусовъ черезъ n°. Затѣмъ строятъ систему концентрическихъ круговъ по закону $\rho = f(\mu)$ тоже черезъ n° и переносятъ точки пересѣченій меридіановъ и параллелей съ основной горизонтной стереографической сѣтки на новую по правиламъ графической интерполяціи.

178. Центральныя проекціи. Когда точка зрѣнія находится въ центрѣ шара, то нельзя, конечно, черезъ этотъ же центръ провести картинную плоскость. Въ центральныхъ проекціяхъ картинной плоскости даютъ обыкновенно положеніе касательной къ поверхности шара въ нѣкоторой точкѣ. Эти проекціи—

древнѣйшія изъ всѣхъ извѣстныхъ; онѣ предложены знаменитымъ греческимъ философомъ *Ѳалессомъ* (639—548 до Р. Х.).

Чтобы изслѣдовать искаженіе контуровъ на центральныхъ проекціяхъ вообще, вообразимъ шаръ и касательную къ нему плоскость SS въ точкѣ Z (черт. 245). Пусть A, B и C—три безконечно-близкія точки на поверхности шара, причемъ A и B лежатъ на большомъ кругѣ, проходящемъ черезъ Z, а A и C—на маломъ кругѣ, имѣющемъ Z своимъ полюсомъ. Проведя радіусы OA, OB и OC, продолживъ ихъ до пересѣченія съ картинною плоскостью въ точкахъ a, b и c и принявъ главный масштабъ, т. е. масштабъ шара за единицу, имѣемъ:



Черт. 245.

Масштабъ по направленію ZA, $m = \frac{ab}{AB}$

Масштабъ по перпендикулярному направленію, $m_1 = \frac{ac}{AC}$

Называя угловое удаленіе разсматриваемыхъ точекъ отъ точки касанія Z черезъ θ, проведя ad перпендикулярно къ Ob и считая безконечно-малыя дуги AB и AC прямыми, легко видѣть, что

$$ab = ad \, . \sec \theta$$

$$ad = AB \, . \frac{aO}{AO} = AB \, . \sec \theta$$

$$ac = AC \, . \sec \theta$$

и, слѣдовательно:

$$m = \sec^2 \theta \qquad m_1 = \sec \theta$$

Масштабъ же площадей будетъ

$$M = \sec^3 \theta$$

Отсюда видно, что центральныя проекціи не сохраняютъ ни подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ, ни квадратнаго содержанія площадей; кромѣ того на нихъ нельзя даже изобразить цѣлаго полушарія, потому что при $\theta = 90°$, m, m_1 и M обращаются въ безконечность. Однако онѣ имѣютъ то драгоцѣнное свойство, что каждый большой кругъ шара, какъ кругъ, плоскость котораго проходитъ черезъ точку зрѣнія, изображается прямою линіею. Центральныя проекціи особенно часто примѣняются для составленія небесныхъ картъ: видъ созвѣздій на такихъ картахъ всего ближе къ тому, въ какомъ они дѣйствительно представляются обитателю Земли, и, слѣдовательно, по нимъ легко разыскивать звѣзды. Для изображенія всего звѣзднаго неба его проектируютъ обыкновенно на шесть граней куба, описаннаго около шара.

Общія формулы перспективныхъ проекцій (167) для вычисленія прямоугольныхъ координатъ точекъ въ центральныхъ проекціяхъ обращаются при подстановкѣ $a = R$ и $b = 0$ въ нижеслѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{R\,(\sin\varphi_0 \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\lambda - \cos\varphi_0 \,.\, \sin\varphi)}{\sin\varphi_0 \,.\, \sin\varphi + \cos\varphi_0 \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\lambda} \\ y &= \frac{R \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\lambda}{\sin\varphi_0 \,.\, \sin\varphi + \cos\varphi_0 \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (180)$$

Смотря по положенію точки касанія картинной плоскости, центральныя проекціи бываютъ слѣдующихъ трехъ родовъ:

1) **Полярная**, когда картинная плоскость касается одного изъ полюсовъ. Въ этой проекціи (черт. 246) меридіаны представляются прямыми, пересѣкающимися въ центрѣ карты подъ углами, равными разностямъ ихъ долготъ, а параллели кругами, имѣющими общимъ центромъ середину карты—изображеніе полюса. Радіусы параллелей можно получить или непосредственно изъ чертежа, проведя изъ O (черт. 245) систему прямыхъ подъ равными углами до пересѣченія съ прямою Zb, или вычислить по формулѣ (въ этомъ случаѣ $\theta = 90° - \varphi$):

$$\rho = R \,.\, \operatorname{cotg}\varphi \quad (181)$$

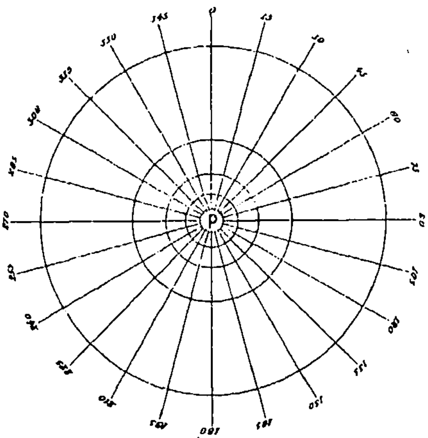
Для построенія полярной центральной проекціи по точкамъ служатъ нижеслѣдующія формулы, легко получаемыя изъ общихъ

(180) подстановкою $\varphi_0 = 90°$:

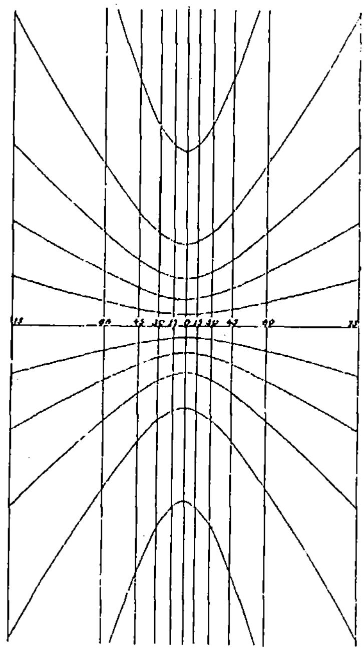
$$x = R \,.\, cotg\, \varphi \,.\, cos\, \lambda$$
$$y = R \,.\, cotg\, \varphi \,.\, sin\, \lambda \qquad (182)$$

Эта проекція чаще всего примѣняется для составленія небесныхъ картъ околополярныхъ звѣздъ.

2) **Экваторіальная**, когда картинная плоскость касается произвольно избранной точки экватора. Въ этой проекціи (черт. 247) меридіанъ касанія и экваторъ изображаются двумя взаимно-перпендикулярными прямыми; всѣ прочіе меридіаны—прямыми, параллельными меридіану касанія и отстоящими отъ него на непрерывно возрастающихъ разстояніяхъ, получаемыхъ предъидущимъ построеніемъ или по формулѣ:



Черт. 246.



Черт. 247.

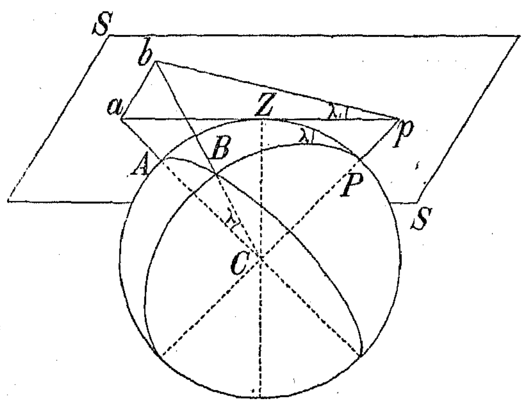
$$\delta = R \,.\, tg\, \lambda \qquad (183)$$

гдѣ λ—долгота, считаемая отъ меридіана касанія. Параллели же, какъ линіи, получаемыя пересѣченіемъ коническихъ поверхностей съ плоскостью, параллельною ихъ общей оси, представляются гиперболами, дѣйствительныя оси которыхъ совпадаютъ съ изображеніемъ меридіана касанія, а мнимыя—съ изображеніемъ экватора.

Для построенія экваторіальной центральной проекціи по точкамъ подставляемъ въ формулы (180) $\varphi_0 = 0°$ и получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= -R\,.\,tg\,\varphi\,.\,sec\,\lambda \\ y &= R\,.\,tg\,\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (184)$$

3) **Горизонтная,** когда картинная плоскость касается произвольной точки шара, заданной широтою и долготою. На этой проекціи меридіаны представляются прямыми, расходящимися изъ общей точки — изображенія полюса, но углы между этими прямыми не равны. Соотношеніе угловъ λ_1 между меридіанами на проекціи и угловъ λ на шарѣ легко вывести изъ построенія чертежа 248, на которомъ p — проекція полюса, pa—проекція меридіана точки касанія Z, pb — проекція другого меридіана, подъ долготою λ, и ab—проекція дуги AB экватора; прямая ab, очевидно, перпендикулярна къ прямымъ ap и aC. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ bap и baC имѣемъ:



Черт. 248.

$$ba = ap\,.\,tg\,\lambda_1 = aC\,.\,tg\,\lambda$$

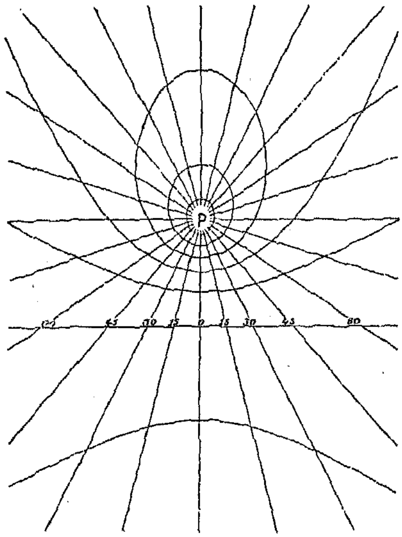
откуда

$$tg\,\lambda_1 = \frac{aC}{ap}\,.\,tg\,\lambda$$

но $\dfrac{aC}{ap} = sin\,apC = sin\,aCZ = sin\,\varphi_0$, гдѣ φ_0 — широта точки касанія Z; слѣдовательно:

$$tg\,\lambda_1 = sin\,\varphi_0\,.\,tg\,\lambda$$

Это извѣстная формула для построенія простѣйшихъ горизонтальныхъ солнечныхъ часовъ; она имѣетъ обширное примѣненіе въ теоріи *гномона*, и вотъ почему всѣ вообще центральныя проекціи нерѣдко называются *гномоническими*.

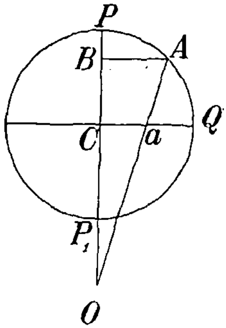


Черт. 249.

Изъ чертежей 248 и 249 легко усмотрѣть, что на горизонтной центральной проекціи параллели, имѣющія широту бо́льшую $90^\circ - \varphi_0$ (гдѣ φ_0—широта точки касанія), изображаются эллипсами, большія оси которыхъ направлены по прямой ap; эти эллипсы, начиная отъ ближайшаго къ полюсу, все болѣе и болѣе растянуты. Параллель съ широтою $90^\circ - \varphi_0$ изображается параболою, всѣ прочія параллели—гиперболами. Наконецъ экваторъ, какъ большой кругъ шара, изображается прямою ab, перпендикулярною къ ap. На черт. 249 представлена горизонтная центральная проекція для точки касанія съ $\varphi_0 = 60^\circ$. Для построенія этой проекціи по точкамъ надо пользоваться общими формулами (180).

179. Внѣшнія проекціи. Разобранныя выше перспективныя проекціи неудобны для изображенія большихъ частей земной поверхности главнымъ образомъ вслѣдствіе значительныхъ перемѣнъ масштаба на пространствѣ карты. Въ ортографическихъ проекціяхъ масштабъ измѣняется отъ 1 до 0, въ стереографическихъ отъ $^1/_2$ до 1, а въ центральныхъ отъ 1 до ∞. Такъ какъ перемѣны масштаба въ первыхъ двухъ родахъ проекцій имѣютъ противоположный характеръ, то естественно явилась мысль дать точкѣ зрѣнія нѣкоторое промежуточное положеніе, при которомъ недостатки обѣихъ проекцій хотя бы частью уравнивались.

Проекція Лаира. Въ проекціи *Лаира* точка зрѣнія O (черт. 250) помѣщена такъ, чтобы изображеніе точки A, лежащей по серединѣ четверти окружности PQ, оказалось въ точкѣ a, на половинѣ радіуса CQ. Отсюда слѣдуетъ, что точка зрѣнія O опредѣляется пересѣченіемъ прямой Aa съ продолженнымъ діаметромъ PP_1. Если назвать длину отрѣзка P_1O черезъ α и вспомнить, что $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то при радіусѣ шара, равномъ единицѣ, получается слѣдующая пропорція для опредѣленія положенія точки зрѣнія:



Черт. 250.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \alpha\right) : (1 + \alpha)$$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ = 0.70711$$

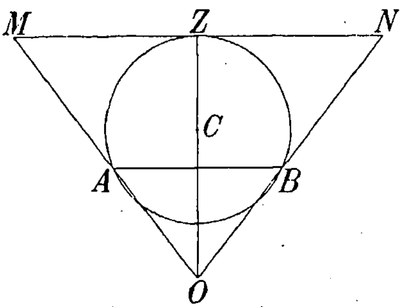
Проекція Лаира не сохраняетъ ни подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ, ни площадей, но въ общемъ она искажаетъ очертанія меньше, чѣмъ разсмотрѣнныя выше главныя перспективныя проекціи, и примѣняется иногда какъ полярная проекція для изображенія сѣвернаго и южнаго полушарій.

Проекція Парана. Изслѣдуя искаженія очертаній на проекціи Лаира, французскій географъ *Паранъ* (1666—1716) убѣдился, что хотя равныя дуги PA и AQ (черт. 250) по 45° изображаются равными отрѣзками Ca и aQ радіуса CQ, но равныя части этихъ дугъ изображаются на проекціи не равными отрѣзками. Если раздѣлить всю четверть окружности PQ на малыя равныя части, напримѣръ, на градусы и затѣмъ проводить соотвѣтствующіе лучи зрѣнія при разныхъ положеніяхъ точки зрѣнія O, то части, на которыя будетъ дѣлиться радіусъ CQ, выходятъ всегда неодинаковыми. Паранъ доказалъ, что при разстояніи

$$P_1O = \alpha = 0.595$$

абсолютная сумма разностей отдѣльныхъ частей радіуса CQ оказывается наименьшею. Въ другихъ отношеніяхъ проекція Парана ничѣмъ не лучше предъидущей.

Проекціи Джемса и Кларка. *Джемсъ* обусловилъ выборъ положенія точки зрѣнія тѣмъ, чтобы получить съ возможно меньшими искаженіями изображеніе не половины, а двухъ третей поверхности шара, на которыхъ могли бы помѣститься цѣликомъ всѣ части свѣта, кромѣ Австраліи. Онъ принялъ $\alpha = 0.5$. Способъ проектированія показанъ на черт. 251. Между точками M и N картинной плоскости получаются изображенія всѣхъ точекъ дуги AZB, обнимающей 227°.



Черт. 251.

Кларкъ *) подробно изслѣдовалъ искаженія какъ линейныхъ разстояній, такъ и площадей на проекціи Джемса и предложилъ новую проекцію, въ которой искаженіе площадей приведено къ наименьшему; по его вычисленіямъ это оказывается при

$$\alpha = 0.36763$$

Въ заключеніе разбора различныхъ перспективныхъ проекцій необходимо замѣтить, что всѣ эти проекціи вообще искажаютъ какъ очертанія, такъ и площади; однѣ только стереографическія проекціи обладаютъ замѣчательнымъ свойствомъ сохранять подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ, и такъ какъ, кромѣ того, меридіаны и параллели на нихъ изображаются только кругами и прямыми, то онѣ и нашли наибольшее распространеніе въ картографіи.

Въ нижеслѣдующихъ проекціяхъ можно по желанію задаваться впередъ условіемъ, чтобы сохранялись площади или чтобы сохранялось подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ.

---

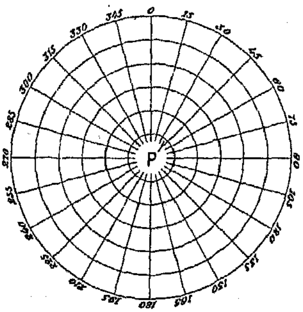
*) См. *James* and *Clarke*—On projections for maps applying to a very large extent of the Earth's surface (Philosophical Magazine, 1862).

180. Зенитныя проекціи. Для построенія зенитныхъ проекцій воображаютъ плоскость, касательную къ произвольно избранной точкѣ шара, и затѣмъ переносятъ на нее отдѣльныя точки поверхности съ такимъ разсчетомъ, чтобы точки, лежащія на шарѣ въ равномъ разстояніи отъ точки касанія (на одномъ альмукантаратѣ), оказались на проекціи расположенными по кругу. Чаще всего пользуются зенитными проекціями, относящимися къ роду полярныхъ, когда точкою касанія плоскости служитъ одинъ изъ полюсовъ Земли; въ этомъ случаѣ меридіаны изображаются прямыми, выходящими подъ равными углами изъ одной точки—изображенія полюса, а параллели—системою концентрическихъ круговъ. Однако зенитныя проекціи могутъ быть также экваторіальными и горизонтными. Если за точку касанія берется не полюсъ, то прямыми и концентрическими кругами изображаются вертикалы и альмукантараты точки касанія; меридіаны же и параллели представляются, вообще говоря, довольно сложными кривыми и строятся обыкновенно по точкамъ, координаты которыхъ легко вычисляются по формуламъ сферической тригонометріи. Если зенитная проекція строится для цѣлаго полушарія, то радіусъ Земли вычисляютъ по формулѣ (166); если же она строится для небольшой части земной поверхности и, слѣдовательно, въ крупномъ масштабѣ, то радіусъ шара вычисляется по формулѣ (15).

Проекція Постеля. *Простѣйшая изъ зенитныхъ проекцій* предложена парижскимъ профессоромъ *Постелемъ* (1510 — 1581). На ней лучеобразно и подъ равными углами расходящіеся меридіаны пересѣкаются концентрическими кругами (черт. 252), радіусы которыхъ (ρ) равны выпрямленнымъ дугамъ меридіановъ отъ полюса до соотвѣтствующихъ параллелей, т. е. вычисляются по формулѣ:

$$\rho = R\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tag{185}$$

гдѣ R — радіусъ земного шара, уменьшенный въ требуемомъ главномъ масштабѣ, а φ—географическая широта, выраженная въ частяхъ радіуса. Если довести построеніе до экватора, то его радіусъ выходитъ $\frac{\pi}{2} \cdot R$, а площадь $\frac{\pi^3}{4} \cdot R^2$, и, слѣдовательно, эта проекція не принадлежитъ ни къ эквивалентнымъ, ни къ конформнымъ. Масштабъ по меридіанамъ вездѣ одинаковъ и равенъ единицѣ, тогда какъ по параллелямъ онъ равенъ отношенію ρ къ радіусу соотвѣтствующей параллели на шарѣ, т. е.

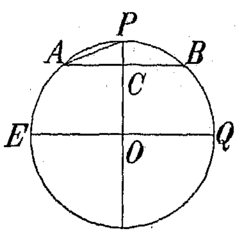


Черт. 252.

$$m = 1, \quad m_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sec\varphi = M$$

Вблизи полюса всѣ контуры сохраняютъ свои очертанія, а по мѣрѣ удаленія отъ него все болѣе и болѣе растягиваются по параллелямъ; вообще каждый безконечно-малый кружокъ на сферѣ изображается на проекціи эллипсомъ, а квадратикъ—прямоугольничкомъ. Вслѣдствіе простоты построенія, проекція Постеля примѣняется не только для приполярныхъ странъ, но и для цѣлыхъ полушарій Земли, равно какъ и для звѣздныхъ картъ. Въ послѣднемъ случаѣ ее чертятъ съ обратной стороны, т. е. такъ, какъ небо представляется обитателямъ Земли; это замѣчаніе относится, впрочемъ, ко всѣмъ звѣзднымъ картамъ.

Проекція Ламберта. Поверхность шарового сегмента равновелика площади круга, котораго радіусъ есть хорда, стягивающая любую точку окружности основанія сегмента съ его вершиною. Дѣйствительно, назовемъ черезъ S поверхность шарового сегмента APB (черт. 253), а черезъ R радіусъ шара; тогда



Черт. 253.

$$S = 2\pi . R . PC$$

но

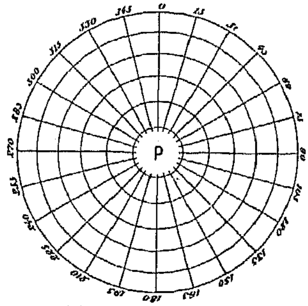
$$PC = \frac{\overline{AP}^2}{2R}$$

Если хорду AP назвать буквою ρ, то получимъ:

$$S = \pi . \rho^2$$

На этой теоремѣ основано построеніе *эквивалентной* зенитной проекціи, предложенной въ числѣ многихъ другихъ знаменитымъ германскимъ геометромъ *Ламбертомъ* (1728 — 1777). Общій видъ ея для цѣлаго полушарія съ полюсомъ въ центрѣ карты изображенъ на черт. 254. Меридіаны суть лучеобразно расходящіяся прямыя, углы между которыми равны разностямъ долготъ, а параллели — концентрическіе круги, радіусы которыхъ могутъ быть или взяты съ чертежа 253 (какъ хорды отъ P до точекъ дѣленія дуги EP), или вычислены по формулѣ:

$$\rho = 2\,R\,.\,sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \qquad (186)$$



Черт. 254.

Такъ какъ площадь каждаго круга на проекціи равновелика поверхности соотвѣтствующаго сегмента шара, то и разности этихъ площадей, т. е. кольца на проекціи и пояса на шарѣ, тоже равновелики; равновелики и равныя части этихъ колецъ и поясовъ, такъ что проекція Ламберта эквивалентна какъ въ цѣломъ, такъ и въ малѣйшихъ частяхъ.

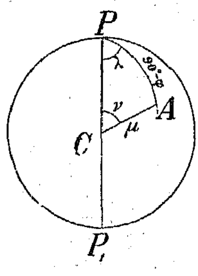
Масштабы по меридіанамъ и параллелямъ выражаются формулами:

$$m = cos\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{и} \quad m_1 = sec\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

а масштабъ площадей $M = m\,.\,m_1$ равенъ, разумѣется, единицѣ.

Принявъ за центръ проекціи не полюсъ, а любую точку на земной поверхности, легко строить другіе виды эквивалентной зенитной проекціи. Послѣ полярной (черт. 254) чаще всего встрѣчается экваторіальная, для которой центръ карты берется въ какой нибудь точкѣ экватора. Если вообразить для взятой точки систему вертикаловъ и альмукантаратовъ, то построеніе ихъ проекцій ничѣмъ не отличалось бы отъ построенія меридіановъ и параллелей на полярной проекціи; но такъ какъ на картѣ требуются все же меридіаны и параллели, то прибѣгаютъ къ построенію по точкамъ.

Назовемъ широту и долготу (считая отъ меридіана центральной точки) любой точки поверхности черезъ φ и λ. Новыя координаты μ и ν вычисляются по формуламъ:



Черт. 255.

$$\cos\mu = \cos\varphi \,.\, \cos\lambda$$
$$tg\,\nu = cotg\,\varphi \,.\, \sin\lambda \qquad (187)$$

легко выводимымъ изъ сферическаго треугольника PCA (черт. 255), въ которомъ $PC = 90°$. Для облегченія построенія можетъ служить нижеслѣдующая таблица, въ которой величины μ и ν даны для широтъ и долготъ, слѣдующихъ черезъ 15°.

λ	0°		15°		30°		45°		60°		75°		90°	
φ	μ	ν	μ	ν	μ	ν	μ	ν	μ	ν	μ	ν	μ	ν
0°	0°	—	15° 0′	90° 0′	30° 0′	90° 0′	45° 0′	90° 0′	60° 0′	90° 0′	75° 0′	90° 0′	90°	90°
15	15	0	21 6	44 0	33 14	61 49	46 55	69 15	61 7	72 48	75 31	74 30	90	75
30	30	0	33 14	24 9	41 25	40 54	52 14	50 46	64 20	56 19	77 3	59 8	90	60
45	45	0	46 55	14 31	52 14	26 34	60 0	35 16	69 18	40 54	79 27	44 0	90	45
60	60	0	61 7	8 30	64 20	16 6	69 18	22 12	75 31	26 34	82 34	29 9	90	30
75	75	0	75 31	3 58	77 3	7 38	79 27	10 44	82 34	13 4	86 10	14 31	90	15
90	90	0	90 0	0 0	90 0	0 0	90 0	0 0	90 0	0 0	90 0	0 0	90	0

Самое построеніе заключается въ томъ, что сперва чертятъ кругъ съ радіусомъ $\rho_0 = \sqrt{2}\,.\,R$, гдѣ R—радіусъ земного шара въ требуемомъ масштабѣ; затѣмъ изъ центра этого круга проводятъ лучеобразно прямыя подъ углами ν, считаемыми отъ PC и P_1C къ востоку и западу, и на нихъ откладываютъ величины ρ, вычисляемыя по формулѣ:

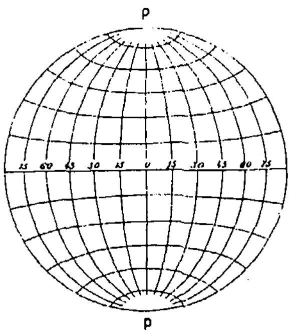
$$\rho = \sqrt{2}\,.\,\rho_0\,.\,\sin\frac{\mu}{2} \qquad (188)$$

Такая проекція изображена на черт. 256 и извѣстна чаще подъ названіемъ проекціи *Лорнья* (1730 — 1796), по имени директора Военнаго Училища въ Веронѣ, разработавшаго ее во всѣхъ подробностяхъ.

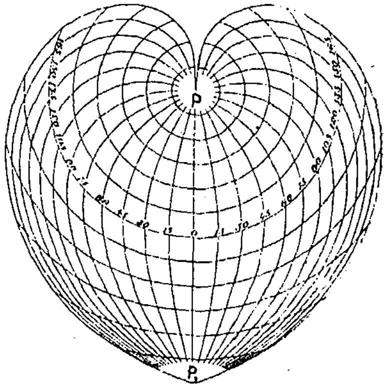
Не трудно построить и *конформныя зенитныя* проекціи;

онѣ представляютъ ничто иное, какъ разные виды стереографическихъ проекцій, разсмотрѣнныхъ уже въ § 177.

Проекція Вернера. Еще раньше Постеля и Ламберта нюрнбергскій географъ *Вернеръ* (1468—1528) предложилъ зенитную проекцію, совмѣщающую въ себѣ выгоды и недостатки проекцій этихъ ученыхъ. Она представляетъ въ сущности произвольное построеніе и чертится слѣдующимъ образомъ. Избравъ прямую PP_1 (черт. 257), изображающую средній меридіанъ



Черт. 256.



Черт. 257.

страны, проводятъ систему параллелей въ видѣ дугъ концентрическихъ круговъ, разстоянія между которыми равны разстояніямъ ихъ на шарѣ (или сфероидѣ), т. е. радіусы берутся такъ, какъ въ проекціи Постеля. Затѣмъ на каждой параллели, начиная отъ средняго меридіана, откладываютъ истинныя длины дугъ параллелей и черезъ полученныя точки проводятъ кривыя (или ломаныя), изображающія меридіаны. Такъ какъ на круговыхъ дугахъ нельзя непосредственно откладывать части данной длины, то для каждой параллели строятъ углы δ (при полюсѣ P), вычисляемые по простой формулѣ:

$$\delta = \frac{s}{\rho} \tag{189}$$

гдѣ s — дуга параллели между избранными меридіанами, а ρ, какъ въ проекціи Постеля, вычисляется по формулѣ (185). Здѣсь весьма легко принять въ разсчетъ и сжатіе земного сфероида, потому что для s и ρ можно брать готовыя числа изъ геодезическихъ таблицъ.

Легко понять, что проекція Вернера принадлежитъ къ эквивалентнымъ; въ самомъ дѣлѣ, основанія и высоты каждой трапеціи, ограниченной дугами меридіановъ и параллелей на проекціи, равны сторонамъ соотвѣтствующихъ трапецій на шарѣ или сфероидѣ. Однако этою проекціею пользуются только при изображеніи небольшихъ странъ, лежащихъ далеко отъ экватора; вообще же искаженія очертаній оказываются на ней весьма значительными.

Проекція Эри. Въ § 174 было уже замѣчено, что не можетъ существовать проекціи, совмѣщающей сохраненіе площадей и подобіе фигуръ; всѣ вообще проекціи удовлетворяютъ или одному изъ этихъ требованій, или ни тому, ни другому. *Эри* предложилъ проекцію послѣдняго рода, но такую, что сумма квадратовъ уклоненій площадей и подобія фигуръ выходитъ на ней наименьшею; иными словами, въ этой проекціи примѣнено начало наименьшихъ квадратовъ. Изобрѣтатель назвалъ ее *проекціею съ уравниваніемъ ошибокъ* (Projection by Balance of Errors).

Назовемъ черезъ α и β основаніе и высоту безконечно-малой трапеціи, ограниченной на земной поверхности параллелями и меридіанами, а черезъ $\alpha + \Delta\alpha$ и $\beta + \Delta\beta$ основаніе и высоту соотвѣтствующей фигуры на проекціи, гдѣ подъ $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ надо разумѣть безразлично увеличеніе или уменьшеніе α и β.

Для эквивалентной проекціи должно существовать условіе:

$$\frac{(\alpha + \Delta\alpha)(\beta + \Delta\beta)}{\alpha \, . \, \beta} = 1$$

а для конформной:

$$\frac{\alpha + \Delta\alpha}{\beta + \Delta\beta} : \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

Совмѣстить эти условія невозможно, и пусть ни одно изъ нихъ не выполняется на проекціи. Тогда подъ искаженіемъ площадей можно разумѣть выраженіе:

$$\frac{(\alpha + \Delta\alpha)(\beta + \Delta\beta)}{\alpha \, . \, \beta} - 1 = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\beta}{\beta} \qquad (a)$$

а подъ искаженіемъ подобія фигуръ выраженіе:

$$\frac{(\alpha + \Delta\alpha) \cdot \beta}{(\beta + \Delta\beta) \cdot \alpha} - 1 = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - \frac{\Delta\beta}{\beta} \qquad (b)$$

гдѣ въ разложеніяхъ по степенямъ $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ отброшены члены второго и высшихъ порядковъ.

Сумма квадратовъ искаженій или ошибокъ (a) и (b) выходитъ:

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\beta}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - \frac{\Delta\beta}{\beta}\right)^2 = 2\left(\frac{\Delta\alpha^2}{\alpha}\right) + 2\left(\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)^2$$

и потому въ основаніе своей проекціи Эри поставилъ условіе, чтобы сумма

$$\Sigma\left\{\left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)^2\right\}$$

взятая для всего пространства карты, была наименьшею.

Опуская аналитическія выкладки, данныя авторомъ въ Philosophical Magazine, 1861, замѣтимъ, что для случая *полярной зенитной проекціи* меридіаны оказываются въ этой проекціи лучеобразно расходящимися подъ равными углами прямыми, а радіусы параллелей (ρ) вычисляются по формулѣ:

$$\rho = \frac{2R}{M}\left(-\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} \cdot lg\cos\frac{\theta}{2} + tg\frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{cotg}^2\frac{\theta_0}{2} \cdot lg\sec\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \textbf{(190)}$$

гдѣ R—радіусъ земного шара въ избранномъ масштабѣ, M—модуль Бригговыхъ логариѳмовъ, а θ и θ_0—дополненія до 90° широтъ разсматриваемой и предѣльной параллелей карты, т. е.

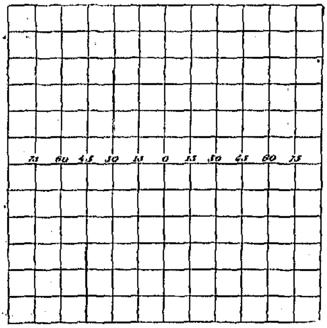
$$\theta = 90° - \varphi \quad \text{и} \quad \theta_0 = 90° - \varphi_0$$

Легко понять, что радіусъ предѣльной параллели ρ_0 на проекціи, необходимый для первоначальныхъ соображеній о масштабѣ, есть

$$\rho_0 = \frac{4R}{M} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\theta_0}{2} \cdot lg\sec\frac{\theta_0}{2}$$

181. Цилиндрическія проекціи. Если вообразить цилиндръ, пересѣкающій или касательный къ земному сфероиду, уменьшенному въ требуемомъ масштабѣ, перенести извѣстнымъ образомъ на его поверхность меридіаны и параллели и затѣмъ, разрѣзавъ по одной изъ образующихъ, развернуть на плоскость, то получатся разные роды цилиндрическихъ проекцій. Простѣйшія изъ этихъ проекцій тѣ, въ которыхъ *ось цилиндра* совпадаетъ съ осью вращенія Земли; въ нихъ меридіаны представляются равноотстоящими параллельными прямыми, а параллели—прямыми, имъ перпендикулярными.

Квадратная проекція. Не только изъ цилиндрическихъ, но и вообще самая простая проекція—это *квадратная* или *плоская*, предложенная въ 1438 г. португальскимъ принцемъ *Генрихомъ* (1394—1460). На ней меридіаны и параллели образуютъ систему равныхъ квадратовъ (черт. 258), которыхъ стороны равны выпрямленнымъ дугамъ экватора между соотвѣтствующими меридіанами.



Черт. 258.

Масштабъ по экватору и по всѣмъ меридіанамъ въ квадратной проекціи равенъ главному масштабу карты, такъ что

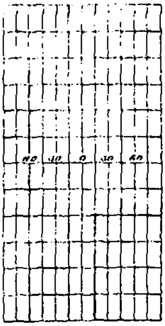
$$m = 1$$

по разнымъ же параллелямъ масштабъ различенъ, и такъ какъ дуги послѣдовательныхъ параллелей на земной поверхности (считая ее шаровою) уменьшаются пропорціонально $\cos\varphi$, а на проекціи остаются неизмѣнными, то масштабы m_1 и M суть:

$$m_1 = \sec\varphi = M$$

Не трудно понять, что на квадратной проекціи можно изображать удовлетворительно только страны экваторіальныя; по мѣрѣ удаленія отъ экватора всѣ очертанія, растягиваясь по долготѣ, все болѣе и болѣе искажаются.

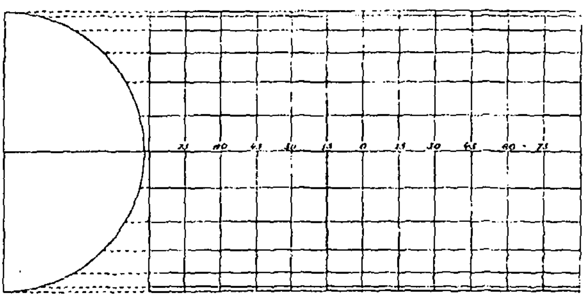
Прямоугольная проекція. Если развернуть на плоскость поверхность цилиндра, пересѣкающаго шаръ по двумъ равноудаленнымъ отъ экватора параллелямъ, то получится *прямоугольная проекція* (черт. 259), предложенная еще *Анаксимандромъ* (610—546 до Р. Х.). Она представляетъ систему равныхъ прямоугольниковъ, большія стороны которыхъ равны выпрямленнымъ дугамъ меридіановъ, а малыя — выпрямленнымъ же дугамъ параллелей сѣченія. Масштабъ по всѣмъ меридіанамъ и по двумъ параллелямъ сѣченія равенъ единицѣ (главному масштабу, въ которомъ построенъ шаръ); масштабы же по внутреннимъ параллелямъ меньше единицы, а по внѣшнимъ больше единицы.



Черт. 259.

Эта проекція примѣняется иногда для изображенія небольшихъ частей земной поверхности, причемъ параллелью сѣченія берется средняя параллель страны.

Изоцилиндрическая проекція. Если поверхность цилиндра, касающагося шара по экватору, пересѣчь плоскостями меридіановъ и параллелей и затѣмъ развернуть на плоскость, то получится эквивалентная проекція, названная предложившимъ ее въ 1772 г. Ламбертомъ *изоцилиндрическою*. Равенство соотвѣтствующихъ частей на шарѣ и на проекціи вытекаетъ изъ того соображенія, что поверхность каждаго шарового пояса равна произведенію окружности большого круга на высоту пояса.



Черт. 260.

Масштабы по меридіанамъ и параллелямъ и масштабъ площадей для этой проекціи выражаются формулами:

$$m = \cos\varphi, \quad m_1 = \sec\varphi \quad \text{и} \quad M = 1$$

Построеніе изоцилиндрической проекціи (черт. 260) не представляетъ затрудненій: разстоянія между меридіанами равны выпрямленнымъ дугамъ экватора, а разстояніе любой параллели съ широтою φ отъ экватора выражается формулою:

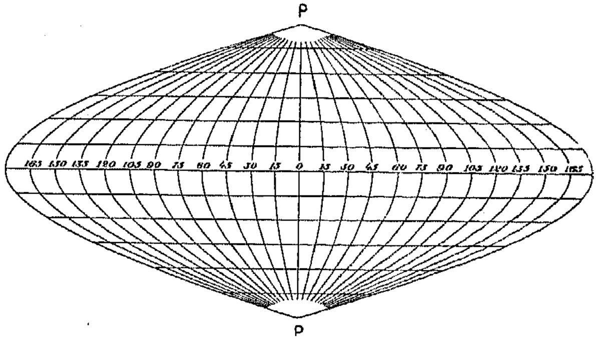
$$y = R \, . \, sin \, \varphi \qquad (191)$$

гдѣ R—радіусъ шара, уменьшеннаго въ главномъ масштабѣ проекціи.

Синусоидальная проекція. Къ цилиндрическимъ же проекціямъ относится проекція французскаго географа *Сансона* (1600—1667), нерѣдко, хотя и неправильно, называемая проекціею *Флемстида* (1646 — 1719), по фамиліи перваго директора Гринвичской Обсерваторіи, который начертилъ по ней свои превосходныя звѣздныя карты. Для построенія этой проекціи на прямой PP, изображающей средній меридіанъ страны, откладываютъ части, равныя выпрямленнымъ дугамъ меридіановъ между послѣдовательными параллелями и черезъ полученныя точки проводятъ прямыя, перпендикулярныя къ PP; онѣ представятъ параллели карты. На каждой изъ нихъ откладываютъ въ обѣ стороны части, равныя дугамъ соотвѣтствующихъ параллелей на шарѣ или сфероидѣ, которыя берутся изъ геодезическихъ таблицъ. Ломаныя или непрерывныя кривыя, получаемыя соединеніемъ соотвѣтствующихъ точекъ на параллеляхъ, изобразятъ различные меридіаны карты.

Такъ какъ основанія и высоты трапецій послѣдовательныхъ рядовъ представляютъ выпрямленныя дуги параллелей и меридіановъ, то каждая отдѣльная плоская трапеція на картѣ равновелика соотвѣтствующей сферической трапеціи на шарѣ, и потому разсматриваемая проекція принадлежитъ къ числу эквивалентныхъ. Что касается очертаній контуровъ на картѣ, то вдоль средняго меридіана они остаются неискаженными, а по мѣрѣ удаленія отъ него на востокъ и западъ все болѣе и болѣе обезображиваются. Хотя масштабъ площадей вездѣ равенъ единицѣ, но линейные масштабы равны единицѣ только по параллелямъ и на среднемъ меридіанѣ; на всѣхъ прочихъ меридіанахъ они больше единицы. Безконечно-малые кружки и квадратики на шарѣ изображаются на проекціи, вообще говоря, равновеликими имъ эллипсами и параллелограммами.

Если по проекціи Сансона построить всю земную поверхность, то получится фигура (черт. 261), на которой меридіаны изобразятся правильно изогнутыми кривыми—синусоидами, почему и самая проекція носитъ иногда названіе *синусоидальной*. Эта проекція можетъ быть еще названа *полицилиндрической*, потому что представляетъ результатъ развертыванія



Черт. 261.

на плоскость системы цилиндровъ, пересѣкающихъ шаръ по послѣдовательнымъ параллелямъ. Она очень часто примѣняется для изображенія небольшихъ странъ, мало растянутыхъ по долготѣ.

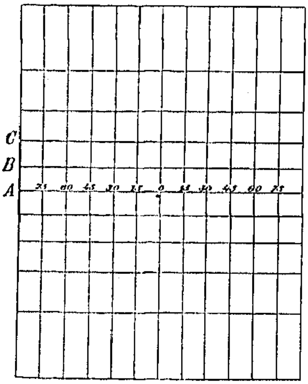
182. Проекція Меркатора. Голландскій картографъ *Меркаторъ* (1512—1594) предложилъ въ 1569 г. конформную цилиндрическую проекцію, которая получила большое распространеніе и до сихъ поръ носитъ его имя. Чтобы преобразовать разсмотрѣнную выше квадратную проекцію въ конформную, т. е. сохраняющую подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ, необходимо было, по мѣрѣ естественнаго на картѣ удлиненія дугъ параллелей, искусственно увеличить длину дугъ меридіановъ въ томъ же отношеніи $sec\,\varphi$. Такимъ образомъ для меридіанныхъ частей AB, AC... отъ экватора до параллелей 1°, 2°... (черт. 262, на которомъ эти отрѣзки соотвѣтствуютъ 15°, 30°...)

надо брать величины:

$$AB = s \,.\, sec\, 1^\circ$$
$$AC = s\,(sec\, 1^\circ + sec\, 2^\circ)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

гдѣ s—длина дуги экватора въ 1°.

Чтобы получить полное подобіе, необходимо увеличивать меридіанныя части не скачками черезъ 1°, а непрерывно; другими словами, надо суммировать секансы не черезъ 1°, а черезъ безконечно-малые промежутки, и, слѣдовательно, меридіанная часть D для любой параллели съ широтою φ должна быть выражена интеграломъ



Черт. 262.

$$D = \int s \,.\, sec\,\varphi \,.\, d\varphi$$

взятымъ въ предѣлахъ отъ 0 до φ. Но такой интегралъ годенъ лишь для шаровой поверхности. Чтобы вывести формулу для сфероидической поверхности Земли, разсмотримъ соотношеніе безконечно-малыхъ элементовъ по меридіану и по параллели на проекціи и на сфероидѣ. Означимъ эти элементы на проекціи черезъ ΔD и Δs, а на сфероидѣ черезъ μ и ν. Условіе подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ требуетъ существованія равенства отношеній

$$\frac{\Delta D}{\Delta s} = \frac{\mu}{\nu} \qquad (a)$$

но

$$\mu = \rho \,.\, \Delta\varphi \quad \text{и} \quad \nu = p \,.\, cos\,\varphi \,.\, \Delta\omega$$

гдѣ ρ и p—радіусы кривизны по меридіану и по первому вертикалу, а знакъ Δ обозначаетъ безконечно-малое приращеніе широты φ и долготы ω. Подставляя вмѣсто ρ и p ихъ значенія по формуламъ (9) и (10), имѣемъ:

$$\mu = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2\, sin^2\varphi)^{3/2}} \,.\, \Delta\varphi \quad \text{и} \quad \nu = \frac{a \,.\, cos\,\varphi}{(1 - e^2\, sin^2\varphi)^{1/2}} \,.\, \Delta\omega$$

и потому вышестоящая пропорція (a) обращается въ слѣдующую:

$$\frac{\Delta D}{\Delta s} = \frac{1 - e^2}{\cos\varphi\,(1 - e^2 \sin^2\varphi)} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta\omega}$$

Вслѣдствіе параллельности всѣхъ меридіановъ, величина Δs на проекціи есть величина постоянная, равная $a \,.\, \Delta\omega$, и потому

$$\Delta D = \frac{a\,(1 - e^2)}{\cos\varphi\,(1 - e^2 \sin^2\varphi)} \cdot \Delta\varphi$$

или, переходя къ предѣлу и интегрируя:

$$D = \int \frac{a\,(1 - e^2)}{\cos\varphi\,(1 - e^2 \sin^2\varphi)} \cdot d\varphi$$

Если положить (см. § 28)

$$\sin\psi = e \sin\varphi$$

то предъидущій интегралъ разложится на два:

$$D = a\int \sec\varphi \,.\, d\varphi - ae\int \sec\psi \,.\, d\psi$$

откуда

$$D = \frac{a}{M} \cdot lg\, tg\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{a}{M} \cdot lg\, tg^e\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right) \quad (192)$$

гдѣ a—длина большой полуоси земного сфероида въ главномъ масштабѣ проекціи, а M — модуль Бригговыхъ логариѳмовъ.

По малости эксцентриситета земного сфероида второй членъ формулы (192) можно разложить въ рядъ и тогда:

$$D = \frac{a}{M} \cdot lg\, tg\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - ae^2 . \sin\varphi - \frac{1}{3} ae^4 . \sin^3\varphi - \frac{1}{5} ae^6 . \sin^5\varphi - \ldots \quad (193)$$

или же, положивъ

$$U = \frac{tg\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{tg^e\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)} \quad (194)$$

получить для D выраженіе въ конечномъ видѣ:

$$D = \frac{a}{M} \cdot lg\, U \quad (195)$$

Для сфероида Кларка (1880) $a = 2\ 989\ 457.4$ саж., и потому будетъ въ саженяхъ:

$$D = 6\ 883\ 481\ lg\,U = [6.837\ 8081]\ lg\,U \qquad (195^*)$$

Значенія величины $lg\,U$ для разныхъ широтъ, вычисленныя по формулѣ (194), для сфероида Кларка (1880), даны въ концѣ книги, причемъ вмѣсто $lg\,U$ тамъ даны $lg\,lg\,U$, т. е. то, что именно нужно для числовыхъ выкладокъ. Впрочемъ, существуютъ и готовыя таблицы величинъ D, вычисленныя для разныхъ элементовъ земного сфероида; такъ, для сфероида Кларка (1880) см. «Таблицы меридіанальныхъ частей для построенія меркаторскихъ картъ» *М. Жданко*, С.-Петербургъ, 1890.

Что касается линейнаго масштаба карты подъ разными широтами, то изъ того соображенія, что длины всѣхъ параллелей на картѣ одинаковы, выходитъ:

$$m = m_1 = \frac{a}{p}\, sec\,\varphi \qquad (196)$$

гдѣ a—большая полуось сфероида, а p—радіусъ кривизны по первому вертикалу на широтѣ φ.

Такимъ образомъ, по мѣрѣ удаленія отъ экватора, масштабъ карты въ проекціи Меркатора быстро увеличивается. Напримѣръ, подъ широтою 60° всѣ линейные размѣры увеличены противъ экваторіальныхъ странъ почти вдвое, а площади ихъ почти въ четыре раза. Всего сильнѣе искажаются, конечно, полярныя страны, а самые полюсы вовсе не могутъ быть изображены на меркаторскихъ картахъ, потому что при $\varphi = 90°$ D и m равны безконечности. Однако полярныя страны до сихъ поръ еще такъ мало извѣстны, что послѣднее обстоятельство не имѣетъ практическаго значенія.

Числовой примѣръ. Построить въ проекціи Меркатора сѣтку меридіановъ и параллелей черезъ 10′ для пространства отъ 59° до 60° сѣверной широты, такъ, чтобы главный масштабъ 5 верстъ въ дюймѣ былъ на параллели $\varphi_0 = 59°30'$.

Длина дуги параллели въ $10' = \frac{600}{\varkappa} . p . cos\,\varphi_0 = \frac{600 . cos\,\varphi_0}{[2]}$

Такъ какъ величины [2] въ геодезическихъ таблицахъ выражены въ саженяхъ на сфероидѣ, то для перевода въ дюймы на бумагѣ при масштабѣ 5 верстъ въ дюймѣ надо въ предъидущее выраженіе ввести еще множитель $^{84}/_{5.500.84}$, и потому на картѣ:

$$\text{Длина дуги параллели въ } 10' = \frac{600}{5.500} \cdot \frac{\cos \varphi_0}{[2]} = 1.770 \text{ дюйма}$$

$$(lg \cos 59^\circ 30' = 9.705\ 4689,\ [2] = 8.837\ 7332)$$

Далѣе по формулѣ (195*) и по геодезическимъ таблицамъ (для $lg\, lg\, U$) вычисляемъ разныя D, причемъ вводимъ объясненный выше множитель $^1/_{5.500}$ и дѣлимъ на m (форм. 196) для $59^\circ 30'$. Въ результатѣ получаемъ слѣдующія величины D отъ экватора и d отъ южной рамки карты:

φ	D въ дюймахъ.	d въ дюймахъ.	Разности.
59° 0′	776.816	0.000	
			3.439
59 10	780.255	3.439	
			3.455
59 20	783.710	6.894	
			3.472
59 30	787.182	10.366	
			3.490
59 40	790.672	13.856	
			3.508
59 50	794.180	17.364	
			3.524
60 0	797.704	20.888	

Для самого построенія надо провести двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя, по оси абсциссъ откладывать произвольное число разъ 1.770 дюйма, а по оси ординатъ величины d; проведя черезъ построенныя точки систему параллельныхъ прямыхъ, получимъ требуемую картографическую сѣтку.

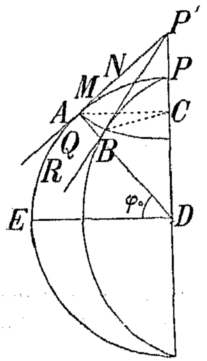
Меркаторская проекція обладаетъ чрезвычайно важнымъ и ей одной присущимъ свойствомъ, имѣющимъ огромное значеніе въ мореплаваніи; именно, локсодроміи изображаются на ней прямыми линіями. *Локсодроміею* называется кривая, проведенная на шарѣ (или на сфероидѣ) такъ, чтобы она пересѣкала всѣ меридіаны подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Судно, плывущее по локсодроміи, во всѣхъ точкахъ пути сохраняетъ одно направленіе (постоянный азимутъ). Такимъ образомъ, если соединить прямою на картѣ Меркатора порты выхода и назначенія, то постоянный уголъ, образуемый этою прямою съ любымъ изъ параллельныхъ на картѣ меридіановъ, даетъ непосредственно азимутъ пути судна. Вотъ почему большинство такъ называемыхъ *морскихъ картъ* составляется по проекціи Меркатора.

Только въ послѣднее время желаніе беречь топливо побуждаетъ плыть не по локсодроміи, а по кратчайшему направленію, т. е. по дугѣ большого круга (на шарѣ; на сфероидѣ по геодезической линіи). Дуга же всякаго большого круга представляется прямою не на меркаторской, а на центральной или гномонической проекціи, по которой и можно брать перемѣнные азимуты пути слѣдованія. Локсодромія же очевидно всегда длиннѣе соотвѣтствующей дуги большого круга; напримѣръ, на широтѣ 60°, при разностяхъ долготъ въ 30°, 60°, 90° и 120° длина дуги большого круга короче дуги параллели соотвѣтственно на 13, 109, 374 и 905 верстъ.

183. Коническія проекціи. Для построенія коническихъ проекцій воображаютъ конусъ, касательный къ земной поверхности или ее пересѣкающій, и затѣмъ, перенеся на этотъ конусъ по извѣстнымъ правиламъ сѣть меридіановъ и параллелей, разрѣзаютъ его по одной изъ образующихъ и развертываютъ на плоскость. Положеніе оси конуса можетъ быть произвольнымъ, но въ наиболѣе распространенныхъ проекціяхъ ось конуса берется совпадающею съ осью вращенія Земли. Выборъ же параллелей касанія или сѣченія зависитъ отъ предѣльныхъ широтъ изображаемой страны; вообще говоря, для касательнаго конуса широта параллели касанія берется среднею ариѳметическою изъ широтъ предѣльныхъ параллелей, а для сѣкущаго широты параллелей сѣченія берутся отстоящими на $^1/_4$ разности широтъ предѣльныхъ параллелей.

Теорія коническихъ проекцій заключаетъ въ себѣ теоріи разсмотрѣнныхъ выше зенитныхъ и цилиндрическихъ, потому что эти послѣднія суть лишь предѣльные случаи соотвѣтствующихъ коническихъ проекцій. Именно, при увеличеніи угла при вершинѣ конуса до 180°, конусъ обращается въ плоскость, а при уменьшеніи его до 0°—въ цилиндръ.

Въ общихъ чертахъ каждая коническая проекція представляется системою лучеобразно расходящихся изъ одной точки прямыхъ (меридіаны), пересѣкаемыхъ системою дугъ концентрическихъ окружностей (параллели), какъ показано на черт. 264. Для случая касательнаго конуса углы между меридіанами на проекціи равны такъ называемому сближенію меридіановъ на параллели касанія. Дѣйствительно, пусть PA и PB (черт. 263) два меридіана, разность долготъ которыхъ равна λ; плоскости этихъ меридіановъ пересѣкаютъ плоскость параллели касанія по прямымъ AC и BC, а поверхность конуса по образующимъ AP' и BP'. Послѣ развертки на плоскость уголъ $\delta = AP'B$ будетъ стягиваться дугою AB, которая на сфероидѣ стягивала уголъ ACB, равный разности долготъ точекъ A и B, т. е. уголъ λ. Такъ какъ углы, стягиваемые круговыми дугами равной длины, обратнопропорціональны радіусамъ, то



Черт. 263.

$$\delta : \lambda = AC : AP'$$

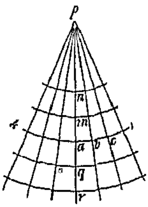
но $AC : AP' = sin\, AP'C$, а $\angle\, AP'C$ равенъ географической широтѣ параллели касанія φ_0 ($AP'C = ADE$, какъ углы со взаимно-перпендикулярными сторонами), слѣдовательно:

$$\delta = \lambda\,.\, sin\, \varphi_0 \tag{197}$$

Отсюда видно, что построеніе меридіановъ въ коническихъ проекціяхъ вообще сводится къ проведенію системы расходящихся изъ одной точки (P') прямыхъ, подъ равными углами δ; этотъ уголъ легко вычисляется по формулѣ (197), когда даны разность долготъ λ послѣдовательныхъ меридіановъ и широта φ_0 параллели касанія. Построеніе параллелей производится различными способами; чаще всего проводятъ круговыя дуги, имѣющія центромъ точку P'.

Легко сообразить, что въ коническихъ проекціяхъ нельзя представить въ видѣ сплошного изображенія не только всю земную поверхность, но и отдѣльный ея поясъ.

Простая коническая проекція. Для изображенія небольшихъ странъ въ мелкомъ масштабѣ чаще другихъ пользуются простою



Черт. 264.

коническою проекціею, упоминаемою еще Птоломеемъ въ XXIV главѣ его «Географіи». Для ея построенія проводятъ меридіаны *pa*, *pb*... (черт. 264) подъ одинаковыми углами δ, вычисляемыми по формулѣ (197), въ которой λ — заданная разность долготъ между послѣдовательными меридіанами, а φ_0—широта параллели касанія, избираемая по серединѣ страны; затѣмъ описываютъ дугу *kl* радіусомъ ρ_0, равнымъ катету AP' прямоугольнаго треугольника ADP' (черт. 263). Впрочемъ, этотъ радіусъ можно и вычислить по формулѣ:

$$\rho_0 = p_0 \, . \, cotg\, \varphi_0 \tag{198}$$

гдѣ p_0 — длина нормали для широты φ_0 (для шара вмѣсто p_0 берутъ его радіусъ R). Далѣе, отъ точки a вверхъ и внизъ по среднему меридіану откладываютъ части am, mn... aq, qr..., равныя выпрямленнымъ дугамъ меридіана на сфероидѣ, которыя берутся изъ геодезическихъ таблицъ въ требуемомъ масштабѣ (для шара эти части, очевидно, равны между собою). Наконецъ черезъ полученныя точки проводятъ круговыя дуги изъ общаго центра p (черт. 264).

Въ этой проекціи масштабъ сохраняется неизмѣннымъ по всѣмъ меридіанамъ и по параллели касанія конуса. На всѣхъ прочихъ параллеляхъ, какъ сѣвернѣе, такъ и южнѣе параллели касанія, масштабъ непрерывно увеличивается. Чтобы доказать это простѣйшимъ образомъ, разсмотримъ случай построенія простой конической проекціи для шара.

Радіусъ ρ какой нибудь параллели φ, согласно объясненному выше способу построенія, представляется формулою:

$$\rho = R \, . \, cotg\, \varphi_0 - R\,(\varphi - \varphi_0) \tag{199}$$

гдѣ разность $\varphi - \varphi_0$ должна быть выражена въ частяхъ радіуса. Длина дуги σ той же параллели на проекціи между двумя послѣдовательными меридіанами равна $\delta . \rho$, а подставляя вмѣсто δ и ρ ихъ выраженія изъ (197) и (199), получимъ:

$$\sigma = \lambda . R \{cos \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi_0\} \tag{a}$$

Истинная же длина соотвѣтствующей дуги параллели s на шарѣ выражается, какъ извѣстно, формулою:

$$s = \lambda . R . cos \varphi \tag{b}$$

Вычитая (b) изъ (a), получаемъ:

$$\sigma - s = \lambda . R \{(cos \varphi_0 - cos \varphi) - (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi_0\}$$

Величина $cos \varphi_0 - cos \varphi$, какъ проекція дуги $\varphi - \varphi_0$, заключается между предѣлами $(\varphi - \varphi_0) \sin \varphi$ и $(\varphi - \varphi_0) \sin \varphi_0$, и потому при $\varphi_0 > o$:

1) Если $\varphi > \varphi_0$, то

$$cos \varphi_0 - cos \varphi > o \quad \text{и} \quad (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi_0 > o$$

и такъ какъ изъ обѣихъ разностей вторая меньше первой, то весь множитель въ скобкахъ { } больше нуля, и, слѣдовательно:

$$\sigma - s > o$$

2) Если $\varphi < \varphi_0$, то

$$cos \varphi_0 - cos \varphi < o \quad \text{и} \quad (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi_0 < o$$

и такъ какъ по числовой величинѣ здѣсь первая разность меньше второй, то все же множитель въ скобкахъ { } больше нуля, и, слѣдовательно, опять

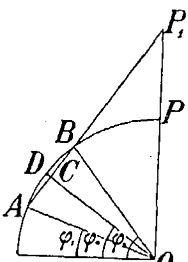
$$\sigma - s > o$$

Подобнымъ же образомъ легко доказать эти неравенства и для $\varphi_0 < o$, хотя это очевидно, потому что конусъ, касающійся параллели южнаго полушарія, имѣетъ лишь обратный видъ (на черт. 263 точка P' будетъ тогда къ югу отъ экватора).

Итакъ, простая коническая проекція не принадлежитъ ни къ эквивалентнымъ, ни къ конформнымъ. Безконечно-малые круги на земной поверхности изображаются на ней равновеликими кругами только по параллели касанія; къ сѣверу и къ югу отъ нея—эллипсами, вытянутыми по долготѣ. Искаженіе очертаній, почти незамѣтное вблизи параллели касанія, быстро возрастаетъ по мѣрѣ удаленія отъ нея, и потому эта проекція пригодна только для изображенія странъ, весьма мало растянутыхъ по широтѣ, хотя по долготѣ могущихъ простираться неопредѣленно далеко.

При увеличеніи угла у вершины конуса до 180°, простая коническая проекція обращается въ проекцію Постеля, а при уменьшеніи его до 0°—въ квадратную.

Проекціи на сѣкущемъ конусѣ. Вмѣсто касательнаго конуса можно вообразить конусъ сѣкущій. Пусть образующая конуса пересѣкаетъ меридіанъ (считая Землю шаромъ) подъ широтами φ_1 и φ_2, въ точкахъ A и B (черт. 265). Уголъ AP_1O, составляемый образующею съ осью конуса, будетъ, очевидно:



Черт. 265.

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} \tag{200}$$

а длина отрѣзка образующей AP_1 выразится суммою $AC + CP_1$; легко видѣть изъ чертежа, что

$$AC = R \, . \, sin \, \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$$

$$CP_1 = R \, . \, cos \, \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} \cdot cotg \, \frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}$$

слѣдовательно:

$$AP_1 = R \cdot \frac{sin \, \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} \cdot sin \, \frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} + cos \, \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} \cdot cos \, \frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}}{sin \, \frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}} = R \cdot \frac{cos \, \varphi_1}{sin \, \varphi_0}$$

или, выражая радіусъ шара R черезъ длину данной хорды AB:

$$R = \frac{AB}{2} \cdot cosec \, \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$$

получимъ:

$$AP_1 = \frac{AB \, . \, cos \, \varphi_1}{2 \, sin \, \varphi_0 \, . \, sin \, \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}} \tag{201}$$

Формулы (200) и (201) даютъ все необходимое для построенія простѣйшей проекціи на сѣкущемъ конусѣ. *Делиль* видоизмѣнилъ эту проекцію въ томъ смыслѣ, что вмѣсто хорды AB въ формулу (201) подставилъ длину дуги AB, причемъ параллели сѣченія (съ широтами φ_1 и φ_2) предложилъ брать равноотстоящими отъ средней и крайнихъ параллелей страны. Такъ, для составленной имъ карты Европейской Россіи, простирающейся между 40° и 70° сѣверной широты, онъ принялъ $\varphi_1 = 47^1/_2{}^\circ$ и $\varphi_2 = 62^1/_2{}^\circ$. Эта карта издана въ 1745 г. въ масштабѣ 34 версты въ дюймѣ на 13 большихъ листахъ.

Легко понять, что при уменьшеніи угла при вершинѣ сѣкущаго конуса до 0° проекція Делиля обращается въ прямоугольную. Замѣчательно, что еще гораздо раньше Делиля такое же построеніе было предложено *Меркаторомъ* и осуществлено въ изданной имъ картѣ Европы, для которой параллелями сѣченія взяты 40° и 60°.

Въ проекціи Делиля, какъ и во всѣхъ другихъ проекціяхъ на сѣкущемъ конусѣ, частные масштабы на параллеляхъ между параллелями сѣченія меньше главнаго, а на параллеляхъ внѣ ихъ—больше главнаго, но уклоненія въ ту и другую стороны не одинаковы. Знаменитый *Эйлеръ* въ мемуарѣ 1778 г. посовѣтовалъ брать такой сѣкущій конусъ, чтобы предѣльныя уклоненія масштабовъ были одинаковы; подъ этимъ условіемъ пытливые читатели могутъ сами легко вывести формулы для параллелей сѣченія, по даннымъ крайнимъ параллелямъ страны.

Проекціи Мöрдока. Положеніе сѣкущаго конуса можно видоизмѣнять весьма различнымъ образомъ и получать множество новыхъ проекцій. Англійскій ученый *Мöрдокъ* предложилъ нѣсколько коническихъ проекцій, удовлетворяющихъ тѣмъ или инымъ требованіямъ.

Въ первой онъ беретъ такой конусъ, чтобы каждая трапеція, ограниченная на картѣ дугами двухъ выпрямленныхъ меридіановъ и крайними параллелями, была равновелика поверхности соотвѣтствующей трапеціи на шарѣ. Аналитически это условіе выражается формулою:

$$2\,\pi\,.\,r\,.\,R\,(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\,\pi\,.\,R^2\,(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$$

гдѣ R — радіусъ шара, φ_1 и φ_2 — широты крайнихъ параллелей страны, а r — искомый радіусъ вращенія средней точки образующей. Для него получается, стало быть, выраженіе:

$$r = R \cdot \frac{\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

Если принять еще, что уголъ, составляемый образующею съ осью конуса, выражается формулою (200), то длина отрѣзка образующей отъ вершины конуса до средней параллели φ_0 будетъ:

$$\rho_0 = \frac{r}{\sin\varphi_0}$$

а радіусы крайнихъ параллелей на проекціи будутъ соотвѣтственно:

$$\rho_1 = \rho_0 + R \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \rho_0 - R \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

Построеніе сѣти начинается съ проведенія двухъ круговыхъ дугъ радіусами ρ_1 и ρ_2, изъ общаго центра которыхъ прочерчиваютъ систему прямолинейныхъ меридіановъ, расходящихся подъ углами

$$\delta = \lambda \cdot \sin\varphi_0$$

гдѣ λ — разность долготъ послѣдовательныхъ меридіановъ, а φ_0 — широта средней параллели страны. Промежуточныя параллели проводятся на равныхъ между собою разстояніяхъ.

На этой проекціи дуги меридіановъ выражаютъ истинныя длины соотвѣтствующихъ дугъ на шарѣ (въ главномъ масштабѣ), дуги же параллелей не равны шаровымъ не только на крайнихъ, но даже и на параллеляхъ сѣченія конуса.

Въ другой проекціи Мöрдокъ предлагаетъ получать различныя параллели на сѣкущемъ конусѣ проектированіемъ соотвѣтствующихъ параллелей шара лучами, расходящимися изъ его центра: получается родъ перспективнаго изображенія шаровой поверхности на поверхности сѣкущаго конуса. Наконецъ въ третьей изъ своихъ проекцій Мöрдокъ выводитъ длину перпендикуляра OC (черт. 265), опущеннаго изъ центра шара на производящую конуса, изъ пропорціи:

$$OC : R = \smile \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} : tg\,\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

Проекція Альберса. Во всѣхъ проекціяхъ Мöрдока сохраняются площади между крайними параллелями, поверхности же отдѣльныхъ трапецій между промежуточными параллелями не эквивалентны: въ мѣстахъ, гдѣ конусъ врѣзается въ шаръ, участки на проекціи выходятъ меньше шаровыхъ, а гдѣ его поверхность лежитъ внѣ шара, наоборотъ, больше шаровыхъ. Вполнѣ эквивалентная коническая проекція предложена люнебургскимъ ученымъ *Альберсомъ* и объяснена въ журналѣ Цаха «Monatliche Correspondenz» за 1805 г. Такъ какъ задача построенія эквивалентной проекціи на сѣкущемъ конусѣ неопредѣленная, то Альберсъ ограничилъ ее условіемъ, чтобы главный масштабъ сохранялся на проекціи по двумъ даннымъ параллелямъ съ широтами φ_1 и φ_2. Изъ этого условія получаются слѣдующія соотношенія между радіусами ρ_1 и ρ_2 этихъ параллелей на проекціи:

$$\rho_1 : \rho_2 = \cos\varphi_1 : \cos\varphi_2$$

$$\rho_1 - \rho_2 = 2R \,.\, tg\,\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

Отсюда, послѣ весьма простыхъ преобразованій, получается:

$$\rho_1 = \frac{R \,.\, \cos\varphi_1}{\sin\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \,.\, \cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}$$

$$\rho_2 = \frac{R \,.\, \cos\varphi_2}{\sin\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \,.\, \cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}$$

Уголъ δ между меридіанами на проекціи вычисляется по формулѣ:

$$\delta = \lambda \,.\, \frac{R \,.\, \cos\varphi_1}{\rho_1} = \lambda \,.\, \frac{R \,.\, \cos\varphi_2}{\rho_2} = \lambda \,.\, \sin\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \,.\, \cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

гдѣ λ—данная разность долготъ. Наконецъ для радіуса ρ любой параллели φ на проекціи условіе эквивалентности даетъ:

$$2\pi \,.\, \frac{\rho + \rho_2}{2} \,.\, \sin\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \,.\, \cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (\rho - \rho_2) = 2\pi \,.\, R^2 (\sin\varphi_2 - \sin\varphi)$$

откуда:

$$\rho = \sqrt{\rho_2^{\,2} + 2R^2 \,.\, \frac{\sin\varphi_2 - \sin\varphi}{\sin\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \,.\, \cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}}$$

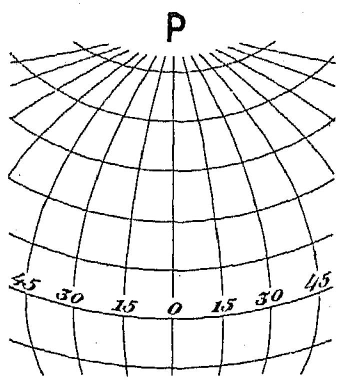
Если въ проекціи Альберса взять не сѣкущій, а касательный конусъ и, слѣдовательно, вмѣсто равенства дугъ на двухъ параллеляхъ принять равенство ихъ только на одной (на параллели касанія), то получилась бы менѣе совершенная, но тоже эквивалентная коническая проекція. При увеличеніи угла у вершины такого касательнаго конуса до 180° эта проекція обращается въ зенитную проекцію Ламберта, а при уменьшеніи его до 0° — въ изоцилиндрическую проекцію.

184. Псевдоконическія проекціи. Всѣ разсмотрѣнныя въ предъидущемъ § проекціи могутъ быть названы чисто коническими, потому что на нихъ сѣть меридіановъ и параллелей представляетъ дѣйствительную развертку конуса, и отличительною ихъ чертою являются прямолинейные, сходящіеся въ одну точку меридіаны. Существуютъ еще проекціи, относящіяся тоже къ роду коническихъ, но представляющія уже условное построеніе и называемыя *псевдоконическими*; изъ нихъ наиболѣе замѣчательны проекціи Бонна и поликоническія.

Проекція Бонна. Французскій инженеръ-географъ *Боннъ* (1727 — 1795), составившій превосходныя карты для многотомной «Encyclopédie Méthodique», предложилъ въ 1752 году, собственно для картъ Франціи, особую проекцію, получившую затѣмъ обширное распространеніе. Проекція Бонна не есть однако что нибудь совершенно новое; намеки на нее можно встрѣтить еще въ картахъ *Аристотеля*. Ея теорія представляетъ какъ бы совмѣщеніе правилъ построенія проекцій простой конической и Сансона, такъ что она обладаетъ достоинствами и свободна отъ недостатковъ обѣихъ. Въ простой конической проекціи главный масштабъ сохраняется по всѣмъ меридіанамъ и по одной лишь параллели, по параллели касанія, по всѣмъ прочимъ параллелямъ масштабъ увеличенъ; въ проекціи же Сансона, наоборотъ, главный масштабъ сохраняется по всѣмъ параллелямъ и по одному лишь среднему меридіану, по всѣмъ прочимъ меридіанамъ масштабъ увеличенъ.

Для построенія проекціи Бонна чертятъ сперва систему дугъ концентрическихъ окружностей совершенно такъ, какъ въ простой конической проекціи; затѣмъ на каждой изъ этихъ дугъ, начиная отъ средняго меридіана, изображающагося ихъ общимъ радіусомъ, откладываютъ истинныя длины дугъ параллелей въ главномъ масштабѣ, по правиламъ, объясненнымъ въ описаніи проекціи Вернера. Всѣ прочіе меридіаны получаются проведеніемъ ломаныхъ или непрерывныхъ кривыхъ линій черезъ соотвѣтствующія точки параллелей, какъ показано на черт. 266. Такъ какъ дуги параллелей здѣсь вообще короче, чѣмъ на простой конической проекціи, то меридіаны выходятъ выпуклыми наружу.

Проекція Бонна принадлежитъ, очевидно, къ эквивалентнымъ: основанія и высоты трапецій на проекціи равны основаніямъ и высотамъ соотвѣтствующихъ трапецій на земной поверхности, и потому онѣ равновелики. Легко сообразить, что безконечно-малые круги и квадраты земной поверхности изображаются на проекціи тоже кругами и квадратами только вдоль средняго меридіана и по параллели касанія; въ прочихъ частяхъ карты они изображаются эллипсами и параллелограммами, большія оси и діагонали которыхъ располагаются въ сѣверо-восточныхъ и юго-западныхъ частяхъ карты въ направленіи съ сѣверо-запада на юго-востокъ, а въ сѣверо-западныхъ и юго-восточныхъ частяхъ, наоборотъ, съ сѣверо-востока на юго-западъ. Наибольшія искаженія очертаній оказываются въ частяхъ карты, наиболѣе удаленныхъ отъ средняго меридіана и параллели касанія.



Черт. 266.

Уклоненіе угла между меридіаномъ и параллелью отъ прямого въ любой точкѣ карты выражается формулою:

$$tg\,\varepsilon = \lambda\left(\cos\varphi\,.\,\frac{R}{\rho} - \sin\varphi\right) \qquad (a)$$

въ которой ε—уголъ, составляемый касательною къ меридіану съ радіусомъ параллели на картѣ, λ—долгота, считаемая отъ средняго меридіана карты, R—радіусъ шара, а φ и ρ—широта и радіусъ параллели. Легко видѣть, что на среднемъ меридіанѣ, гдѣ $\lambda = 0$, и на средней параллели, гдѣ $\rho = R \,.\, cotg\, \varphi$, уголъ ε равенъ нулю, такъ что въ разсматриваемой проекціи сохраняется подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ только на среднемъ меридіанѣ и на средней параллели (параллели касанія).

Линейный масштабъ m выражается приближенною формулою:

$$m = 1 \pm \frac{\varepsilon}{2} \,.\, sin\, 2\alpha$$

гдѣ ε имѣетъ значеніе, опредѣляемое предъидущею формулою (a), а α — азимутъ направленія. Наибольшія уклоненія частныхъ масштабовъ отъ главнаго въ каждой точкѣ оказываются подъ азимутами $\pm 45°$ и $\pm 135°$, причемъ они увеличиваются вмѣстѣ съ ε, т. е. съ удаленіемъ точки отъ средняго меридіана и отъ средней параллели.

Въ проекціи Бонна весьма легко принять въ разсчетъ сфероидичность земной поверхности; для этого радіусъ средней параллели φ_0 надо вычислить по формулѣ

$$\rho_0 = p_0 \,.\, cotg\, \varphi_0 \tag{202}$$

гдѣ p_0—длина нормали въ главномъ масштабѣ подъ широтою φ_0. Затѣмъ длины дугъ, которыя надо откладывать по среднему меридіану и по параллелямъ, берутся изъ геодезическихъ таблицъ для принятыхъ элементовъ сфероида.

Проекція Бонна весьма удовлетворительно представляетъ страны даже значительнаго протяженія; для малыхъ же странъ искаженія очертаній почти не выходятъ изъ предѣловъ всегда неизбѣжной деформаціи бумаги. Такъ, въ большой картѣ Франціи на 269 листахъ, обнимающей 6° по широтѣ и 12° по долготѣ, искаженіе направленій достигаетъ на крайнихъ точкахъ лишь $\pm 15'$, частные же масштабы отличаются отъ главнаго не болѣе, какъ на $1/_{500}$. По этой же проекціи составлена наша Военно-Топографическая карта Европейской Россіи, въ масштабѣ 3 версты въ дюймѣ, обнимающая 24° по широтѣ и 40° по долготѣ. Предѣльныя искаженія направленій и масштаба достигаютъ въ ней $2\frac{1}{2}°$ и $1/_{48}$. Эта карта издается съ 1847 года и до настоящаго времени издано 508 листовъ. Средняя параллель на ней

55°; сѣть меридіановъ и параллелей проведена черезъ 20′. Каждый листъ представляетъ прямоугольникъ въ 22.5×16 дюймовъ.

При увеличеніи угла основного конуса до 180°, проекція Бонна обращается въ проекцію Вернера, а при уменьшеніи его до 0°—въ синусоидальную (Сансона или Флемстида).

Поликоническія проекціи. Англичане и американцы строятъ свои карты въ такъ называемой *поликонической проекціи*, сущность которой заключается въ томъ, что каждая параллель изображается дугою круга, радіусъ которой равенъ отрѣзку касательной, проведенной къ меридіану подъ ея широтою, отъ точки касанія до встрѣчи съ продолженною осью Земли. Центры этихъ дугъ лежатъ на прямой, представляющей средній меридіанъ страны, а разстоянія между параллелями по среднему меридіану равны соотвѣтствующимъ дугамъ меридіана. На дугахъ параллелей, начиная отъ средняго меридіана, откладываются части, равныя дугамъ параллелей, и соотвѣтствующія точки соединяются ломаными или кривыми. Такимъ образомъ въ этой проекціи параллели изображаются неконцентрическими дугами круговъ, а меридіаны, кромѣ средняго, кривыми, обращенными выпуклостью наружу. Для построенія необходимо для каждой параллели особо вычислить величины:

$$\delta = \lambda \, . \, sin \, \varphi$$

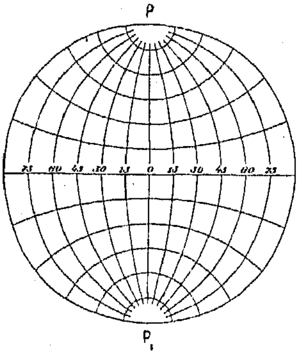
$$\rho = p \, . \, cotg \, \varphi$$

гдѣ λ—долгота отъ средняго меридіана, φ—широта данной параллели, p—длина нормали, δ—уголъ при центрѣ соотвѣтствующей параллели и ρ—ея радіусъ на проекціи.

Разсмотрѣнная проекція не принадлежитъ ни къ эквивалентнымъ, ни къ конформнымъ; однако для странъ, мало растянутыхъ по долготѣ, она весьма пригодна и позволяетъ близко къ истинѣ изображать страны, простирающіяся по широтѣ неопредѣленно далеко, хоть отъ одного полюса до другого.

На черт. 267 изображено въ поликонической проекціи цѣлое полушаріе; прямыми представляются здѣсь только средній меридіанъ и экваторъ (какъ дуга круга съ безконечнымъ радіусомъ). Масштабъ сохраняется по среднему меридіану и по всѣмъ параллелямъ; на прочихъ меридіанахъ частные масштабы больше главнаго.

Въ описанной *простой поликонической проекціи* меридіаны пересѣкаютъ подъ прямымъ угломъ только экваторъ, параллели же они пересѣкаютъ подъ острыми или тупыми углами, но существуетъ еще *ортогональная поликоническая* проекція, на которой, послѣ построенія параллелей по изложенному способу и отложенія истинной длины дугъ только по экватору (или по одной средней параллели страны), проводятъ изъ полученныхъ точекъ меридіаны въ видѣ кривыхъ, пересѣкающихъ всѣ параллели подъ прямыми углами. Построеніе такой проекціи сложнѣе построенія простой поликонической, а выгода ея незначительна, потому что, взамѣнъ неперпендикулярности меридіановъ къ параллелямъ, на ней является другой недостатокъ: кромѣ средняго меридіана главный масштабъ сохраняется только на экваторѣ (или на одной параллели).



Черт. 267.

185. Проекція Гаусса. Выше разсмотрѣны разныя коническія проекціи, въ томъ числѣ и эквивалентная. Остается разсмотрѣть конформную коническую проекцію. Теорію *конформной конической проекціи* далъ впервые *Ламбертъ*, но на нее не обратили первоначально должнаго вниманія, и она была оцѣнена и самая проекція получила широкое распространеніе только послѣ изслѣдованій *Гаусса*, который вывелъ ея свойства вновь, какъ частный случай рѣшенной имъ знаменитой задачи: «изобразить одну поверхность на другой съ сохраненіемъ подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ». Эта задача два раза предлагалась ученому міру Копенгагенскою Академіею Наукъ, и Гауссъ получилъ назначенную премію въ 1822 году.

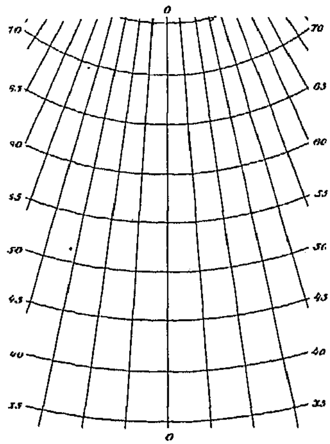
Сѣтка меридіановъ и параллелей проекціи Гаусса (черт. 268) въ общихъ чертахъ похожа на сѣтку всякой другой конической проекціи; разница заключается лишь въ разстояніяхъ между параллелями: начиная отъ наименьшаго разстоянія у средней параллели, они непрерывно увеличиваются къ сѣверу и къ югу.

Означимъ безконечно-малые элементы по меридіану и по параллели на проекціи черезъ $\Delta\rho$ и Δs, а соотвѣтствующіе имъ элементы на сфероидѣ черезъ μ и ν, которые выражаются формулами (см. стр. 706):

$$\mu = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{3/2}} \, . \, \Delta\varphi \qquad \text{и} \qquad \nu = \frac{a \, . \cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{1/2}} \, . \, \Delta\omega$$

Условіе подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ требуетъ, чтобы отношеніе $\Delta\rho : \Delta s$ равнялось отношенію $\mu : \nu$, т. е. чтобы

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta s} = \frac{1 - e^2}{\cos\varphi\,(1 - e^2 \sin^2\varphi)} \, . \, \frac{\Delta\varphi}{\Delta\omega} \qquad (p)$$



Черт. 268.

Величины Δs и $\Delta\omega$ можно исключить посредствомъ соотношеній, справедливыхъ для всякой конической проекціи:

$$\delta = \lambda \, . \sin\varphi_0 = \sin\varphi_0 \, . \, \Delta\omega$$

$$\Delta s = \rho \, . \, \delta = \rho \, . \sin\varphi_0 \, . \, \Delta\omega$$

гдѣ φ_0—уголъ, составляемый образующею конуса съ его осью, т. е. широта параллели, на которой нормали къ сфероиду перпендикулярны къ образующимъ конуса; такъ какъ съ увеличеніемъ φ величина ρ уменьшается, то уравненіе (p) обращается въ слѣдующее:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = - \frac{\sin\varphi_0\,(1 - e^2)}{\cos\varphi\,(1 - e^2 \sin^2\varphi)} \, . \, \Delta\varphi$$

и въ предѣлѣ:

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{\sin\varphi_0\,(1 - e^2)}{\cos\varphi\,(1 - e^2 \sin^2\varphi)} \, . \, d\varphi$$

Отсюда, послѣ интегрированія, получаемъ:

$$\rho = \frac{k}{U^\alpha} \qquad \textbf{(203)}$$

Здѣсь k—постоянная интегрированія, $\alpha = \sin\varphi_0$, а U, согласно обозначенію, введенному уже при разсмотрѣніи проекціи Меркатора (см. стр. 707), вычисляется для каждой широты по формулѣ (194):

$$U = \frac{tg\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{tg^e\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)} \quad \text{гдѣ } sin\,\psi = e\,.\,sin\,\varphi$$

Величина масштаба, одинаковаго по всѣмъ азимутамъ, можетъ быть выражена отношеніемъ $\Delta s : \nu$, а такъ какъ, согласно предъидущимъ формуламъ, $\Delta s = \rho\,.\,sin\,\varphi_0\,.\,\Delta\omega$ и $\nu = p\,.\,cos\,\varphi\,.\,\Delta\omega$, то

$$m = \frac{\rho\,.\,sin\,\varphi_0}{p\,.\,cos\,\varphi} \ {}^{*)} \qquad (m)$$

или, подставляя вмѣсто ρ его значеніе изъ формулы (203) и замѣчая, что $p\,.\,cos\,\varphi = r$ (радіусу параллели на сфероидѣ),

---

*) Масштабъ разсматриваемой проекціи мѣняется только съ широтою отъ одной параллели къ другой и не зависитъ отъ долготы, что имѣетъ важное практическое значеніе. Нерѣдко строятъ для проекцій особый сложный масштабъ (черт. 269), позволяющій пользоваться картою въ проекціи Гаусса съ такимъ же удобствомъ, какъ планомъ. На нѣсколькихъ параллельныхъ прямыхъ откладываютъ значенія масштаба для разныхъ параллелей; если соединить затѣмъ соотвѣтствующія точки непрерывными кривыми, то получится построеніе, на которомъ можно откладывать или брать разстоянія въ любомъ мѣстѣ карты.

Черт. 269.

Легко понять, что наименьшій масштабъ проекціи находится на широтѣ φ_0, равной углу, составляемому образующею конуса съ его осью. Дѣйствительно, если взять производную логариѳма выраженія (m) по φ и замѣтить, что

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{sin\,\varphi_0\,(1 - e^2)}{cos\,\varphi\,(1 - e^2\,sin^2\,\varphi)}\,.\,d\varphi \quad \text{и} \quad \frac{dp}{p} = \frac{e^2\,.\,sin\,\varphi\,.\,cos\,\varphi}{1 - e^2\,sin^2\,\varphi}\,.\,d\varphi$$

то получится, приравнявъ производную нулю:

$$\frac{dlgm}{d\varphi} = \frac{(1 - e^2)\,(sin\,\varphi - sin\,\varphi_0)}{cos\,\varphi\,(1 - e^2\,sin^2\,\varphi)} = 0$$

что возможно лишь при $sin\,\varphi = sin\,\varphi_0$, или $\varphi = \varphi_0$.

а $sin\,\varphi_0 = \alpha$, получимъ:

$$m = \frac{k\,.\,\alpha}{r\,.\,U^{\alpha}} \tag{204}$$

Формулы (203) и (204) съ присоединеніемъ обычной формулы всѣхъ коническихъ проекцій

$$\delta = \lambda\,.\,sin\,\varphi_0 = \lambda\,.\,\alpha \tag{205}$$

содержатъ всю теорію конформной конической проекціи. Постоянныя α и k опредѣляются каждый разъ особо, сообразно частнымъ условіямъ заданной проекціи (см. ниже). Изъ нихъ α выражаетъ синусъ угла, составляемаго образующею конуса съ его осью, а k — радіусъ экватора на проекціи; слѣдовательно, α—число отвлеченное, а k выражается въ тѣхъ линейныхъ единицахъ, въ которыхъ даны геодезическія таблицы (въ саженяхъ). Понятно, что при вычисленіи величинъ, необходимыхъ для построенія проекціи на бумагѣ, это k надо переводить въ другія мѣры, сообразно принятому главному масштабу (напримѣръ, въ дюймы).

При увеличеніи угла у вершины конуса до 180°, проекція Гаусса обращается въ полярную стереографическую, а при уменьшеніи его до 0°—въ проекцію Меркатора. Дѣйствительно:

1) При $\varphi_0 = 90°$, $\alpha = 1$, поэтому формула (204) даетъ (считая Землю шаромъ):

$$m = \frac{k}{R\,.\,cos\,\varphi\,.\,tg\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)}$$

а такъ какъ при $\varphi = 0°$ масштабъ долженъ равняться единицѣ, то изъ этой формулы получается $k = R$, такъ что вообще

$$m = \frac{1}{cos\,\varphi\,.\,tg\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{\left(cos\,\frac{\varphi}{2} + sin\,\frac{\varphi}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\,cos^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

и, обозначая $90° - \varphi$ черезъ θ, имѣемъ

$$m = \frac{1}{2}\,sec^2\,\frac{\theta}{2} \tag{a}$$

Съ другой стороны, формула (203) при $k = R$ и $\alpha = 1$

обращается въ

$$\rho = \frac{R}{tg\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} = R \cdot tg\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \tag{b}$$

Формулы (a) и (b) суть извѣстныя выраженія для масштаба и радіуса параллели полярной стереографической проекціи (см. формулы (d) и (173) § 177).

2) При $\varphi_0 = 0$, $\alpha = 0$. Чтобы перейти къ формуламъ проекціи Меркатора, надо вспомнить, что въ проекціи Гаусса длина ρ считается отъ вершины конуса, а въ проекціи Меркатора длина D считается отъ экватора, и такъ какъ постоянная k въ проекціи Гаусса выражаетъ радіусъ экватора, то, очевидно:

$$D = k - \rho$$

или, подставляя вмѣсто ρ его значеніе изъ (203):

$$D = k - \frac{k}{U^\alpha} = k \cdot \frac{U^\alpha - 1}{U^\alpha}$$

На экваторѣ, представляющемъ здѣсь параллель касанія, масштабъ долженъ равняться единицѣ, слѣдовательно, изъ формулы (204), замѣняя радіусъ параллели r длиною большой полуоси a, имѣемъ:

$$\frac{k \cdot \alpha}{a \cdot U^\alpha} = 1, \quad \text{откуда} \quad k = \frac{a \cdot U^\alpha}{\alpha}$$

Подставляя это значеніе k въ предъидущее выраженіе для D, получимъ:

$$D = \frac{a \cdot U^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{U^\alpha - 1}{U^\alpha} = a \cdot \frac{U^\alpha - 1}{\alpha}$$

Въ предѣлѣ, т. е. при $\alpha = 0$, это выраженіе обращается въ $\frac{0}{0}$; чтобы избавиться отъ неопредѣленности, возьмемъ отношеніе производныхъ числителя и знаменателя, тогда

$$D = a \cdot U^\alpha \cdot \frac{lg\, U}{lg\, e}$$

гдѣ e — основаніе натуральныхъ логариѳмовъ; при $\alpha = 0$ получимъ:

$$D = \frac{a}{M} \cdot lg\, U \tag{c}$$

Наконецъ, выраженіе (204) при $k = \frac{aU^\alpha}{\alpha}$ обращается въ

$$m = \frac{a}{r} = \frac{a}{p} \cdot sec\,\varphi \tag{d}$$

Формулы (c) и (d) суть извѣстныя выраженія проекціи Меркатора (см. формулы (195) и (196) § 182).

Имѣя въ виду обширное примѣненіе проекціи Гаусса для картъ Россіи, разсмотримъ подробнѣе различные ея частные случаи.

I) *Вычислить проекцію, въ которой главный масштабъ сохранялся бы на одной данной параллели.* Этотъ случай соотвѣтствуетъ касательному конусу другихъ коническихъ проекцій.

Условіе $m = 1$ для данной широты φ_0 представится по формуламъ (203) и (204) такъ:

$$\rho_0 = \frac{k}{U_0^{\alpha}} \quad \text{и} \quad \frac{k \cdot \alpha}{r_0 U_0^{\alpha}} = 1$$

откуда, послѣ исключенія U_0^{α} изъ обоихъ уравненій, получаемъ $\alpha = \frac{r_0}{\rho_0}$, а такъ какъ для параллели касанія

$$r_0 = p_0 \cdot cos\,\varphi_0 \quad \text{и} \quad \rho_0 = p_0 \cdot cotg\,\varphi_0,$$

то

$$\alpha = sin\,\varphi_0 \tag{x}$$

Вторая постоянная k получится изъ формулы (203), вставляя въ нее, для φ_0, $\rho_0 = p_0 \cdot cotg\,\varphi_0$:

$$k = p_0 \cdot cotg\,\varphi_0 \cdot U_0^{\alpha} \tag{z}$$

Далѣе, для вычисленія ρ, m и δ пользуются уже общими формулами (203), (204) и (205).

Числовой примѣръ. Вычислить проекцію Гаусса (I-й случай) для Россіи, считая крайними широтами $\varphi_1 = 40°$ и $\varphi_2 = 70°$, съ главнымъ масштабомъ подъ широтою $\varphi_0 = 55°$ и съ сѣткою черезъ 5°.

Для $\varphi_0 = 55°$ изъ геодезическихъ таблицъ имѣемъ:

$$lg\,p_0 = 6.476\,586 \quad \text{и} \quad lg\,lg\,U_0 = 9.697\,973$$

и потому, по формуламъ (x) и (z), получаемъ:

$$lg\,\alpha = 9.913\,365$$
$$lg\,k = 6.730\,450$$

Затѣмъ по формуламъ (203) и (204) вычисляемъ слѣдующую табличку значеній ρ (въ саженяхъ) и m:

φ	$lg\,\rho$	m
70°	6.115 349	1.0417
65	6.196 721	1.0170
60	6.264 037	1.0040
55	6.321 813	1.0000
50	6.372 752	1.0037
45	6.418 611	1.0143
40	6.460 599	1.0316

Наконецъ, по формулѣ (205) получаемъ $\delta = 4^\circ\ 5'\ 44''.8$

Широта φ_0 можетъ быть задана совершенно произвольно, но обыкновенно она берется, какъ среднее ариѳметическое изъ широтъ крайнихъ параллелей страны. По этой проекціи между прочимъ составлены: «Карта Азіатской Россіи» на 8 листахъ (26 × 19 д.), 100 верстъ въ дюймѣ, и новая «Карта пограничной полосы Азіатской Россіи» на 32 листахъ (23 × 20 д.), 40 верстъ въ дюймѣ; для первой параллелью касанія взята широта $\varphi_0 = 54^\circ$, а для второй 44°, меридіаны и параллели на обѣихъ проведены черезъ 2°.

II) *Вычислить проекцію подъ условіемъ, чтобы на крайнихъ параллеляхъ карты масштабы были одинаковы и чтобы наименьшій масштабъ былъ главнымъ.* Этотъ случай соотвѣтствуетъ построенію касательнаго конуса, параллель касанія котораго не дана.

Изъ подставленія въ формулу (204) условія равенства масштабовъ на крайнихъ параллеляхъ φ_1 и φ_2 получается:

$$\frac{k\,.\,\alpha}{r_1\,U_1^{\alpha}} = \frac{k\,.\,\alpha}{r_2\,U_2^{\alpha}}$$

т. е.

$$r_1\,U_1^{\alpha} = r_2\,U_2^{\alpha}$$

откуда для вычисленія первой постоянной α имѣемъ выраженіе:

$$\alpha = \frac{lg\,r_1 - lg\,r_2}{lg\,U_2 - lg\,U_1} \qquad (x)$$

Широта параллели касанія φ_0 опредѣляется изъ уравненія:

$$sin\,\varphi_0 = \alpha \qquad (y)$$

а вторая постоянная k вычисляется, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, по формулѣ:

$$k = p_0 \,.\, cotg\, \varphi_0 \,.\, U_0^{\alpha} \qquad (z)$$

гдѣ p_0 и U_0 должны быть взяты для φ_0. Наконецъ, для вычисленія ρ, m и δ пользуются общими формулами (203), (204) и (205).

Числовой примѣръ. Вычислить проекцію Гаусса (II-й случай) для Россіи, считая крайними широтами $\varphi_1 = 40°$ и $\varphi_2 = 70°$, съ сѣтью меридіановъ и параллелей черезъ 5°.

Изъ геодезическихъ таблицъ имѣемъ:

$$lg\, r_1 = 6.360\,458 \qquad lg\, U_2 = 0.750\,900$$
$$lg\, r_2 = 6.010\,953 \qquad lg\, U_1 = 0.329\,427$$

Отсюда по формулѣ (x):

$$lg\, \alpha = 9.918\,684 \quad \text{и} \quad \varphi_0 = 56°\ 1'\ 17''.1$$

и по формулѣ (z):

$$lg\, k = 6.730\,235$$

Затѣмъ по формуламъ (203) и (204) вычисляемъ слѣдующую табличку значеній ρ (въ саженяхъ) и m для разныхъ широтъ:

φ	$lg\, \rho$	m
70°	6.107 554	1.0358
65	6.189 929	1.0136
60	6.258 074	1.0025
55	6.316 562	1.0002
50	6.368 130	1.0053
45	6.414 554	1.0172
40	6.457 059	1.0358

Наконецъ, по формулѣ (205) получаемъ $\delta = 4°\ 8'\ 46''.5$

III) *Вычислить проекцію, въ которой по двумъ крайнимъ параллелямъ карты масштабы были бы одинаковы, и на третьей данной параллели сохранялся бы главный масштабъ.* Этотъ случай соотвѣтствуетъ сѣкущему конусу, для котораго дана одна изъ параллелей сѣченія.

Постоянная α опредѣляется здѣсь, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, по формулѣ:

$$\alpha = \frac{lg\, r_1 - lg\, r_2}{lg\, U_2 - lg\, U_1} \qquad (x)$$

Постоянная же k выводится изъ условія, чтобы на широтѣ φ_3 масштабъ равнялся единицѣ; именно, формула (204) даетъ:

$$k = \frac{r_3 \,.\, U_3^{\alpha}}{\alpha} \qquad (z)$$

гдѣ r_3 и U_3 выражаютъ значенія r и U для широты φ_3.

Величины ρ, m и δ вычисляются по общимъ формуламъ (203), (204) и (205). Легко замѣтить, что въ этомъ случаѣ, кромѣ параллели φ_3, будетъ еще другая параллель φ_4, на которой масштабъ тоже будетъ равенъ единицѣ, т. е. главному масштабу карты.

Числовой примѣръ. Вычислить проекцію Гаусса (III-й случай) для Россіи по даннымъ: $\varphi_1 = 40°$, $\varphi_2 = 70°$ и $\varphi_3 = 50°$, съ сѣтью меридіановъ и параллелей черезъ 5°.

Для величины α получается по формуламъ (x), какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ:

$$lg\, \alpha = 9.918\,684$$

Далѣе, для $\varphi_3 = 50°$ имѣемъ $lg\, r_3 = 6.284\,528$ и $lg\, lg\, U_3 = 9.640\,151$, и потому по формулѣ ($z$):

$$lg\, k = 6.727\,949$$

Затѣмъ по формуламъ (203) и (204) получаемъ слѣдующую табличку значеній ρ (въ саженяхъ) и m для разныхъ широтъ:

φ	$lg\,\rho$	m
70°	6.105 268	1.0304
65	6.187 643	1.0083
60	6.255 788	0.9972
55	6.314 276	0.9949
50	6.365 844	1.0000
45	6.412 268	1.0119
40	6.454 773	1.0304

Простымъ интерполированіемъ легко вычислить широту φ_4, на которой m тоже единица; φ_4 оказывается около 61° 45′.

Наконецъ, по формулѣ (205) получаемъ $\delta = 4°\ 8'\ 46''.5$

IV) *Вычислить проекцію, на которой по двумъ даннымъ промежуточнымъ параллелямъ сохранялся бы главный масштабъ.* Этотъ случай соотвѣтствуетъ сѣкущему конусу, заданному двумя параллелями сѣченія.

Равенство масштабовъ на данныхъ промежуточныхъ параллеляхъ φ_3 и φ_4, согласно формулѣ (204), приводитъ къ уравненію:

$$\frac{k \,.\, \alpha}{r_3 U_3^{\alpha}} = \frac{k \,.\, \alpha}{r_4 U_4^{\alpha}}$$

изъ котораго для опредѣленія постоянной α имѣемъ формулу:

$$\alpha = \frac{lg\, r_3 - lg\, r_4}{lg\, U_4 - lg\, U_3} \qquad (x)$$

Условіе же, чтобы масштабы на параллеляхъ φ_3 и φ_4 равнялись единицѣ, приводитъ къ выраженіямъ:

$$\frac{k \,.\, \alpha}{r_3 U_3^{\ \alpha}} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{k \,.\, \alpha}{r_4 U_4^{\ \alpha}} = 1$$

откуда получаемъ (съ повѣркою):

$$k = \frac{r_3 U_3^{\ \alpha}}{\alpha} = \frac{r_4 U_4^{\ \alpha}}{\alpha} \qquad (z)$$

Величины ρ, m и δ вычисляются, какъ всегда, по общимъ формуламъ (203), (204) и (205). Въ этомъ случаѣ частные масштабы для пространства между параллелями съ широтами φ_3 и φ_4 выходятъ меньше, а для пространствъ внѣ ихъ—больше главнаго.

Числовой примѣръ. Вычислить проекцію Гаусса (IV-й случай) для Россіи по даннымъ: $\varphi_3 = 50°$, $\varphi_4 = 60°$, съ сѣтью меридіановъ и параллелей черезъ 5°.

Изъ геодезическихъ таблицъ имѣемъ:

$$lg\, r_3 = 6.284\,528 \qquad lg\, U_4 = 0.569\,385$$
$$lg\, r_4 = 6.175\,673 \qquad lg\, U_3 = 0.436\,668$$

Отсюда по формулѣ (x):

$$lg\, \alpha = 9.913\,922$$

и по формулѣ (z):

$$lg\, k = 6.728\,763$$

Затѣмъ по формуламъ (203) и (204) вычисляемъ слѣдующую табличку значеній ρ (въ саженяхъ) и m для разныхъ широтъ:

φ	$lg\, \rho$	m
70°	6.112 872	1.0371
65	6.194 349	1.0128
60	6.261 751	1.0000
55	6.319 601	0.9962
50	6.370 606	1.0000
45	6.416 524	1.0107
40	6.458 565	1.0281

Наконецъ, по формулѣ (205) получаемъ $\delta = 4°\ 6'\ 3''.7$

Параллели, для которыхъ принимается главный масштабъ, избираются обыкновенно такъ, чтобы онѣ дѣлили дугу меридіана между крайними параллелями страны на три равныя части. Такъ, въ построенной по этой проекціи картѣ Европы съ предѣльными широтами $\varphi_1 = 30°$ и $\varphi_2 = 70°$, за параллели съ главнымъ масштабомъ приняты $\varphi_3 = 43° 20'$ и $\varphi_4 = 56° 40'$.

Извѣстная карта Европейской Россіи, изданная Императорскимъ Русскимъ Географическимъ Обществомъ въ 1862 году на 12-ти большихъ листахъ въ масштабѣ 40 верстъ въ дюймѣ, составлена при условіи: $\varphi_1 = 36°$, $\varphi_2 = 68°$, $\varphi_3 = 46°$ и $\varphi_4 = 58°$. Частные ея масштабы суть: на крайней южной параллели 1.031, на крайней сѣверной 1.041, а на средней параллели 52° — 0.995. По этой же проекціи построены новая «Спеціальная Карта Европейской Россіи» въ масштабѣ 10 верстъ въ дюймѣ (до настоящаго времени издано 158 листовъ по 25 × 19 д.) и «Военно-дорожная карта Европейской Россіи» въ масштабѣ 25 верстъ въ дюймѣ (на 16 полныхъ листахъ по 28.5 × 19 д. и пяти клапанахъ); въ обѣихъ главный масштабъ принятъ для параллелей 45° и 59°.

Въ проекціяхъ разсматриваемаго случая, очертанія у сѣверной рамки растягиваются вообще больше, чѣмъ у южной, но для картъ Россіи это обстоятельство не имѣетъ значенія, потому что наши сѣверныя окраины мало населены и еще недостаточно изслѣдованы.

V) *Вычислить проекцію подъ условіемъ, чтобы масштабы на крайнихъ параллеляхъ были одинаковы и чтобы наибольшія уклоненія частныхъ масштабовъ отъ главнаго были равны.* Этотъ случай соотвѣтствуетъ построенію на сѣкущемъ конусѣ, параллели сѣченія котораго не даны.

Назовемъ данныя широты крайнихъ параллелей черезъ φ_1 и φ_2; для опредѣленія постоянной α имѣется извѣстное уже условіе равенства масштабовъ на крайнихъ параллеляхъ, такъ что:

$$\alpha = \frac{lg\, r_1 - lg\, r_2'}{lg\, U_2 - lg\, U_1} \qquad (x)$$

и

$$sin\, \varphi_0 = \alpha \qquad (y)$$

Такъ какъ наибольшій масштабъ оказывается на крайнихъ параллеляхъ, а наименьшій на параллели съ широтою φ_0, то равенство наибольшихъ уклоненій частныхъ масштабовъ въ ту и другую сторону отъ главнаго можетъ быть выражено такъ:

$$\text{Для широты } \varphi_1 \ldots\ldots m_1 = \frac{k\,.\,\alpha}{r_1\, U_1^{\alpha}} = 1 + \varepsilon$$

$$\text{Для широты } \varphi_0 \ldots\ldots m_0 = \frac{k\,.\,\alpha}{r_0\, U_0^{\alpha}} = 1 - \varepsilon$$

Откуда, послѣ сложенія, получается слѣдующая формула для вычисленія постоянной k:

$$k = \frac{2 r_1\, U_1^{\alpha}\,.\,r_0\, U_0^{\alpha}}{\alpha\left(r_1\, U_1^{\alpha} + r_0\, U_0^{\alpha}\right)} \qquad (z)$$

Для вычисленій ρ, m и δ пользуются общими формулами (203), (204) и (205).

Числовой примѣръ. Вычислить проекцію Гаусса (V-й случай) для Россіи, считая крайними широтами $\varphi_1 = 40°$ и $\varphi_2 = 70°$, съ сѣтью меридіановъ и параллелей черезъ 5°.

По формуламъ (x) и (y), подобно тому, какъ въ числовомъ примѣрѣ на II-й случай, получаемъ:

$$lg\,\alpha = 9.918\,684$$

$$\varphi_0 = 56°\ 1'\ 17''.1$$

Далѣе, по формулѣ (z), получаемъ:

$$lg\,k = 6.722\,526$$

Затѣмъ по формуламъ (203) и (204) вычисляемъ слѣдующую табличку значеній ρ (въ саженяхъ) и m для различныхъ широтъ:

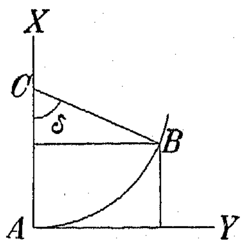
φ	$lg\,\rho$	m
70°	6.099 845	1.0176
65	6.182 220	0.9957
60	6.250 365	0.9849
55	6.308 853	0.9826
50	6.360 421	0.9876
45	6.406 845	0.9993
40	6.449 350	1.0176

Наконецъ, по формулѣ (205) получаемъ $\delta = 4°\ 8'\ 46''.5$

Изъ сопоставленія частныхъ масштабовъ для всѣхъ разсмотрѣнныхъ пяти случаевъ проекціи Гаусса легко замѣтить, что послѣдній, V-й, случай — самый выгодный: при немъ достигается наименьшее искаженіе контуровъ на всемъ пространствѣ карты.

186. Прямоугольныя координаты. Построеніе коническихъ проекцій, на которыхъ меридіаны представляются прямыми, а параллели дугами круговъ, очень просто: вычисленными радіусами ρ чертятъ систему концентрическихъ дугъ и пересѣкаютъ ихъ прямыми, расходящимися изъ общаго центра проведенныхъ дугъ подъ углами δ. Однако при крупномъ масштабѣ, когда карта занимаетъ много листовъ, непосредственное черченіе окружностей весьма большого радіуса и длинныхъ прямыхъ почти невозможно; даже для карты, помѣщающейся на одномъ листѣ, точка встрѣчи меридіановъ оказывается обыкновенно внѣ его и притомъ такъ далеко, что самые большіе штангенъ-циркули недостаточны. Непосредственное вычерчиваніе псевдоконическихъ проекцій съ кривыми меридіанами еще затруднительнѣе.

Гораздо проще и точнѣе строить сѣть по точкамъ, для которыхъ предварительно вычисляютъ прямоугольныя координаты. За ось X-овъ принимаютъ обыкновенно средній меридіанъ карты, а за оси Y-овъ перпендикуляры, возставляемые къ среднему меридіану изъ точекъ встрѣчи его съ послѣдовательными параллелями. Вслѣдствіе полной симметріи коническихъ проекцій по обѣимъ сторонамъ средняго меридіана надо вычислять координаты лишь одной половины карты; для другой половины абсциссы остаются тѣ же, а ординаты берутся со знакомъ минусъ.



Черт. 270.

Пусть на черт. 270 точка B представляетъ мѣсто пересѣченія меридіана CB съ параллелью AB. Радіусъ CA параллели на проекціи и уголъ ACB, составляемый меридіаномъ CB со среднимъ CA, вычисляются по формуламъ для величинъ ρ и δ соотвѣтствующей конической проекціи, причемъ величины CA различны для каждой параллели, а углы ACB представляютъ кратныя отъ δ, т. е. равны δ, 2δ, 3δ .... Для прямоугольныхъ координатъ x и y точки B, какъ легко видѣть изъ чертежа, получаются слѣдующія простыя формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho - \rho \, . \cos n\delta = 2\rho \, . \sin^2 \frac{n\delta}{2} \\ y &= \rho \, . \sin n\delta \end{aligned}\right\} \qquad (206)$$

Если сѣть довольно частая, то координаты послѣдовательныхъ точекъ пересѣченій меридіановъ и параллелей представляютъ ряды правильно возрастающихъ или убывающихъ чиселъ, такъ что можно вычислить координаты не всѣхъ, а только нѣкоторыхъ точекъ, черезъ извѣстные промежутки, прочія получаются интерполированіемъ.

Необходимо замѣтить, что начало координатъ можно переносить изъ одной точки въ другую; если координаты x и y оказываются очень большими, и соотвѣтствующія имъ точки приходятся уже на другомъ листѣ карты, то на каждомъ листѣ проводятъ сперва прямыя, параллельныя первоначальнымъ осямъ X и Y, а новыя координаты x_1 и y_1 получаютъ по формуламъ:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - x_0 \\ y_1 &= y - y_0 \end{aligned} \tag{207}$$

гдѣ x_0 и y_0—старыя координаты новаго начала.

Когда координаты отдѣльныхъ точекъ вычислены и самыя точки нанесены на бумагу, то остается провести меридіаны и параллели. Меридіаны чертятся помощью линейки, а параллели помощью лекала, прикладываемаго къ тремъ послѣдовательнымъ точкамъ. При крупномъ масштабѣ параллели имѣютъ обыкновенно столь незначительную кривизну, что ихъ можно проводить и по линейкѣ отъ точки къ точкѣ.

Числовой примѣръ. Построить проекцію Гаусса (V-й случай) для Европейской Россіи, въ масштабѣ 100 верстъ въ дюймѣ и съ меридіанами и параллелями черезъ 5°. Въ предъидущемъ §, на стр. 733, для этого примѣра вычислены уже ρ и δ. Теперь надо сперва эти ρ, выраженныя въ саженяхъ на сфероидѣ, перевести въ дюймы на бумагѣ. Численный масштабъ въ данномъ примѣрѣ равенъ $^1/_{4\,200\,000}$ и, слѣдовательно, по формулѣ (165) имѣемъ:

$$\rho \text{ въ дюймахъ на бумагѣ} = \frac{1}{50\,000}\,\rho \text{ въ саженяхъ на сфероидѣ}$$

и для разныхъ широтъ получаемъ:

φ	$lg\,\rho$ въ дюймахъ
70°	1.400 875
65	1.483 250
60	1.551 395
55	1.609 883
50	1.661 451
45	1.707 875
40	1.750 380

Далѣе:

	$lg \sin n\delta$	$lg \cos n\delta$
$\delta = 4^\circ\ 8'\ 46.''5$	8.859 154	9.998 862
$2\delta = 8\ 17\ 33.\ 0$	9.159 046	9.995 435
$3\delta = 12\ 26\ 19.\ 5$	9.333 237	9.989 684
$4\delta = 16\ 35\ \ 6.\ 0$	9.455 511	9.981 545
$5\delta = 20\ 43\ 52.\ 5$	9.548 985	9.970 928

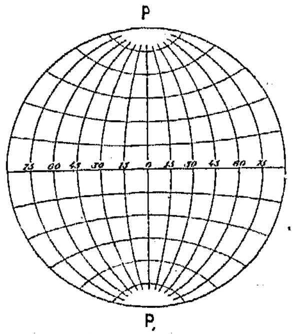
Съ этими величинами по формуламъ (206) получаемъ слѣдующія прямоугольныя координаты (въ дюймахъ) точекъ пересѣченія меридіановъ и параллелей, по которымъ не трудно построить и самую сѣть:

φ	λ	0°	5°	10°	15°	20°	25°
70°	x	0	0.066	0.264	0.591	1.048	1.630
	y	0	1.820	3.630	5.421	7.184	8.910
65	x	0	0.079	0.318	0.714	1.265	1.970
	y	0	2.200	4.388	6.554	8.685	10.770
60	x	0	0.094	0.373	0.836	1.481	2.305
	y	0	2.574	5.134	7.667	10.160	12.600
55	x	0	0.107	0.426	0.956	1.694	2.637
	y	0	2.945	5.874	8.772	11.625	14.417
50	x	0	0.120	0.480	1.077	1.908	2.970
	y	0	3.316	6.615	9.878	13.091	16.234
45	x	0	0.134	0.534	1.198	2.123	3.305
	y	0	3.690	7.361	10.993	14.568	18.066
40	x	0	0.147	0.588	1.321	2.341	3.644
	y	0	4.069	8.118	12.123	16.065	19.923

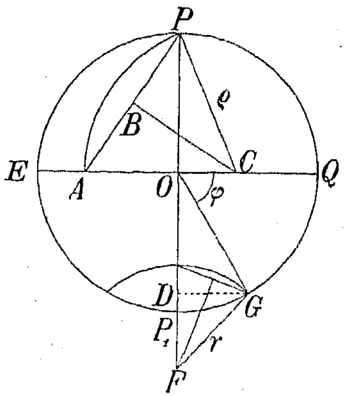
Масштабы подъ разными параллелями даны уже въ табличкѣ на стр. 733. Долготы λ считаются здѣсь отъ средняго меридіана карты, каковымъ для Европейской Россіи принимается обыкновенно меридіанъ 10° къ востоку отъ Пулкова.

187. Условныя проекціи. Проекціи, не получаемыя ни перспективою, ни переносомъ на развертывающіяся въ плоскость поверхности, называются вообще *условными* или *произвольными*. Ниже разсмотрѣны главнѣйшія изъ такихъ проекцій, причемъ, такъ какъ на нихъ изображаютъ обыкновенно цѣлыя полушарія, и въ весьма мелкомъ масштабѣ, то Землю принимаютъ за шаръ.

Шаровая проекцiя. Англiйскiй картографъ *Арроусмитъ* (1750—1823) предложилъ весьма простое построенiе меридiановъ и параллелей изъ однѣхъ круговыхъ дугъ для отдѣльныхъ полушарiй, въ видѣ экваторiальной проекцiи; собственно говоря, Арроусмиту принадлежатъ только введенiе этой проекцiи въ общее употребленiе и названiе шаровой (globular), самое же построенiе изобрѣтено гораздо раньше итальянцемъ *Николози* (1610—1670). Сперва чертятъ кругъ произвольнаго радiуса (въ зависимости отъ масштаба) и проводятъ въ немъ два взаимно-перпендикулярные дiаметра; каждую четверть окруж-



Черт. 271.



Черт. 272.

ности и всѣ четыре радiуса дѣлятъ на равныя части, сообразно густотѣ сѣти, напримѣръ, какъ на черт. 271, на 6 частей, для проведенiя меридiановъ и параллелей черезъ 15°. Затѣмъ проводятъ круговыя дуги по тремъ даннымъ точкамъ: меридiаны—черезъ оба полюса и одну изъ точекъ экватора, а параллели—черезъ соотвѣтствующiя точки основного круга и средняго меридiана; понятно, что центры меридiановъ будутъ лежать на прямой, изображающей экваторъ, а центры параллелей — на прямой PP_1 (или ихъ продолженiяхъ).

Вмѣсто геометрическаго построенiя, радiусы круговъ могутъ быть вычислены по нижеслѣдующимъ, легко выводимымъ изъ чертежа 272-го формуламъ. Называя черезъ R радiусъ основного круга, а черезъ ρ и r радiусы любыхъ меридiана и параллели на проекціи, имѣемъ:

1) Изъ подобія треугольниковъ ABC и AOP:

$$AC : AB = AP : AO$$

по

$$AB \,.\, AP = \frac{1}{2} AP^2 = \frac{R^2 + p^2}{2}$$

гдѣ p — отрѣзокъ AO; слѣдовательно, такъ какъ $AC = PC = \rho$, то:

$$\rho = \frac{R^2}{2p} + \frac{p}{2} \tag{208}$$

2) Изъ прямоугольнаго треугольника DGF:

$$FG^2 = FD^2 + DG^2$$

или

$$r^2 = \{r - (R \sin\varphi - p)\}^2 + R^2 \,.\, \cos^2\varphi$$

откуда

$$r = \frac{R^2 + p^2 - 2\,R \,.\, p \,.\, \sin\varphi}{2\,(R \,.\, \sin\varphi - p)} \tag{209}$$

Въ формулахъ (208) и (209) R—радіусъ основного круга проекціи, т. е. радіусъ Земли, уменьшенный въ требуемомъ масштабѣ, а вмѣсто величинъ p и φ надо вставлять послѣдовательно:

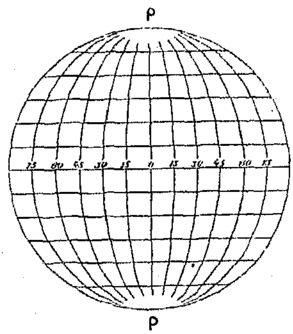
$$\frac{R}{n},\ 2\frac{R}{n},\ 3\frac{R}{n}\ \ldots\ \text{ и }\ \frac{90^\circ}{n},\ 2\frac{90^\circ}{n},\ 3\frac{90^\circ}{n}\ \ldots$$

гдѣ n — число частей, на которыя раздѣлены радіусы и четверти окружности.

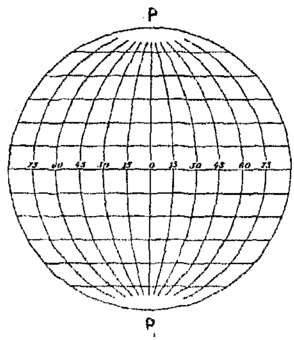
Если на подобныхъ же началахъ построить полярную проекцію, то получилась бы проекція Постеля.

Проекція Араго. Въ своей извѣстной «Общепонятной Астрономіи» *Араго* помѣстилъ карты восточнаго и западнаго полушарій, сѣти которыхъ построены, какъ показано на черт. 273. Вертикальный діаметръ основного круга раздѣленъ на равныя части, соотвѣтственно густотѣ сѣти, и черезъ точки дѣленія проведены перпендикулярныя къ нему прямыя, представляющія земныя параллели. Всѣ эти параллели раздѣлены затѣмъ тоже на равныя части и черезъ соотвѣтствующія точки дѣленія проведены кривыя, изображающія меридіаны; онѣ будутъ, очевидно, эллипсами.

Проекція Апіана. Въ смыслѣ построенія еще проще проекція *Апіана* (1495—1552), изображенная на черт. 274. На ней параллели суть равноотстоящія параллельныя прямыя, какъ и



Черт. 273.

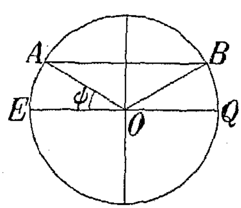


Черт. 274.

въ проекціи Араго, меридіаны же суть дуги круговъ, проводимыя, какъ въ проекціи Арроусмита.

Разсмотрѣнныя три проекціи не сохраняютъ ни подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ, ни площадей.

Гомалографическая проекція. Извѣстный германскій математикъ *Мольвейде* (1774—1825) предложилъ любопытное построеніе, при которомъ очень просто достигается сохраненіе площадей отдѣльныхъ участковъ сѣтки. Вообразимъ кругъ радіуса $R\sqrt{2}$, гдѣ R — радіусъ Земли, уменьшенный въ требуемомъ масштабѣ; площадь такого круга, очевидно, равна поверхности полушара. Положеніе каждой хорды AB (черт. 275), параллельной экватору EQ и изображающей параллель, можетъ быть опредѣлено угломъ AOE, который означимъ черезъ ψ. Чтобы площадь $EABQ$ была равновелика половинѣ поверхности сферическаго пояса, между экваторомъ



Черт. 275.

и параллелью подъ широтою φ (на шарѣ съ радіусомъ R) должно существовать равенство:

$$\triangle ABO + 2 \text{ сектора } AOE = \frac{1}{2} \text{ пов. пояса отъ } \varphi = 0 \text{ до } \varphi$$

$$2\,R^2 . \sin\psi . \cos\psi + 2\,\psi . R^2 = \pi . R^2 . \sin\varphi$$

или, послѣ сокращенія:

$$\sin 2\,\psi + 2\,\psi = \pi . \sin\varphi \tag{210}$$

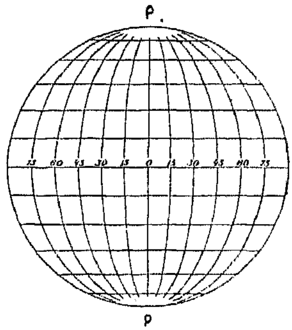
Это уравненіе представляетъ связь между угломъ ψ на проекціи и широтою φ на шарѣ; такъ какъ оно трансцендентное, то вмѣсто опредѣленія ψ по φ предпочитаютъ вычислять φ по ψ и затѣмъ находить разные ψ, соотвѣтствующіе круглымъ числамъ градусовъ въ φ, помощью интерполированія. Вотъ результаты такого вычисленія:

φ	ψ	$Sin\ \psi$	φ	ψ	$Sin\ \psi$
0°	0° 0′ 0″	0.00000	45°	36° 18′ 8″	0.59204
5	3 55 41	0.06851	50	40 37 45	0.65116
10	7 51 49	0.13681	55	45 4 34	0.70804
15	11 48 45	0.20471	60	49 40 31	0.76239
20	15 47 3	0.27202	65	54 28 17	0.81382
25	19 47 10	0.33851	70	59 31 54	0.86191
30	23 49 36	0.40397	75	64 57 58	0.90606
35	27 55 5	0.46820	80	70 58 42	0.94540
40	32 4 17	0.53097	85	78 3 46	0.97838
45	36 18 8	0.59204	90	90 0 0	1.00000

Самое построеніе проекціи Мольвейде заключается въ слѣдующемъ. Сперва чертятъ окружность произвольнаго радіуса r (сообразно масштабу) и проводятъ два взаимно-перпендикулярныхъ діаметра; затѣмъ по вертикальному діаметру вверхъ и внизъ отъ центра окружности откладываютъ части, равныя $r . \sin\psi$, и черезъ полученныя точки проводятъ хорды, параллельныя горизонтальному діаметру; наконецъ, каждую хорду, изображающую параллель, дѣлятъ на равныя части и черезъ соотвѣтствующія точки проводятъ кривыя, которыя представятъ меридіаны и будутъ, очевидно, эллипсами.

Такъ какъ каждая площадка между параллелями на проекціи равновелика соотвѣтствующему полупоясу на шарѣ, то и равныя ея части будутъ тоже равновелики какъ между собою, такъ и соотвѣтствующимъ сферическимъ трапеціямъ п шарѣ, и, слѣдовательно, проекція принадлежитъ къ роду эквивалентныхъ.

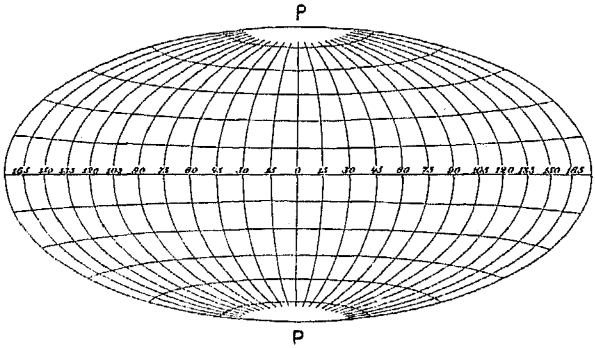
Проекція Мольвейде, описанная впервые въ «Monatliche Correspondenz» барона *Цаха*, сперва не обратила на себя вниманія, по впослѣдствіи она была усердно рекомендована французскимъ ученымъ *Бабине* (1794—1872), который далъ ей названіе *гомалографической*. Не мѣшаетъ замѣтить, что если продолжить экваторъ и параллели внѣ основного круга, съ тѣми же дѣленіями и кривыми черезъ нихъ, то получится эквивалентная карта всей земной поверхности; наоборотъ, ограничиваясь только нѣкоторою частью основного круга, можно по той же проекціи изобразить и небольшую страну.



Черт. 276.

Производныя проекціи. Картографъ извѣстной фирмы *Ашетта* въ Парижѣ, нашъ соотечественникъ, донской казакъ *Аитовъ* предложилъ цѣлый рядъ проекцій, названныхъ имъ *производными* и служащихъ для изображенія всей земной поверхности. Если взять любую сѣтку черезъ $n°$ по широтѣ и долготѣ, представляющую полушаріе въ видѣ экваторіальной проекціи, опустить изъ всѣхъ точекъ пересѣченія меридіановъ и параллелей перпендикуляры на экваторъ и, раздѣливъ всѣ эти перпендикуляры пополамъ, провести черезъ точки дѣленія непрерывныя кривыя (пропустивъ нечетныя параллели), то получится сѣть черезъ $2n°$, представляющая уже не одно полушаріе, а всю земную поверхность.

Производныя проекціи, вообще говоря, не обладаютъ геометрическими свойствами первоначальныхъ; только когда первоначальная сѣть эквивалентна, то и производная проекція тоже эквивалентная. Проекція черт. 277 получена, какъ производ-



Черт. 277.

ная экваторіальной зенитной проекціи, изображенной на чертежѣ 256.

188. Выборъ проекціи. Кто изучилъ свойства различныхъ проекцій и требованія, которымъ должна удовлетворять составляемая карта, тотъ съумѣетъ выбрать подходящую проекцію въ каждомъ частномъ случаѣ. Ниже перечислены проекціи, наиболѣе пригодныя для изображенія всей земной поверхности, полушарій, частей свѣта и отдѣльныхъ странъ, однако дать вполнѣ опредѣленныя правила здѣсь невозможно: удачный выборъ проекціи для данной части земной поверхности зависитъ прежде всего отъ опытности картографа.

Всю земную поверхность на такъ называемыхъ морскихъ картахъ изображаютъ въ проекціи Меркатора, сохраняющей румбы и подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ; если требуется сохраненіе площадей, то берутъ изоцилиндрическую или синусоидальную проекцію, а также проекцію Мольвейде.

Если требуется изобразить не всю, а *часть земной поверхности*, бо́льшую полушарія, то прибѣгаютъ къ перспективнымъ проекціямъ Джемса и Кларка или къ проекціи съ уравниваніемъ ошибокъ (Эри).

Сѣверное и южное *полушарія* въ видѣ двухъ отдѣльныхъ картъ изображаютъ въ полярной стереографической проекціи, а также въ проекціяхъ Лаира и Постеля; при условіи сохраненія площадей берутъ проекцію Ламберта. Восточное и западное *полушарія*, как это *дѣлается на стѣнныхъ картахъ* и въ учебныхъ атласахъ, изображаютъ обыкновенно въ проекціяхъ шаровой, Араго и Мольвейде; если желаютъ сохранить подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ, то прибѣгаютъ къ экваторіальной стереографической проекціи.

Для цѣлыхъ *странъ свѣта* въ мелкомъ масштабѣ пользуются по большей части разными видами коническихъ проекцій, причемъ за среднiй меридіанъ на картѣ берутъ среднiй меридіанъ страны. Для Европы наиболѣе удобны проекціи простая коническая, Делиля и Гаусса; для Азіи — проекція Бонна, а для Сѣверной Америки—поликоническія. Для Африки и Южной Америки, лежащихъ по обѣ стороны экватора, достаточно хороши простѣйшія цилиндрическія проекціи—квадратная и прямоугольная; для нихъ же берутъ проекцію Меркатора при условіи сохраненія подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ и проекціи Сансона и Мольвейде — при условіи сохраненія площадей.

Выборъ проекціи *для отдѣльной страны* зависитъ отъ фигуры и географическаго положенія страны по широтѣ, а также отъ величины ея и масштаба карты. Если страна простирается на большое число градусовъ по широтѣ и малое по долготѣ (Скандинавія, береговыя области Америки), то берутъ проекцію Бонна или поликоническія; если же, наоборотъ, страна простирается на большое число градусовъ по долготѣ и малое по широтѣ (вся Россія), то всѣхъ лучше проекція Гаусса. Для странъ экваторіальныхъ берутъ въ послѣднемъ случаѣ проекціи Сансона и Меркатора, а для полярныхъ—разные виды зенитныхъ проекцій. Въ мелкомъ масштабѣ, напримѣръ, въ учебныхъ атласахъ, отдѣльныя страны умѣренныхъ поясовъ изображаютъ въ простой конической проекціи, а страны экваторіальныя — въ квадратной или въ проекціи Сансона. Въ крупномъ масштабѣ всѣ проекціи даютъ значительныя искаженія линейныхъ разстояній, и такъ какъ въ этомъ случаѣ для большой страны необходимо очень много отдѣльныхъ листовъ, которые невозможно соединять одновременно въ одну карту, то всего лучше пользоваться многогранною проекціею, что и примѣнено, напримѣръ, въ новѣйшей топографической картѣ Австріи. Если страна очень мала (губернія или уѣздъ), то всѣ проекціи даютъ весьма схожее изображеніе, потому что въ предѣлѣ каждая проекція обращается въ отдѣльную трапецію многогранной проекціи.

Въ существующихъ изданіяхъ, особенно въ географическихъ атласахъ, весьма рѣдко указывается, въ какой проекціи составлена та или другая карта, между тѣмъ на желательность и необходимость такихъ указаній обращалъ вниманіе еще Меркаторъ. Кромѣ того, въ виду всегда неизбѣжной деформаціи бумаги, было бы далеко не лишнимъ чертить и печатать линейный масштабъ карты не въ одномъ только мѣстѣ, а вдоль всѣхъ четырехъ рамокъ каждаго листа: тогда пользующійся картою можетъ принимать въ разсчетъ деформацію бумаги по крайней мѣрѣ въ двухъ главныхъ направленіяхъ.

Не смотря на большое число и разнообразіе существующихъ проекцій, постоянно изобрѣтаются новыя. Это обстоятельство показываетъ, что нынѣ извѣстныя проекціи еще не достаточно хороши, и картографамъ открыто впереди обширное поле дѣятельности. Изъ новѣйшихъ проекцій весьма замѣчательна, хотя еще не примѣнена на дѣлѣ проекція нашего знаменитаго математика *Чебышева;* занимаясь проекціями, сохраняющими подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ, онъ указалъ, что если задаться построеніемъ такой проекціи для данной страны, т. е. для части земной поверхности, ограниченной извѣстнымъ контуромъ, то изъ всѣхъ проекцій наименьшее искаженіе очертаній будетъ въ той, для которой масштабъ по предѣльному контуру равенъ единицѣ. Эта замѣчательная теорема доказана была только впослѣдствіи докторомъ чистой математики *Граве*, который, между прочимъ, вычислилъ на этомъ началѣ сѣтку для Европейской Россіи, показавъ, что предѣлы перемѣнъ масштаба выходятъ на ней въ три раза меньше, чѣмъ на проекціи Гаусса.

XVI.

Составленіе картъ.

189. **Картографическіе матеріалы.** Подъ составленіемъ картъ разумѣютъ дѣйствія, посредствомъ которыхъ готовая картографическая сѣтка заполняется уменьшенными изображеніями контуровъ мѣстности. Приступая къ составленію карты цѣлой страны или отдѣльной области, прежде всего собираютъ имѣющіеся для нея матеріалы, каковы: астрономическія и тригонометрическія точки, разнаго рода съемки, описанія и замѣтки путешественниковъ и т. д.

1) *Астрономическія и тригонометрическія точки.* Самымъ надежнымъ матеріаломъ для составленія карты мало извѣстной страны служатъ точки, для которыхъ даны географическія координаты, т. е. широты и долготы (а также высоты и азимуты). Если эти координаты получены непосредственно изъ астрономическихъ наблюденій, то точка называется *астрономическою*, если же онѣ вычислены изъ тріангуляцій или другихъ геодезическихъ работъ, то *тригонометрическою*. Нанесеніе точки, извѣстной по широтѣ и долготѣ, на картографическую сѣть не представляетъ затрудненій только въ томъ случаѣ, если имѣющіяся данныя единичны и несомнѣнны; въ большинствѣ же случаевъ картографу приходится имѣть дѣло съ нѣсколькими противорѣчивыми данными. Если, напримѣръ, для одной точки имѣются нѣсколько астрономическихъ опредѣленій или результаты нѣсколькихъ геодезическихъ вычисленій, не совсѣмъ согласныхъ, то картографъ долженъ обратиться къ подлиннымъ журналамъ наблюденій и убѣдиться,

насколько эти данныя заслуживаютъ довѣрія и не относятся-ли онѣ къ разнымъ мѣстамъ; иногда подъ однимъ названіемъ даются разныя мѣста, напримѣръ, колокольня и куполъ одной церкви или даже разныя точки одного города. Обыкновенно сомнѣнія разъясняются послѣ внимательнаго прочтенія описаній, имѣющихся въ полевыхъ журналахъ. Но противорѣчивыя данныя могутъ относиться и къ одной и той же точкѣ, особенно если астрономическія наблюденія произведены инструментами различной точности, а геодезическія вычисленія сдѣланы по разнымъ тріангуляціямъ. Въ такихъ случаяхъ, если имѣющіяся данныя одной точности, то берутъ простыя ариѳметическія среднія отдѣльно изъ широтъ и отдѣльно изъ долготъ; если же точность данныхъ различна, то необходимо взвѣсить ихъ относительныя достоинства и вывести такъ называемыя вѣсовыя среднія *). При значительныхъ разногласіяхъ приходится вовсе отказываться отъ иныхъ точекъ или же снаряжать дополнительныя экспедиціи для новыхъ ихъ опредѣленій.

2) *Инструментальныя съемки.* Подлинные брульоны инструментальныхъ съемокъ, основанныхъ на астрономическихъ и тригонометрическихъ точкахъ, съ рамками по меридіанамъ и параллелямъ, сами по себѣ представляютъ уже части географической карты; картографу остается лишь уменьшить ихъ въ требуемомъ масштабѣ и выбросить излишнія подробности. Къ сожалѣнію, въ виду громадности издержекъ и продолжительности производства точныхъ инструментальныхъ съемокъ, онѣ имѣются лишь для густо населенныхъ и культурныхъ странъ. Въ Европейской Россіи такія съемки произведены только въ западной ея полосѣ; для другихъ частей существуютъ инструментальныя съемки только на отдѣльныхъ участкахъ.

3) *Глазомѣрныя съемки.* Для многихъ областей имѣются

---

*) Особенно осторожнымъ надо быть въ отношеніи долготъ, какъ элемента, получаемаго не абсолютно, а относительно другихъ точекъ. Если, напримѣръ, въ рядѣ астрономическихъ точекъ, долготы которыхъ получены хронометрическими рейсами, нѣкоторыя опредѣлены впослѣдствіи помощью телеграфа, то необходимо ввести поправки и въ долготы всѣхъ основанныхъ на нихъ точекъ.

лишь весьма скудныя топографическія данныя, такъ что глазомѣрныя съемки являются единственнымъ матеріаломъ для составленія географической карты. Какъ ими пользоваться, объяснено ниже; здѣсь же необходимо прибавить, что иногда глазомѣрныя и вообще съемки малой точности служатъ для исправленія и пополненія самыхъ лучшихъ инструментальныхъ съемокъ. Если, напримѣръ, въ распоряженіи картографа имѣются для извѣстной области старая инструментальная и новѣйшая глазомѣрная съемки, то постоянные контуры и рельефъ мѣстности надо брать со старой съемки, элементы же измѣняющіеся, именно, жилыя мѣста, дороги, границы лѣсовъ, пашенъ и болотъ и т. п. лучше брать съ новой, хотя и менѣе точной съемки.

4) *Маршруты.* Географы и ученые путешественники составляютъ такъ называемые маршруты или глазомѣрныя съемки своихъ путей съ зарисовкою подробностей по сторонамъ лишь постольку, поскольку мѣстность видима, не съѣзжая съ дороги. Для мало извѣстныхъ областей центральныхъ частей Азіи, Африки и Австраліи существуютъ только маршруты, и задача картографа заключается въ сведеніи такихъ маршрутовъ въ одно цѣлое, причемъ на картѣ все еще останутся обширныя пространства, для которыхъ или вовсе ничего не имѣется, или имѣются лишь описанія и разспросныя свѣдѣнія.

5) *Описанія.* Кромѣ разсмотрѣнныхъ числовыхъ и графическихъ матеріаловъ для многихъ странъ имѣются описанія и замѣтки путешественниковъ. Данныя, извлекаемыя картографомъ изъ этихъ источниковъ, служатъ частью для исправленія и дополненія существующихъ картъ и съемочныхъ брульоновъ, частью же являются единственнымъ матеріаломъ для заполненія пустыхъ пространствъ, остающихся на составляемой картѣ послѣ нанесенія всѣхъ другихъ свѣдѣній. Описанія и замѣтки умныхъ путешественниковъ доставляютъ зачастую весьма надежныя данныя: такъ, указанія на длину полуденной тѣни шеста извѣстной высоты, на продолжительность дня, видимость какой нибудь звѣзды у горизонта въ направленіи сѣвера или юга и т. п. позволяютъ вычислить широту мѣста; случайное наблюденіе покрытія звѣзды Луною, солнечнаго затмѣнія или

затменій спутниковъ Юпитера, въ связи съ опредѣленіемъ мѣстнаго времени,—долготу мѣста; замѣчаніе, что восходъ или закатъ Солнца или Луны наблюдался въ направленіи на извѣстную гору, позволяетъ вычислить азимутъ и т. д. Очень цѣнны также указанія на время переѣзда изъ одного мѣста въ другое, на доступность и крутизну горныхъ проходовъ, обширность и расположеніе жилыхъ мѣстъ, направленіе теченія и ширину рѣкъ и т. п.

Когда имѣющіеся картографическіе матеріалы собраны и изслѣдованы, то не трудно уже сообразить, какого рода карта и въ какомъ масштабѣ можетъ быть по нимъ составлена. Многіе жалуются на разнообразіе масштабовъ и способовъ изображенія на существующихъ картахъ; къ сожалѣнію это разнообразіе зависитъ не отъ картографовъ, а отъ различія матеріаловъ. Если для мало извѣстной страны взять такой же крупный масштабъ, какой примѣняется для культурныхъ государствъ Европы, то получились бы почти пустые листы; наоборотъ, если для густонаселенной страны принять мелкій масштабъ, то нагроможденіе контуровъ и подписей лишило бы карту всякой наглядности.

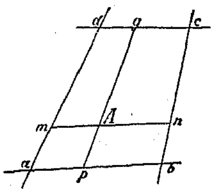
О масштабахъ и проекціяхъ, примѣняемыхъ къ картамъ Россіи, было сказано въ предъидущей главѣ, см. § 185.

190. Заполненіе картографической сѣти. Если для пространства карты имѣются точныя инструментальныя съемки съ рамками по меридіанамъ и параллелямъ, то картографическую сѣть разбиваютъ сперва дополнительными меридіанами и параллелями на трапеціи, соотвѣтствующія трапеціямъ съемочныхъ брульоновъ, а затѣмъ каждый брульонъ перерисовываютъ въ уменьшенномъ видѣ на свое мѣсто. Хотя масштабъ на картѣ мѣняется отъ точки къ точкѣ, но его перемѣны на протяженіи одной трапеціи обыкновенно меньше неизбѣжныхъ ошибокъ графическихъ построеній, и потому такая перерисовка можетъ быть произведена по квадратикамъ, при помощи пантографа (см. § 191) или безъ ручного труда, путемъ фотографіи (см. § 198). Работа картографа сводится здѣсь только къ выбрасыванію подробностей и обобщенію контуровъ.

При значительномъ уменьшеніи масштаба далеко не всѣ предметы должны перейти со съемочныхъ брульоновъ на карту. Переполненіе подробностями вовсе не составляетъ достоинства карты; напротивъ того, надо заботиться объ ея ясности и выразительности. Искусство расцѣнки важнаго и излишняго пріобрѣтается, конечно, только опытомъ, но вотъ нѣкоторыя общія указанія. Очертанія мѣстныхъ предметовъ, вообще говоря, не выпускаются, а только упрощаются и притомъ постепенно, по мѣрѣ уменьшенія масштаба. Такъ, очертанія населеннаго мѣста, напримѣръ, города, на съемочныхъ брульонахъ очень сложны и извилисты: при небольшомъ уменьшеніи масштаба опускаютъ мелкіе изгибы, выкидываютъ переулки и боковыя улицы, сводя нѣсколько кварталовъ въ одинъ, пропускаютъ отдѣльныя зданія и т. п.; при дальнѣйшемъ уменьшеніи масштаба очертанія еще болѣе упрощаютъ, изъ улицъ и кварталовъ оставляютъ только главные; наконецъ, при переходѣ къ мелкому масштабу географическихъ картъ городъ показывается правильнымъ кружкомъ, т. е. условнымъ знакомъ. Подобнымъ же образомъ, при перерисовкѣ рѣчной системы выкидываютъ постепенно сперва мелкія извилины береговъ, острова, развѣтвленія, рукава устья, мелкіе притоки; затѣмъ болѣе крупныя извилины и бо̀льшіе притоки и т. д. Другія подробности, напримѣръ, очертанія лѣсовъ, границы волостей и уѣздовъ, сперва упрощаются, а потомъ выбрасываются; многіе предметы, изображаемые на топографическихъ планахъ контурными условными знаками, представляются на картахъ масштабными.

Гораздо труднѣе составлять карту по разнороднымъ матеріаламъ. Картографъ долженъ сперва разобрать ихъ критически и вносить на мѣсто послѣдовательно, начиная съ данныхъ, наиболѣе точныхъ. Прежде всего наносятся астрономическія и тригонометрическія точки, затѣмъ очертанія рѣкъ, озеръ, горъ и пр. съ имѣющихся инструментальныхъ и глазомѣрныхъ съемокъ и, наконецъ, въ оставшіяся пустыя мѣста вносятся подробности, взятыя съ маршрутовъ или изъ описаній. Такъ какъ зачастую на пространствѣ составляемой карты для одного мѣста имѣются многочисленныя и точныя данныя, а для другихъ данныхъ очень мало и менѣе точныхъ, то для разныхъ частей одной и той же карты приходится примѣнять различные пріемы.

Если имѣющіяся съемки не были основаны на астрономическихъ и тригонометрическихъ точкахъ, и границы брульоновъ не меридіаны и параллели, а естественныя урочища, напримѣръ, берега рѣкъ и озеръ, горные хребты и т. п., то, вслѣдствіе неизбѣжныхъ погрѣшностей, смежныя границы послѣдовательныхъ участковъ иногда не совпадаютъ; поэтому при сведеніи такихъ участковъ въ одно цѣлое могутъ оказаться или лишнія части, или же пустые промежутки, не терпимые на картѣ. Когда другихъ матеріаловъ не имѣется, то картографъ дѣлаетъ «сводку», руководствуясь собственными соображеніями и опытностью; если же, помимо съемокъ, имѣются для того же пространства астрономическія или тригонометрическія точки (опредѣленныя, напримѣръ, послѣ производства съемки), то работа начинается съ нанесенія этихъ точекъ на картографическую сѣть и на съемочные брульоны.



Черт. 278.

Нанесеніе точекъ на сѣть правильныхъ трапецій объяснена въ § 172; но сѣть можетъ имѣть и неправильный видъ. Во всякомъ случаѣ каждый четыреугольникъ, ограниченный послѣдовательными меридіанами и параллелями, можно считать прямолинейнымъ; положимъ, что фигура $abcd$ (черт. 278) представляетъ часть карты съ пограничными меридіанами $2°10'$ и $2°20'$ и параллелями $59°40'$ и $59°50'$, и требуется нанести точку A по географическимъ координатамъ $\varphi = 59°43'$ и $\omega = 2°14'$. Для этого по четыремъ сторонамъ откладываютъ отрѣзки:

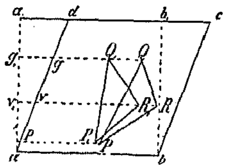
$$am = \frac{3}{10}\,ad,\ bn = \frac{3}{10}\,bc,\ ap = \frac{4}{10}\,ab \text{ и } dq = \frac{4}{10}\,dc$$

Точка A опредѣлится пересѣченіемъ прямыхъ mn и pq.

Когда предстоитъ нанести много точекъ на одну сѣтку, то облегчаютъ работу, заготовивъ предварительно вспомогательные масштабики на полоскахъ бумаги; такіе масштабики съ подраздѣленіями на минуты дуги (а иногда и на десятки секундъ) должны быть заготовлены для всѣхъ имѣющихся на сѣткѣ разстояній по меридіанамъ и по параллелямъ.

Нанесеніе точекъ на брульоны съемокъ производится по описаніямъ, имѣющимся въ журналахъ наблюденій. Если данная точка находится вблизи постояннаго мѣстнаго предмета, напримѣръ, колокольни церкви, то обыкновенно имѣются и приведенія широтъ и долготъ къ этому предмету; если же такихъ приведеній нѣтъ, а даны лишь элементы приведеній, то самыя приведенія вычисляются картографомъ по формуламъ (118).

Иногда кромѣ точекъ, извѣстныхъ по своимъ географическимъ координатамъ, имѣются еще другія, для которыхъ даны лишь разстоянія отъ астрономическихъ или тригонометрическихъ точекъ. Такъ какъ каждая проекція искажаетъ разстоянія, то построеніе исполняется слѣдующимъ образомъ. Пусть требуется нанести точку R (черт. 279) по разстояніямъ ея отъ двухъ данныхъ на проекціи точекъ P и Q. Прежде всего изъ концовъ дуги параллели ab возставляютъ перпендикуляры aa_1 и bb_1 и черезъ данныя точки P и Q проводятъ прямыя, параллельныя ab; отложивъ $p_1P_1 = pP$ и $q_1Q_1 = qQ$, получимъ точки P_1 и Q_1. Затѣмъ на P_1Q_1, какъ на базисѣ, строятъ треугольникъ $R_1P_1Q_1$ по даннымъ сторонамъ P_1R_1 и Q_1R_1, взятымъ въ требуемомъ масштабѣ, проводятъ черезъ R_1 прямую, параллельную ab, откладываютъ $rR = r_1R_1$ и получаютъ положеніе точки R на проекціи.



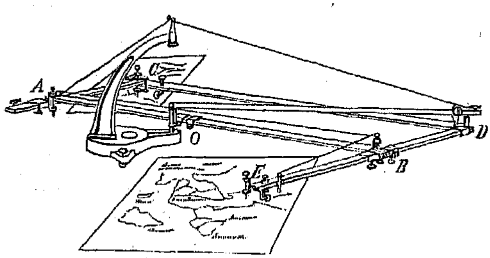
Черт. 279.

Если дуги параллелей ab и dc на проекціи не параллельны, то прямыя ab и dc продолжаютъ до пересѣченія въ нѣкоторой точкѣ s; изъ нея, какъ изъ центра, проводятъ дуги aa_1 и bb_1, а вспомогательныя прямыя Pp, Qq и Rr проводятъ черезъ точку s; во всемъ прочемъ построеніе не отличается отъ вышеобъясненнаго.

Точки, нанесенныя на картографическую сѣть и на съемочные брульоны, соединяютъ затѣмъ прямыми и образуютъ такъ называемую *географическую тріангуляцію*. Треугольники на картографической сѣткѣ и на съемочныхъ брульонахъ вообще оказываются не подобными (главнымъ образомъ отъ ошибокъ съемокъ, но частью и отъ погрѣшностей нанесенія точекъ);

картографъ долженъ внести подробности контуровъ съ наименьшими искаженіями. Тутъ работаютъ *по треугольникамъ*, т. е. перерисовку исполняютъ въ каждомъ треугольникѣ отдѣльно. Если треугольники не велики, то работа эта дѣлается на глазъ; въ противномъ же случаѣ треугольники на картѣ и на съемкѣ подраздѣляютъ на мелкіе, системами вспомогательныхъ прямыхъ. Чтобы не графить линій на подлинныхъ листахъ съемки, на нихъ накладываютъ стеклянныя или роговыя пластинки, раздѣленныя на мелкіе квадратики. Иногда и здѣсь пользуются пантографомъ.

191. Пантографъ. Для перерисовки плановъ и чертежей, въ томъ же или измѣненномъ масштабѣ, служитъ *пантографъ*, изобрѣтенный около 1635 года ученымъ іезуитомъ *Шейнеромъ* (1575 — 1650) и впослѣдствіи значительно усовершенствованный. На черт. 280 изображенъ общій видъ пантографа цюрихскаго механика *Коради*. Онъ состоитъ изъ четырехъ брусковъ, соединенныхъ шарнирами и образующихъ параллелограммъ. Бруски AB и CD представляютъ постоянныя стороны параллелограмма, а бруски AC и DE — перемѣнныя, для чего шарниры A и B устроены въ подвижныхъ обоймицахъ, такъ что брусокъ AB можно приближать и удалять отъ бруска CD и устанавливать въ любомъ, параллельномъ съ нимъ положеніи. Въ точкахъ C, O и E имѣются обоймицы со сквозными отверстіями, въ которыя вставляютъ: иглу, карандашъ и неподвижную ось вращенія прибора. Обоймицы C и E неподвижны, а обоймицу O можно передвигать по бруску AB, причемъ во время дѣйствія прибора упомянутыя три обоймицы (или, точнѣе, концы иглы, карандаша и оси) должны быть установлены на одной прямой. Правильность установки достигается, во первыхъ,

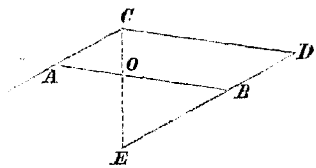


Черт. 280.

тѣмъ, что бруски AB, AC и DE раздѣлены на мелкія части (миллиметры), а, во вторыхъ, тѣмъ, что всѣ три обоймицы двойныя, и отдѣльныя части ихъ могутъ передвигаться микрометрическими винтами. Одну половинку обоймицы ставятъ сперва приближенно, закрѣпляютъ ее зажимнымъ винтомъ и затѣмъ вводятъ другую половинку въ надлежащее положеніе при помощи микрометрическаго винта и отсчета по верньеру. Чтобы игла и карандашъ не давили чрезмѣрно на бумагу, и весь приборъ находился въ равновѣсіи, имѣются особыя подпорныя колесики, вспомогательный горизонтальный прутъ OD и проволоки, укрѣпляемыя на вершинѣ станка.

Примѣненіе пантографа основано на слѣдующихъ двухъ геометрическихъ его свойствахъ.

1) Если игла, карандашъ и ось разъ установлены на одной прямой, то они остаются на одной прямой и при всякомъ другомъ положеніи брусковъ пантографа. Въ самомъ дѣлѣ, если точки C, O и E (черт. 281) лежатъ на одной прямой, то вслѣдствіе параллельности AB и CD можно составить пропорцію:



Черт. 281.

$$AC : AO = BE : BO$$

При всякомъ другомъ положеніи пантографа брусокъ AC остается параллельнымъ DE, и длины отрѣзковъ AC, AO, BE и BO не мѣняются, слѣдовательно, сохраняется вышестоящая пропорція, подобіе треугольниковъ ACO и BEO и равенство угловъ при точкѣ O; а такъ какъ точки A, O и B всегда установлены на одной прямой, то, очевидно, и точки C, O и E останутся на одной прямой.

2) Если точка O неподвижна, то контуры, описываемые точками C и E, подобны, и отношеніе сходственныхъ сторонъ этихъ подобныхъ фигуръ равно отношенію частей AO и OB бруска AB. Пусть игла передвинулась изъ E въ e (черт. 282), и соотвѣтственно этому карандашъ перешелъ изъ C въ c. Требуется доказать, что

$$Cc : Ee = AO : OB$$

На основаніи вышеобъясненнаго свойства пантографа точки C, O, E и c, O, e лежатъ на прямыхъ, и потому изъ подобія треугольниковъ сперва ACO и BEO, а потомъ acO и beO можно составить пропорціи:

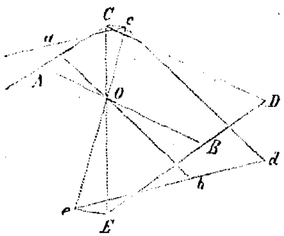
$$CO : OE = AO : OB$$

$$cO : Oe = aO : Ob = AO : OB$$

По равенству вторыхъ частей равны и первыя, откуда слѣдуетъ, что треугольники COc и EOe, какъ имѣющіе равные углы (при O) и пропорціональныя при нихъ стороны, подобны, такъ что

$$Cc : Ee = CO : OE = AO : OB$$

что и требовалось доказать.



Черт. 282.

Игла, карандашъ и ось вращенія пантографа могутъ взаимно переставляться: если ось вращенія помѣстить въ C, то подобныя фигуры будутъ описывать точки O и E, но сущность дѣла не измѣнится.

Пусть данный съемочный брульонъ надо уменьшить въ n разъ; это число опредѣляется или вычисленіемъ, или непосредственнымъ сравненіемъ рамки брульона и соотвѣтствующей стороны трапеціи на проекціи. Если ось вращенія прибора помѣщается въ O, то обоймицы устанавливаются такъ, чтобы $OB : AO = EB : BD = n$ и $AC = BD$; установка производится по мелкимъ дѣленіямъ на брускахъ или по особымъ на нихъ черточкамъ, помѣченнымъ разными $^1/_n$, именно, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и т. д. Затѣмъ яблочко оси O закрѣпляютъ неподвижно въ стойкѣ, подъ иглу E подкладываютъ брульонъ, а подъ карандашъ C— ту трапецію сѣти, въ которую желаютъ перерисовать данный брульонъ. Послѣ нѣсколькихъ попытокъ по разнымъ направленіямъ брульонъ и картографическую сѣть прикалываютъ кнопками и обводятъ иглою всѣ требуемые контуры брульона; карандашъ зарисуетъ уменьшенную копію. Чтобы при переводѣ иглы съ одного замкнутаго контура на другой карандашъ не прочертилъ лишней соединительной линіи, въ хорошихъ пантографахъ имѣется нитка $EBAC$ и особая муфта у иглы E; послѣдняя устроена такъ, что если она приподнята (вмѣстѣ съ иглой), то приподымается и карандашъ. Этимъ приспособленіемъ пользуются и при копированіи отдѣльныхъ зданій, пунктира и т. п.

Чтобы пантографъ давалъ совершенно подобныя копіи, надо ставить его на прочный, плоскій и горизонтально установленный столъ; въ горизонтальное же положеніе должны быть приведены и всѣ бруски пантографа, для чего на нихъ кладутъ маленькій уровень и подтягиваютъ или опускаютъ соотвѣтствующія проволоки. Карандашъ, по мѣрѣ его притупленія, надо вынимать и чинить, а силу надавливанія его на бумагу регулировать вспомогательными грузиками.

192. Пользованіе маршрутами и описаніями. Когда въ распоряженіи картографа имѣются только маршруты и планчики, составленные по описаніямъ, то работа начинается съ нанесенія данныхъ астрономическихъ точекъ на картографическую сѣтку и на эти маршруты и планчики. Затѣмъ всѣ подробности перерисовываются на проекцію въ соотвѣтствующія мѣста, причемъ пользуются или разбивкою на квадратики, или пропорціональнымъ циркулемъ, который для каждаго разстоянія между двумя астрономическими точками устанавливается особо.

Нѣкоторыя точки маршрутовъ бываютъ опредѣлены не вполнѣ, напримѣръ, дана только широта или взятъ азимутъ съ другой точки. Въ такихъ случаяхъ на маршрутѣ проводятъ сперва часть соотвѣтствующей параллели, а самую точку на ней получаютъ или графической засѣчкою по извѣстному разстоянію, или построеніемъ даннаго азимута съ другой, ранѣе нанесенной точки. Вообще здѣсь зачастую приходится соединять разнородныя данныя и, начиная съ надежнѣйшихъ, строить послѣдовательно всѣ другія точки. Опытные картографы умѣютъ сопрягать всѣ данныя наилучшимъ образомъ и для каждой точки находить ея вѣроятнѣйшее положеніе *).

*) Многочисленные, но часто разрозненные маршруты нашего знаменитаго путешественника *Пржевальскаго* (1839—1888) въ Средней Азіи сопровождались множествомъ разстояній, азимутовъ и весьма хорошо

Когда пользуются описаніями и разрозненными планчиками, составленными въ пути, то сперва стараются по этимъ даннымъ проложить сплошные маршруты между указанными въ описаніи точками въ довольно крупномъ масштабѣ, затѣмъ эти вычерченные маршруты исправляютъ и дополняютъ по другимъ имѣющимся свѣдѣніямъ и перерисовываютъ, какъ выше объяснено, въ картографическую сѣтку.

При составленіи картъ малоизслѣдованныхъ странъ, послѣ нанесенія всѣхъ имѣющихся данныхъ остаются еще болѣе или менѣе обширныя пустыя пространства. Если карта составляется въ крупномъ масштабѣ и должна имѣть научное значеніе, то эти пространства оставляются незаполненными или же соотвѣтствующіе контуры соединяются по соображенію пунктиромъ; такъ соединяютъ, напримѣръ, въ одно цѣлое теченіе рѣки, пересѣченное нѣсколькими не очень удаленными маршрутами, если нѣтъ сомнѣнія, что это дѣйствительно одна и та же рѣка. На генеральныхъ картахъ мелкаго масштаба пунктировъ обыкновенно не дѣлаютъ и всѣ контуры исполняютъ сплошными линіями, но опытный глазъ по фигурѣ изгибовъ и по густотѣ подписей всегда отличитъ хорошо изслѣдованныя мѣста отъ мало или вовсе не изслѣдованныхъ. Просмотрите подробныя и общія карты полярныхъ странъ, центральной Азіи и др.

193. Отдѣлка картъ. Послѣ внесенія всѣхъ контуровъ и подробностей карандашомъ, приступаютъ къ вытягиванію ихъ тушью, выраженію разныхъ мѣстныхъ предметовъ условными знаками, подписямъ и, наконецъ, къ расцвѣчиванію карты. Удачный выборъ условныхъ знаковъ имѣетъ весьма важное значеніе для наглядности и изящества карты; такъ какъ граверы только слѣпо копируютъ то, что нанесено на бумагу картографомъ, то послѣдній самъ долженъ въ высокой степени обла-

---

опредѣленныхъ широтъ; долготъ же у него было мало и притомъ опредѣленныхъ неудовлетворительно. Такимъ образомъ, хотя вполнѣ опредѣленныхъ астрономическихъ точекъ имѣлось немного, но въ маршрутахъ и описаніяхъ было не только все, что достаточно для вывода положенія каждой замѣчательной точки, но имѣлись и лишнія данныя, служившія для повѣрокъ и разъясненій встрѣчавшихся потомъ недоразумѣній.

дать чувствомъ изящнаго. Смотря по тому, предположено-ли печатать карту одною или нѣсколькими красками, прибѣгаютъ къ разнымъ условнымъ знакамъ. Въ цвѣтныхъ изданіяхъ очертанія условныхъ знаковъ вообще проще, и однако всѣ подробности выражаются гораздо нагляднѣе, чѣмъ въ одноцвѣтныхъ: къ сожалѣнію, дороговизна цвѣтныхъ изданій препятствуетъ широкому ихъ распространенію.

Для выраженія рельефа существуютъ нынѣ три способа: изогипсы, гашюры и тѣни высотъ. *Изогипсы* выражаютъ рельефъ самымъ точнымъ образомъ, но иногда онѣ не достаточно наглядны и смѣшиваются съ контурами; въ новѣйшихъ изданіяхъ для изогипсъ берутъ отдѣльный цвѣтъ. Во всякомъ случаѣ изогипсами можно выражать рельефъ только на картахъ, составленныхъ по инструментальнымъ съемкамъ, со множествомъ точно опредѣленныхъ высотъ. *Гашюры* нагляднѣе и могутъ быть примѣнены при менѣе точныхъ данныхъ, даже на картахъ, составленныхъ по глазомѣрнымъ съемкамъ и маршрутамъ. Вмѣсто гашюръ прибѣгаютъ иногда, особенно на картахъ географическаго характера, въ мелкомъ масштабѣ, къ тушевкѣ, причемъ густота тѣней слѣдуетъ той же постепенности, какъ и тѣни гашюръ. Для такъ называемыхъ гипсометрическихъ картъ нынѣ примѣняютъ почти исключительно *тѣни высотъ*, выражающія не крутизну покатостей, а абсолютную высоту точекъ. Обыкновенно берутъ два цвѣта: низменности покрываютъ зеленою краскою разной густоты, а возвышенности—коричневою, тоже разной густоты, такъ что наиболѣе низменныя мѣста покрываются самою темною зеленою, а наиболѣе возвышенныя — самою темною коричневою красками. Выборъ числа тѣней зависитъ отъ характера страны и масштаба карты. Чѣмъ рельефъ разнообразнѣе и масштабъ крупнѣе, тѣмъ число тѣней должно быть больше.

Весьма важное значеніе имѣютъ *подписи* на картахъ. Разнаго рода предметы подписываютъ всегда разными шрифтами, чтобы съ перваго же взгляда можно было видѣть, что̀ они выражаютъ; этимъ пріемомъ число словъ въ подписяхъ сокращается: если, напримѣръ, города и деревни подписаны разными шрифтами, то нѣтъ уже надобности прибавлять къ собственнымъ именамъ слова «городъ» или «деревня». Обыкновенно каждому роду предметовъ присваивается особый шрифтъ. Шрифты различаются размѣрами буквъ, прямымъ или наклоннымъ положеніемъ и видомъ ихъ. Для подписыванія населенныхъ мѣстъ приняты: для столицъ и большихъ городовъ — КАПИТАЛЬНЫЙ шрифтъ, для мелкихъ городовъ — СРЕДНІЙ, а для селъ и деревень — *курсивъ.* Чтобы выдѣлить значеніе извѣстныхъ населенныхъ мѣстъ, мѣняютъ высоты буквъ этихъ шрифтовъ или берутъ **прямой** и *наклонный египетскіе* шрифты. Названія горъ и островов подписываютъ обыкновенно прямымъ рондо, а рѣкъ и озеръ — *наклоннымъ рондо.* Второстепенные предметы или предметы, рѣдко встрѣчаемые на картѣ, подписываютъ МЕРТВЫМЪ шрифтомъ; наконецъ, для заголовка карты и для предметовъ, которые требуется почему либо выдвинуть, пользуются разнаго рода **фигурными** шрифтами. Въ заголовкахъ главныя слова, выражающія сущность и цѣль карты, выдѣляютъ болѣе крупнымъ шрифтомъ отъ словъ дополнительныхъ и менѣе важныхъ. Знатоки умѣютъ подбирать и изобрѣтать весьма цѣлесообразные и изящные шрифты, кстати вводить славянскія, готическія и др. буквы.

Необходимо еще умѣть располагать подписи на картахъ; ихъ надо ставить съ извѣстнымъ пониманіемъ, изяществомъ и вкусомъ, чтобы онѣ не пестрили карты, не закрывали контуровъ, были удобочитаемы и чтобы не было сомнѣнія, къ какому именно предмету каждая подпись относится. Шрифты можно разработать заранѣе и указать, въ какихъ именно случаяхъ должно ихъ примѣнять; для расположенія же подписей нѣтъ возможности дать точныхъ правилъ, и здѣсь многое зависитъ отъ опытности и вкуса картографа. Ясность и изящество карты могутъ выиграть или потерять отъ ничтожнаго передвиженія подписи въ ту или другую сторону и отъ той или иной разстановки отдѣльныхъ буквъ. Названія естественныхъ предметовъ принято подписывать внутри ихъ очертаній и по направленію ихъ длины; напримѣръ, подписи морей и озеръ помѣщаются внутри ихъ и изгибаются сообразно очертанію береговъ. Такимъ же образомъ подписываются горные хребты и рѣки; если они очень узки, то названія помѣщаютъ, хотя и внѣ очертаній, но всегда вдоль ихъ направленія. Наоборотъ, предметы, созданные руками человѣка (населенныя мѣста, фабрики, отдѣльныя строенія и т. п.), подписываются по прямой линіи: или параллельно сѣверной и южной чертамъ рамки, или же параллельно прочерченнымъ на картѣ параллелямъ. Отъ этихъ общихъ указаній приходится однако дѣлать отступленія: маленькое озеро подписывается, какъ городъ, внѣ его очертанія и параллельно чертамъ рамки, а отдѣльныя группы домовъ разбросаннаго селенія (на картахъ крупнаго масштаба) охватываются дугообразно расположенною общею подписью его названія: родъ предмета опредѣляется здѣсь только шрифтомъ.

Такъ какъ условные знаки и шрифты мѣняются съ масштабомъ и вообще бываютъ очень разнообразны, то внизу, подъ рамкою, или гдѣ нибудь на свободномъ мѣстѣ внутри, помѣщаютъ объясненіе ихъ; тамъ же располагаютъ масштабъ численный и линейный, а равно годъ составленія (или исправленія) карты и имена и фамиліи трудившихся съемщиковъ, картографовъ и граверовъ.

XVII.

Изданіе картъ.

194. Разные способы изданія. Географическія карты, исполненныя непосредственно руками картографовъ, настолько цѣнны, что не могутъ служить предметомъ повседневнаго обихода; онѣ хранятся въ архивахъ и ими пользуются лишь, какъ оригиналами для снятія копій. Въ настоящее время географическія карты нужны для столь разнообразныхъ цѣлей и въ такомъ большомъ количествѣ экземпляровъ, что изготовленіе рукописныхъ копій требовало бы огромнаго труда и времени. Подобно тому, какъ рукописи были замѣнены печатными книгами, такъ и рукописныя карты замѣнились механическимъ ихъ воспроизведеніемъ или *изданіемъ картъ.*

Способы изданія картъ, существующіе въ настоящее время, состоятъ въ томъ, что съ готоваго оригинала дѣлается копія въ обратномъ видѣ на какой нибудь твердой поверхности, способной выдерживать давленіе на печатномъ станкѣ, и съ этой копіи получаютъ затѣмъ карту въ произвольномъ количествѣ оттисковъ. Для изданія картъ служили сперва исключительно гравированіе на металлѣ или камнѣ и литографія; въ послѣднее же время все болѣе и болѣе распространяются способы, основанные на химическомъ дѣйствіи свѣта (фотографія). Гравированіе и литографія требуютъ предварительнаго изготовленія обратной копіи непосредственно отъ руки, фотографическіе же способы не только устраняютъ медленный трудъ гравера, но даютъ возможность печатать карты какъ въ размѣрѣ оригинала, такъ и въ любомъ другомъ масштабѣ, т. е. стремятся устранить трудъ картографа. Дѣйствительно, въ настоящее время многія карты издаются прямо съ брульоновъ съемки, безъ предварительнаго составленія рукописной карты въ требуемомъ масштабѣ.

Ниже описаны въ общихъ чертахъ основанія техническихъ пріемовъ изданія картъ, знаніе которыхъ необходимо всѣмъ, занимающимся ихъ составленіемъ, потому что самое составленіе карты зависитъ иногда отъ способа ея изданія.

195. Гравированіе на металлѣ. Начало гравированія неизвѣстно; полагаютъ, что оно изобрѣтено китайцами въ глубокой древности и занесено въ Европу около середины XV вѣка. Первоначальное гравированіе на деревѣ замѣнилось потомъ для картографическихъ изданій болѣе прочнымъ и изящнымъ гравированіемъ на металлѣ, обыкновенно на красной мѣди, какъ матеріалѣ мягкомъ, пластичномъ и не очень дорогомъ.

Гравированіе заключается въ томъ, что рисунокъ карты рѣжется вглубь особыми инструментами. Назначенная для гравюры мѣдная доска около 1 линіи толщиною должна быть отлично отшлифована и представлять гладкую зеркальную поверхность. Передъ самымъ гравированіемъ эту поверхность покрываютъ тонкимъ слоемъ воска съ небольшою примѣсью сажи: чтобы воскъ легъ ровнымъ слоемъ, доска нагрѣвается на небольшой жаровнѣ, а воскъ въ видѣ цилиндрика прокатывается по доскѣ въ разныхъ направленіяхъ просто ладонью. Затѣмъ на загрунтованную доску наносятъ съ оригинала картографическую сѣтку; сперва штангенъ-циркулемъ наносятъ точки пересѣченій меридіановъ и параллелей, потомъ къ соотвѣтствующимъ точкамъ прикладываютъ металлическую линейку, привинчиваютъ ее къ доскѣ струпцинками, а самыя линіи проводятъ стальными гравировальными иглами, имѣющими видъ карандаша, въ дерево котораго заключенъ стальной стержень овальнаго сѣченія.

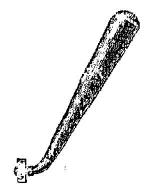
Далѣе, въ каждую трапецію, ограниченную сосѣдними меридіанами и параллелями, послѣдовательно, переводятъ сперва контуры карты. Для этого берутъ листикъ прозрачнаго желатина, приклеиваютъ его кусочками воска къ соотвѣтствующему мѣсту рукописной карты и всѣ очертанія осторожно процарапываютъ тонкою иглой; снявъ желатинъ, въ процарапанныя мѣста втираютъ цвѣтной порошокъ, накладываютъ его лицевой стороной на восковой грунтъ, въ соотвѣтствующее мѣсто, и протираютъ по контурамъ стальною пластинкою—*планиромъ*. Послѣ снятія желатинной пластинки всѣ очертанія представятся на восковомъ грунтѣ цвѣтнымъ рисункомъ въ обратномъ видѣ. Эти очертанія процарапываютъ сквозь грунтъ на мѣдь иглою и, когда это сдѣлано на всѣхъ трапеціяхъ, воскъ удаляютъ скипидаромъ (или тряпкою, если доску опять нагрѣть на жаровнѣ) и приступаютъ къ самому гравированію.

Гравированіе производится такъ называемыми *грабштихелями* (черт. 283), представляющими въ поперечномъ сѣченіи ромбъ, съ болѣе или менѣе острыми краями. Чѣмъ тоньше гравируемая черта, тѣмъ тоньше долженъ быть и грабштихель. Самый процессъ гравированія заключается въ выемкѣ изъ доски тонкой ленты треугольнаго сѣченія, причемъ граверъ водитъ грабштихелемъ не къ себѣ, а отъ себя, поворачивая сообразно изгибамъ черты какъ грабштихель, такъ и доску. Входка въ металлъ дѣлается постепенно разными нумерами грабштихелей, доводя ширину черты до требуемой по условнымъ знакамъ; при гравированіи тонкихъ линій грабштихель держится подъ весьма острымъ угломъ къ доскѣ, а при гравированіи толстыхъ — подъ бо́льшимъ угломъ. Когда черта должна быть очень широка, то ее составляютъ изъ ряда параллельныхъ врѣзокъ, ребра прикосновеній которыхъ должны быть ниже лицевой поверхности доски. Пунктирныя линіи дѣлаются иглой, вдавливаемой въ доску отвѣсно.

Черт. 283.

Послѣ награвированія всѣхъ контуровъ рѣжутъ подписи. Для означенія ихъ границъ, сообразно высотѣ буквъ, берутъ разные нумера *раштръ*, т. е. пластинокъ съ двумя остріями на концѣ. Раштрою по линейкѣ процарапываютъ слегка двѣ параллельныя линіи, а затѣмъ, намѣтивъ буквы (иглою, въ обратномъ видѣ), рѣжутъ ихъ грабштихелями въ толстыхъ и иглами въ тонкихъ мѣстахъ. Гравированіе буквъ разныхъ шрифтовъ требуетъ особаго навыка и дѣлается обыкновенно спеціалистами—словорѣзами.

Далѣе гравируютъ условные знаки мѣстныхъ предметовъ, какъ-то: церквей, часовенъ, верстовыхъ столбовъ, указателей дорогъ и пр., а равно знаки лѣсовъ, луговъ, болотъ и т. п. Для ускоренія работы и однообразія знаковъ первые изъ перечисленныхъ предметовъ набиваются *пунсонами* или стальными стерженьками, на концахъ которыхъ имѣется соотвѣтствующее рельефное изображеніе, а вторые—при помощи *рулетокъ* (черт. 284), представляющихъ маленькіе цилиндрики, укрѣпленные на осяхъ съ ручками; на наружной поверхности этихъ цилиндриковъ сдѣланы выпуклые рисунки, такъ что послѣ прокатыванія рулетки по доскѣ, съ извѣстнымъ давленіемъ на ручку, данный контуръ покроется однообразными углубленными фигурками соотвѣтствующаго условнаго знака.

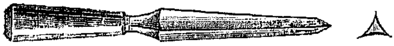


Черт. 284.

Послѣ всего перечисленнаго гравируютъ рельефъ мѣстности. Если онъ выраженъ изогипсами, то ихъ переводятъ съ оригинала и гравируютъ, подобно контурамъ; если же онъ выраженъ гашюрами, то граверъ, при помощи желатинныхъ пластинокъ, намѣчаетъ лишь мѣста вершинъ, хребтовъ, лощинъ и пр., а затѣмъ уже по соображенію, имѣя передъ глазами оригиналъ карты, намѣчаетъ иглой изогипсы и гравируетъ самыя гашюры: тонкія черточки, выражающія покатости до 20°, исполняются иглой, а толстыя, для болѣе крутыхъ скатовъ—грабштихелями.

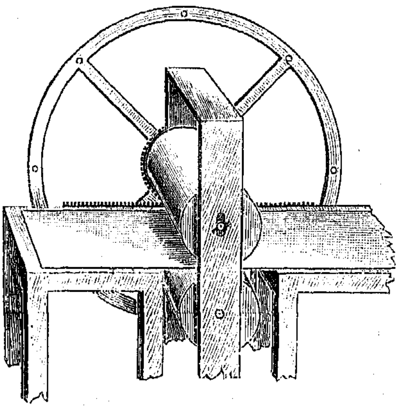
Необходимо замѣтить, что края врѣзокъ, и особенно ихъ концы, послѣ работы грабштихелемъ получаются неровные, съ заусенками; эти неровности сглаживаются сперва *шаберомъ*—острымъ стальнымъ стержнемъ треугольнаго сѣченія (черт. 285), а затѣмъ кусочкомъ березоваго угля, смоченнаго масломъ.

Послѣ каждаго отдѣла работы, т. е. послѣ награвированія контуровъ, послѣ вырѣзки словъ и пр., доска корректируется, для чего съ нея дѣлаютъ пробный оттискъ на бумагѣ; этотъ оттискъ передается картографу, который свѣряетъ его съ рукописною картою и цвѣтными чернилами отмѣчаетъ пропуски и ошибки. Пропущенные предметы граверъ рѣжетъ обыкновеннымъ порядкомъ, а невѣрныя мѣста выскабливаетъ сперва шаберомъ на болѣе или менѣе значительномъ протяженіи во всѣ стороны, чтобы получить ровную и едва углубленную поверхность, а затѣмъ вновь гравируетъ. Если невѣрныя врѣзки очень глубоки, или корректуру пришлось производить нѣсколько разъ на одномъ мѣстѣ, то сдѣланное шаберомъ значительное углубленіе выколачивается молоткомъ съ обратной стороны на наковальнѣ, чтобы лицевая сторона доски получилась опять ровною.



Черт. 285.

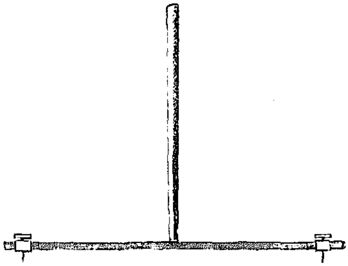
Печатаніе съ мѣдныхъ досокъ производится на особыхъ *печатныхъ станкахъ* (черт. 286), главную часть которыхъ составляютъ два вала или цилиндра, вращаемые рабочими при помощи системы зубчатыхъ колесъ. Доска, съ которой хотятъ печатать, нагрѣвается на жаровнѣ, и въ гравюру кладутъ сперва лопаткой, а затѣмъ набиваютъ томпономъ и растираютъ пальцами обыкновенную типографскую краску, приготовленную изъ смѣси вареннаго льняного масла и голландской сажи. Чтобы краска осталась только въ гравюрѣ, а вся остальная поверхность была чистою, доска вытирается затѣмъ тряпкой, смоченной растворомъ поташа. Далѣе на доску накладываютъ бумагу оттиска, прикрываютъ ее нѣсколькими листами мягкой, макулатурной бумаги и кускомъ фланели или сукна и все вмѣстѣ пропускаютъ между валами печатнаго станка подъ извѣстнымъ давленіемъ. Послѣ этого остается лишь снять фланель и макулатурную бумагу и, взявшись за углы оттиска, осторожно отдѣлить его отъ доски. Передъ печатаніемъ назначенная къ тому бумага смачивается водой, чтобы сдѣлать ее мягче и болѣе



Черт. 286.

способной входить въ углубленія гравюры и извлекать изъ нихъ краску. Послѣ каждаго оттиска доску снова нагрѣваютъ, въ гравюру втираютъ свѣжую краску, накладываютъ слѣдующій листъ бумаги и т. д. По окончаніи дневной работы доску необходимо тщательно очистить скипидаромъ, иначе краска засохнетъ въ углубленіяхъ гравюры и будетъ препятствовать дальнѣйшему печатанію. Обыкновенно въ одинъ день снимаютъ около 100 оттисковъ, а доска даетъ отъ 3 до 4 тысячъ хорошихъ оттисковъ, послѣ чего гравюра, особенно въ тонкихъ линіяхъ, стирается и исчезаетъ.

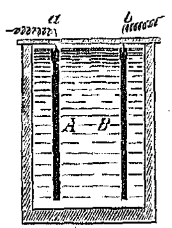
Если карту печатаютъ не одною, а двумя и болѣе красками, то предметы каждаго цвѣта должны быть награвированы на отдѣльныхъ доскахъ, въ каждую доску втирается одна какая нибудь краска, а листъ бумаги послѣ оттиска съ одной доски кладется на другую и т. д. Каждый разъ необходимо нѣкоторое время, чтобы оттискъ успѣлъ высохнуть, а для накладки бумаги соотвѣтствующимъ образомъ на всѣхъ доскахъ дѣлаются строго на однихъ и тѣхъ же мѣстахъ двѣ такъ называемыя *опорныя точки*. Послѣ перваго оттиска въ отпечатанныя опорныя точки вкалываютъ иголки и, поставивъ въ соотвѣтствующія точки слѣдующей доски, тщательно расправляютъ бумагу и опять пропускаютъ между валами печатнаго станка. Вмѣсто простыхъ иголокъ нерѣдко берутъ особую линейку съ ручкою и двумя подвижными обоймицами съ остріями (черт. 287). Такой приборъ представляетъ по сравненію съ простыми иголками то преимущество, что разъ установленныя острія даютъ какъ бы масштабъ для оцѣнки деформаціи бумаги и позволяютъ до нѣкоторой степени регулировать ея смачиваніе.



Черт. 287.

196. Гальванопластика. Такъ какъ гравированіе обходится очень дорого и исполняется весьма медленно, а между тѣмъ доска, какъ упомянуто выше, при печатаніи изнашивается, то карты, которыя надо получить въ весьма большомъ количествѣ оттисковъ, печатаются не съ подлинныхъ гравированныхъ досокъ, а съ гальванопластическихъ копій. *Гальванопластика* открыта случайно въ 1838 году въ С.-Петербургѣ русскимъ академикомъ *Якоби* и заключается въ томъ, что если въ растворъ какой нибудь металлической соли помѣстить предметъ и пропустить черезъ него и растворъ гальваническій токъ, то на предметѣ наростетъ слой металла, который послѣ отдѣленія отъ предмета представитъ точную, но обратную его копію, т. е. копію, на которой выпуклымъ мѣстамъ оригинала соотвѣтствуютъ мѣста вогнутыя, и наоборотъ.

Для приготовленія гальванопластической копіи съ мѣдной гравированной доски, послѣднюю вѣшаютъ въ бакъ, наполненный растворомъ мѣднаго купороса, и параллельно ей вѣшаютъ другую мѣдную доску, служащую для пополненія мѣди въ растворѣ (черт. 288). Эта доска соединяется съ положительнымъ полюсомъ гальванической батареи или динамомашины, а гравированная доска съ отрицательнымъ: если замкнуть цѣпь, то отъ химическаго дѣйствія тока растворъ мѣднаго купороса выдѣляетъ изъ себя чистую металлическую мѣдь, осаждающуюся въ видѣ мельчайшихъ частицъ на гравированной доскѣ; такъ какъ при этомъ другая доска постепенно растворяется, то густота раствора, а, слѣдовательно, и наращиваніе копіи поддерживаются одинаковыми во все время процесса. Сила тока регулируется вспомогательными приборами, и процессъ продолжается, смотря по требуемой толщинѣ копіи, отъ 150 до 250 часовъ. За гальванопластическимъ процессомъ слѣдятъ, производя ежедневно взвѣшиваніе: зная первоначальный вѣсъ гравированной доски, не трудно опредѣлять вѣсъ нарощенной копіи. Послѣ достиженія извѣстнаго вѣса доска съ наросшею мѣдью вынимается изъ бака, края ея подпиливаются и оригиналъ и копія разнимаются. Такъ какъ осаждающаяся мѣдь пристаетъ весьма плотно, то гравированная доска покрывается



Черт. 288.

предварительно растворомъ синеродистаго кали: отъ этого она получаетъ тончайшій серебристый налетъ, раздѣляющій ее отъ слоя нарощенной мѣди и позволяющій разнять доски безъ поврежденій. Чтобы мѣдь не наростала съ противоположной стороны оригинала, эту сторону дѣлаютъ непроводникомъ электричества, покрывая ее заранѣе чернымъ асфальтовымъ лакомъ.

Доска, полученная описаннымъ путемъ съ оригинальной углубленной гравюры, имѣетъ, очевидно, гравюру выпуклую; ее-то и хранятъ обыкновенно неопредѣленное время, а когда испортится одна изъ досокъ съ углубленною гравюрою, то новымъ гальванопластическимъ процессомъ приготовляютъ доску съ вогнутою гравюрою, необходимою для печатанія.

Гальванопластикою пользуются въ картографической техникѣ не только для приготовленія новыхъ досокъ, но и для корректурныхъ работъ на старыхъ. Если нужно исправить какое нибудь мѣсто на старой доскѣ съ *углубленною гравюрою*, то ее кладутъ горизонтально, требуемое мѣсто окружаютъ стѣнкою изъ асфальтоваго лака и, наливъ туда растворъ мѣднаго купороса и приспособивъ электроды, пропускаютъ гальваническій токъ. По прошествіи извѣстнаго времени исправляемое мѣсто заполнится сплошь наросшею мѣдью; его шлифуютъ и передаютъ граверу. Если же имѣется прежняя доска съ рельефною гравюрою, то мѣсто, подлежащее исправленію, счищаютъ до гладкой поверхности доски и дѣлаютъ съ нея новую гальванопластическую копію; на ней, противъ счищеннаго мѣста, получится участокъ ровной плоскости, на которомъ потомъ и гравируютъ.

Наконецъ, гальванопластикою въ картографической техникѣ пользуются для осажденія на мѣдныя доски тончайшаго слоя желѣза, для приданія гравюрѣ большей прочности (гравюру осталиваютъ). Для этого доску погружаютъ въ растворъ смѣси изъ желѣзнаго купороса и сѣрномагнезіальной соли.

197. Литографія. Печатаніе съ камня (литографія) изобрѣтено въ 1796 году мюнхенскимъ актеромъ *Зенефельдеромъ* (1771—1834); оно основано на свойствѣ жировъ не смѣшиваться съ водою и на томъ, что нѣкоторые образцы камня одинаково хорошо впитываютъ въ себя какъ жиръ, такъ и воду. Для литографіи особенно пригоденъ плотный и мелкозернистый известнякъ перлово-сѣраго цвѣта, лучшія мѣсторожденія котораго находятся близъ Зольнгофена по рѣкѣ Альтмюлю въ Баваріи. Если на плоской, хорошо отшлифованной поверхности литографическаго камня сдѣлать рисунокъ жирною краскою, а все остальное пространство смочить водой, то черты рисунка будутъ воспринимать краску и отталкивать воду, а остальное пространство камня, наоборотъ, будетъ впитывать въ себя воду и отталкивать краску. Поэтому, если по камню прокатить валикъ съ краскою, протереть его мокрою губкою и затѣмъ наложить листъ чистой бумаги, то на немъ отпечатается рисунокъ краскою; послѣ этого камень не теряетъ своихъ свойствъ, и жирныя черты рисунка на немъ опять воспримутъ свѣжую краску, а свободныя пространства — воду, такъ что можно непрерывно получать одинъ оттискъ за другимъ. Въ дѣйствительности, въ литографіи играютъ извѣстную роль и нѣкоторые химическіе процессы, отъ которыхъ зависитъ выборъ камней и красокъ. Первоначальный рисунокъ на камнѣ получается либо *гравированіемъ*, либо при помощи *перевода* съ бумаги.

Передъ гравированіемъ камень, получаемый въ продажѣ въ видѣ большихъ плитъ въ 3—4 дюйма толщиной, долженъ быть отлично отшлифованъ сперва наждакомъ, а затѣмъ пемзой. Отшлифованная поверхность покрывается густымъ растворомъ гумми съ примѣсью около 3% азотной кислоты. По прошествіи 4—5 часовъ камень обмываютъ водой, чтобы на немъ остался лишь тонкій слой гумми, въ который втираютъ затѣмъ сажу. На полученный черный грунтъ переводятъ очертанія гравируемой карты при помощи желатинныхъ пластинокъ или особой прозрачной, но не жирной бумаги и цвѣтного порошка совершенно такъ, какъ переводится рисунокъ на загрунтованную воскомъ мѣдную доску.

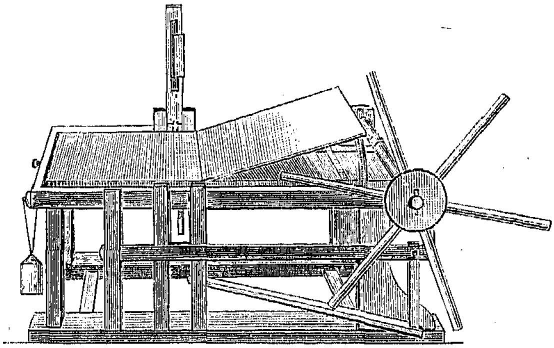
Самое гравированіе производится особыми *радирными иглами* со стальными или алмазными наконечниками. Граверъ отнюдь не долженъ дѣлать глубокихъ нарѣзокъ, онъ долженъ лишь проскабливать верхній слой камня, пропитавшійся гумми и сдѣлавшійся оттого невоспріимчивымъ къ краскѣ; глубокія нарѣзки только портятъ камень и даютъ затѣмъ грязные оттиски. Хотя грунтовка уменьшаетъ опасность запачкать камень прикосновеніемъ пальцевъ и постороннихъ тѣлъ, однако граверъ долженъ быть очень осторожнымъ и опрятнымъ. Если отъ сырости помѣщенія грунтъ гдѣ нибудь сошелъ съ камня, то его надо навести вновь, а если отсырѣвшій гумми спустился въ нарѣзки, то эти мѣста надо опять проскоблить. Опасаясь влажности, не слѣдуетъ дышать непосредственно на камень или сдувать, напримѣръ, съ него порошокъ, остающійся послѣ гравированія; его надо сметать мягкой кисточкой. Самое лучшее въ исполненную уже гравюру втирать льняное масло и покрывать ее бумагою, оставляя открытымъ лишь то мѣсто камня, гдѣ производится въ данный моментъ гравированіе.

Для исправленія ошибокъ прибѣгаютъ къ травленію фосфорною кислотою или скобленію при помощи шабера и пемзы. При этомъ надо слѣдить, чтобы края образовавшагося углубленія были возможно положе. Если невѣрности открыты послѣ удаленія грунтовки и когда въ рѣзьбу втерта уже печатная краска, то послѣдняя смывается скипидаромъ или бензиномъ, затѣмъ соотвѣтствующее мѣсто травится или скоблится и наводится новый грунтъ, по которому вторично производится гравированіе.

По окончаніи гравированія камень обливается льнянымъ масломъ, которому даютъ всосаться въ рѣзьбу. Передъ печатаніемъ грунтъ смываютъ водой съ растворомъ гумми, отчего вся поверхность камня дѣлается бѣлою, а награвированныя на немъ линіи — черными. Послѣ удаленія грунта въ рѣзьбу втираютъ тряпкою и томпономъ печатную краску, состоящую изъ олифы и сажи или цвѣтного порошка. Густота олифы, а также отношеніе между количествомъ ея и краски опредѣляются опытомъ, т. е. результатами печатанія. Вслѣдъ за краскою по камню проводятъ мокрою губкой, накладываютъ листъ бумаги и снимаютъ оттискъ. Для послѣдующихъ оттисковъ краску накатываютъ при помощи валька, обтянутаго кожею, а камень смачиваютъ водою губкой или другимъ валькомъ, обтянутымъ мокрою фланелью.

Бумага для оттисковъ должна быть сыровата, но менѣе, чѣмъ при печатаніи съ мѣдныхъ досокъ. Казалось бы, смачиваніе бумаги противорѣчитъ самому основанію литографіи, но подъ прессомъ влага выжимается, и отъ смачиванія остается лишь хорошая его сторона—бумага дѣлается мягче.

Печатаніе съ камня производится на особыхъ *литографическихъ станкахъ* (черт. 289), въ которыхъ бумага нажимается на камень при помощи мягкой деревянной линейки, называемой *рейберомъ*; рейберъ надавливаетъ своимъ ребромъ на покрышку изъ толстой кожи, натянутой въ рамкѣ и опускаемой



Черт. 289.

на камень. При самомъ печатаніи рейберъ неподвиженъ, а подъ нимъ протаскивается рама станка съ лежащимъ на ней камнемъ, покрытымъ бумагою и кожей. Эта рама движется воротомъ, на ось котораго наматывается ремень; обратное движеніе, послѣ полученія оттиска, когда рейберъ откинутъ вверхъ, достигается противовѣсомъ. Извѣстная степень нажатія рейбера производится посредствомъ особой педали и системы рычаговъ.

Вмѣсто ручныхъ станковъ въ послѣднее время распространились такъ называемыя *скоропечатныя машины* весьма сложнаго, но остроумнаго устройства. Въ нихъ имѣется система вальковъ, изъ которыхъ одни накатываютъ на камень краску, а другіе смачиваютъ его водой передъ каждымъ оттискомъ. Машины приводятся въ движеніе механическими приводами отъ паровыхъ или газовыхъ двигателей. Тогда какъ на ручныхъ станкахъ можно получить не болѣе 200 оттисковъ въ одинъ рабочій день, на скоропечатныхъ машинахъ въ то же время можно получить ихъ нѣсколько тысячъ.

Если изданіе данной карты окончено, то камень можетъ служить для другого; тогда надо снять съ него верхній слой помощью наждака и пемзы. Если же печатаніе только остановлено на продолжительное время, то съ камня необходимо лишь удалить печатную краску, которая, твердѣя отъ времени, дѣлаетъ гравюру невоспріимчивою къ жирамъ и водѣ. Сперва камень тщательно обмываютъ скипидаромъ или бензиномъ и въ обнаженную рѣзьбу накатываютъ особую жирную, такъ называемую *предохранительную краску*, содержащую въ себѣ много масла и сала. Затѣмъ въ остальную чистую поверхность камня втираютъ гумми съ примѣсью сиропа, для сообщенія гумми большей вязкости. При возобновленіи печатанія надо сперва смыть гумми водой, затѣмъ удалить предохранительную краску скипидаромъ и, наконецъ, накатать обыкновенную печатную краску.

Въ картографической техникѣ пользуются литографіею не столько для гравированія, сколько для *печатанія съ переводовъ*, снятыхъ съ мѣдныхъ досокъ, а иногда и съ гравированныхъ камней. Этимъ путемъ сберегается цѣнная гравюра, увеличивается число оттисковъ почти безпредѣльно, а, главное, ускоряется и удешевляется самое печатаніе.

Переводъ дѣлается на китайской бумагѣ (тонкой, плотной и дающей превосходные оттиски) помощью особой *переводной краски*, главная составная часть которой есть мыло, представляющее соединеніе жирной кислоты и щелочи. Получивъ съ гравюры оттискъ такою краской, его кладутъ на чистый камень, облитый скипидаромъ, смачиваютъ бумагу сверху водой и пропускаютъ камень съ этимъ оттискомъ подъ рейберомъ литографическаго станка; на камнѣ отпечатывается карта въ обратномъ видѣ, и бумага снимается. Затѣмъ камень подвергаютъ *травленію*, т. е. его смачиваютъ губкой, напитанной смѣсью раствора гумми съ азотною кислотой. Травленіемъ достигаются двѣ цѣли: во первыхъ, свободная поверхность камня дѣлается невоспріимчивою къ жирной печатной краскѣ, а, во вторыхъ, мѣста, покрытыя переводною краской, т. е. самый рисунокъ, становятся, наоборотъ, воспріимчивыми къ печатной краскѣ и отталкиваютъ отъ себя воду; именно, кислота вытѣсняетъ изъ мыла щелочь и возвращаетъ ему жирныя свойства. Самое печатаніе производится потомъ обыкновеннымъ путемъ на литографическомъ станкѣ. Такъ какъ рисунокъ карты не имѣетъ здѣсь тѣхъ рѣзкихъ границъ, которыя получаются гравированіемъ, то послѣ извѣстнаго числа оттисковъ очень тонкія черточки перестаютъ воспринимать краску, а слишкомъ толстыя, наоборотъ, раздавливаются, и потому слѣдующіе оттиски становятся неполными и грязными. Тогда камень очищаютъ пемзой, дѣлаютъ новый переводъ съ гравюры и приступаютъ опять къ печатанію и т. д.

Печатаніе съ перевода въ сущности ничѣмъ не отличается отъ такъ называемой *автографіи* или печатанія рукописей: для автографіи рукопись (или рисунокъ) дѣлается на обыкновенной бумагѣ химическою тушью, главная составная часть которой есть тоже мыло; рукопись смачивается съ обратной стороны, переводится на камень и затѣмъ ее печатаютъ на литографическомъ станкѣ.

Литографическое печатаніе въ нѣсколько красокъ называется *хромолитографіею*. Для этого рисунокъ карты распредѣляется на столько камней, во сколько цвѣтовъ желаютъ печатать, и затѣмъ бумага, служащая для оттиска, кладется послѣдовательно на всѣ камни съ предосторожностями, упомянутыми уже выше, при описаніи печатанія въ нѣсколько красокъ съ гравированныхъ мѣдныхъ досокъ. Иногда для ускоренія работы и уменьшенія числа камней производятъ смѣшеніе цвѣтовъ во время самаго печатанія. Напримѣръ, для полученія краснаго, синяго и фіолетоваго цвѣтовъ достаточно имѣть только два камня: одинъ для краснаго, другой для синяго; если подготовить фіолетовыя мѣста на обоихъ камняхъ, то въ результатѣ печатанія тамъ получится цвѣтъ составной, въ данномъ случаѣ фіолетовый.

Чтобы получать пространства, сплошь покрытыя краской (для изображенія озеръ, лѣсовъ и т. п.), сперва означаютъ на камнѣ соотвѣтствующіе контуры, а затѣмъ заливаютъ ихъ жидкою химическою тушью; послѣ этого камень подвергаютъ травленію и гуммируютъ. Передъ печатаніемъ химическая тушь смывается скипидаромъ, и покрытыя ею мѣста становятся воспріимчивыми къ цвѣтной краскѣ, накатываемой валькомъ.

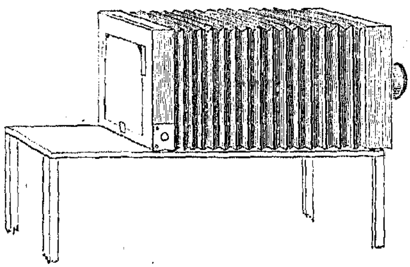
198. Фотографія. Химическое дѣйствіе свѣтовыхъ лучей, выражающееся измѣненіемъ цвѣта нѣкоторыхъ веществъ, было извѣстно еще въ древности, но надлежащее пользованіе этимъ явленіемъ, въ связи съ изобрѣтеніемъ пріемовъ для закрѣпленія произведеннаго свѣтовыми лучами измѣненія цвѣта рисунка, представляетъ результаты многолѣтнихъ изысканій ученыхъ XIX вѣка; эти изысканія далеко еще не закончены, и въ настоящее время наука и практика почти ежегодно обогащаются новыми и неожиданными открытіями въ области *свѣтописи* или *фотографіи*. Основанія свѣтописи положены французскимъ кавалерійскимъ офицеромъ *Ніепсомъ* (1765—1833), парижскимъ декораторомъ-художникомъ *Дагерромъ* (1787—1851) и англичаниномъ, любителемъ наукъ *Тальботомъ* (1800—1877). Первоначальнымъ же толчкомъ для фотографіи послужило изобрѣтеніе камеры-обскуры извѣстнымъ итальянскимъ ученымъ *Порта* (1550—1615).

Фотографія зиждется главнымъ образомъ на свойствѣ нѣкоторыхъ солей серебра и другихъ веществъ измѣнять свои физическія и химическія свойства отъ дѣйствія на нихъ свѣта. Такъ какъ прежде чѣмъ получить фотографическій снимокъ необходимо имѣть оптическое (дѣйствительное) изображеніе даннаго предмета или рисунка, то въ фотографіи надо различать *оптическую* и *химическую* ея части.

1) **Часть оптическая.** Для полученія оптическаго изображенія служитъ такъ называемая *фотографическая камера* (черт. 290), въ одной изъ стѣнокъ которой имѣется отверстіе, со вставленнымъ въ него объективомъ (система оптическихъ чечевицъ), а противоположная представляетъ раму, куда вставляется *кассета* или плоская коробочка со свѣточувствительною пластинкою. Чтобы устранить посторонній свѣтъ, вся внутренность камеры покрывается черною матовою краской. Такъ какъ съ перемѣною разстоянія отъ предмета мѣняется и разстояніе до изображенія, то боковыя стѣнки камеры дѣлаются въ видѣ гармоники:

ихъ можно растягивать и сокращать, а чтобы установить заднюю стѣнку по фокусу, прежде чѣмъ вставлять туда свѣточувствительную пластинку, оптическое изображеніе принимается на матовое стекло, на которомъ можно разсматривать его при помощи лупы. Послѣ установки камера закрѣпляется неподвижно, и, по замѣнѣ матоваго стекла свѣточувствительною пластинкой, послѣдняя приходится точно въ фокальной плоскости объектива.

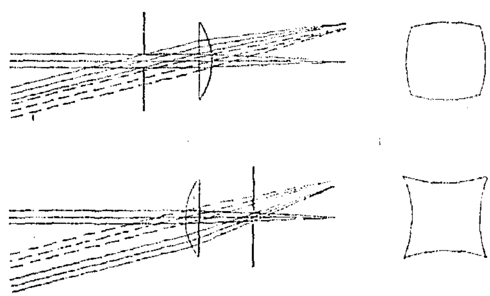
Разложеніе солей серебра на свѣточувствительной пластинкѣ происходитъ съ различною силой, въ зависимости отъ количества и качества лучей, приходящихся на каждую точку изображенія. Извѣстно, что наиболѣе сильнымъ химическимъ дѣйствіемъ обладаютъ не яркіе свѣтовые лучи, а лучи наибольшей преломляемости: синіе, фіолетовые и ультра-фіолетовые; послѣдніе для глаза вовсе не видимы. Поэтому объективы фотографическихъ камеръ приготовляются не такъ, какъ объективы другихъ оптическихъ приборовъ.



Черт. 290.

Для уменьшенія сферической аберраціи уменьшаютъ обыкновенно діаметръ снопа лучей, проникающихъ въ камеру, при помощи *діафрагмы*. Мѣсто расположенія діафрагмы зависитъ отъ вида стекла; наивыгоднѣйшее положеніе діафрагмы для плоско-выпуклаго стекла—въ центрѣ его сферической поверхности, потому что въ этомъ случаѣ лучи, непараллельные главной оптической оси, располагаются симметрично около прямой, проходящей черезъ этотъ центръ. Такъ, на чертежѣ 291 боковые лучи, изображенные сплошными линіями, даютъ болѣе правильное изображеніе, чѣмъ лучи, исходящіе изъ тѣхъ же точекъ предмета, но идущіе вдали отъ центровъ сферическихъ поверхностей стеколъ и означенные пунктиромъ. Легко, однако, замѣтить, что, въ обоихъ случаяхъ, отдѣльное стекло не можетъ дать вполнѣ правильнаго (подобнаго предмету) изображенія;

именно, если предметъ имѣетъ видъ прямоугольника (какъ это бываетъ при фотографированіи географическихъ картъ), то при расположеніи діафрагмы *передъ* объективомъ, вслѣдствіе увеличенія преломленія средняго луча снопа по мѣрѣ удаленія отъ центра предмета (черезъ который проходитъ главная оптическая ось), получится изображеніе съ выпуклыми краями, а при расположеніи діафрагмы *за* объективомъ, отъ той же причины получится изображеніе съ вогнутыми краями. Для устраненія этого недостатка фотографическіе объективы, назначенные для сниманія картъ и вообще прямолинейныхъ предметовъ, составляются изъ двухъ стеколъ, расположенныхъ такъ, какъ показано на черт. 292, причемъ діафрагма помѣщается между ними, въ общемъ центрѣ ихъ сферическихъ поверхностей. Въ этомъ случаѣ противоположные недостатки отдѣльныхъ стеколъ взаимно компенсируются, и края, равно какъ и другія прямыя линіи предмета, получаются на изображеніи прямолинейными.

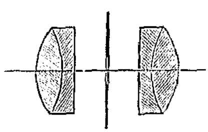


Черт. 291.

Для уменьшенія хроматической аберраціи каждое стекло системы (черт. 292) составляется изъ двухъ (кронгласоваго и флинтгласоваго), причемъ кривизны поверхностей разсчитываются такъ, чтобы свести въ одну точку не наиболѣе яркіе свѣтовые лучи, какъ это дѣлается въ объективахъ зрительныхъ трубъ, а чтобы свести наиболѣе сильно дѣйствующіе химическіе лучи съ самыми яркими свѣтовыми. Хотя изображеніе и является слегка окрашеннымъ, но зато оно не имѣетъ отдѣльнаго химическаго фокуса, такъ что послѣ правильной установки (по фокусу) матоваго стекла получается самое рѣзкое, отчетливое изображеніе и на свѣточувствительной пластинкѣ.

Въ настоящее время лучшіе фотографическіе объективы приготовляются у *Цейсса* въ Іенѣ; діафрагмы ихъ дѣлаются изъ системы лунообразно вырѣзанныхъ пластинокъ, соединенныхъ такъ, что, поворачивая наружную пуговку, можно легко и скоро увеличить или уменьшить ихъ свободныя отверстія (ирисъ).

Лучи свѣта, составляющіе изображеніе, падаютъ на пластинку камеры подъ различными углами: въ центральной части перпендикулярно къ пластинкѣ, а по мѣрѣ приближенія къ краямъ все болѣе и болѣе наклонно; поэтому на части, ближайшія къ оптической оси, приходится больше свѣта, чѣмъ на боковыя, именно, въ отношеніи косинусовъ угловъ паденія лучей. Такъ какъ для отпечатанія изображенія на свѣточувствительной пластинкѣ требуется извѣстное время, то, очевидно, центральная часть изображенія отпечатается въ камерѣ скорѣе боковыхъ, гдѣ сила освѣщенія меньше. Это явленіе извѣстно техникамъ подъ названіемъ *запаздыванія рамки*. Въ портретной фотографіи, гдѣ главное вниманіе обращено на лицо, составляющее центръ изображенія, недостаточно ясное печатаніе краевъ не имѣетъ большого значенія; на картографическихъ же снимкахъ желательно, чтобы всѣ части до рамокъ включительно были отпечатаны одинаково отчетливо.



Черт. 292.

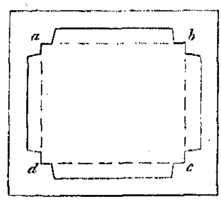
Уголъ, составляемый крайними лучами, падающими на пластинку, называется *угломъ дѣйствія*; запаздываніе рамки тѣмъ меньше, чѣмъ менѣе уголъ дѣйствія. Для уменьшенія послѣдняго надо, очевидно, отодвигать пластинку далѣе отъ объектива, а чтобы при этомъ получить требуемое не очень значительное уменьшеніе оригинала, необходимо брать объективъ съ большимъ фокуснымъ разстояніемъ. Вотъ почему фотографическіе объективы, назначенные для картографическихъ цѣлей, имѣютъ весьма большое фокусное разстояніе (фута три и болѣе), а самыя камеры дѣлаются очень длинными. Конечно, съ отодвиганіемъ пластинки сила освѣщенія уменьшается пропорціонально квадратамъ разстояній, и, принимая въ разсчетъ весьма малое отверстіе діафрагмы, дѣлается понятнымъ, почему время экспозиціи при снимкахъ картъ должно быть весьма значительно.

Зная фокусное разстояніе объектива камеры, легко вычислить, въ какомъ разстояніи отъ него надо расположить оригиналъ карты и свѣточувствительную пластинку, чтобы получить изображеніе въ заданномъ уменьшеніи. Для этого слѣдуетъ рѣшить два уравненія съ двумя неизвѣстными D и d:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$$

$$\frac{D}{d} = m$$

гдѣ F—главное фокусное разстояніе объектива, m—заданное линейное уменьшеніе снимка, а D и d—искомыя разстоянія оригинала и свѣточувствительной пластинки отъ объектива.



Черт. 293.

Въ дѣйствительности такого вычисленія обыкновенно не дѣлаютъ, а сообразно требуемому уменьшенію оригинала изготовляютъ вырѣзку въ кускѣ картона (черт. 293) и, приложивъ ее къ матовому стеклу камеры, двигаютъ взадъ и впередъ и камеру, и заднюю ея стѣнку до тѣхъ поръ, пока изображеніе не будетъ вполнѣ отчетливымъ, и рамки его не совпадутъ съ фигурою *abcd*.

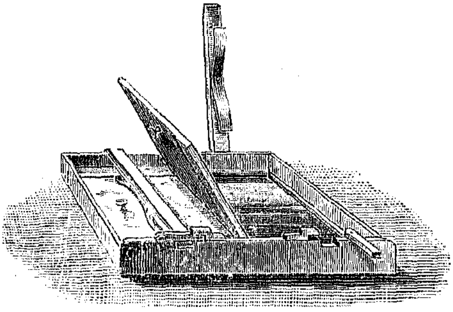
2) **Часть химическая.** Приступая къ описанію химической части фотографіи, необходимо замѣтить, что, не смотря на весьма распространенный въ послѣднее время способъ фотографированія на такъ называемыхъ сухихъ пластинкахъ, особенно для портретныхъ снимковъ и для путешественниковъ, въ картографической практикѣ держатся еще стараго способа полученія изображеній на коллодіонѣ. Необходимость приготовлять пластинку каждый разъ отдѣльно, передъ самой экспозиціей, не имѣетъ значенія въ картографическихъ заведеніяхъ, снабженныхъ лабораторіями и всѣми нужными приспособленіями; медленность же процесса, сравнительно съ почти моментальнымъ полученіемъ снимка на сухой пластинкѣ, представляетъ здѣсь не недостатокъ, а выгоду, потому что эта медленность позволяетъ регулировать процессъ и получать снимки, всѣ части которыхъ одинаково хорошо додержаны. Къ тому же приготовленіе большихъ пластинокъ съ коллодіономъ требуетъ меньше издержекъ, чѣмъ приготовленіе такихъ же размѣровъ сухихъ пластинокъ.

Коллодіонъ представляетъ растворъ пироксилина (хлопчатая бумага, обработанная азотною кислотой) въ смѣси изъ эфира и спирта. Тщательно полированную стеклянную пластинку обливаютъ ровнымъ слоемъ коллодіона, держа пластинку при помощи вантузы, покачивая ее въ разныя стороны и сливая избытокъ съ одного изъ угловъ. Тонкій слой коллодіона и составляетъ ту пленку, въ волокнахъ которой образуется потомъ фотографическій снимокъ. Надо замѣтить, что въ коллодіонъ уже заранѣе вводятъ іодистый кадмій или аммоній (такой коллодіонъ называется *іодированнымъ*), а когда пленка нѣсколько подсохнетъ отъ испаренія эфира и части спирта, пластинку погружаютъ въ ванну изъ раствора азотнокислаго серебра въ водѣ; всѣ эти дѣйствія должно производить въ темномъ помѣщеніи, освѣщенномъ лишь нехимическими лучами черезъ желтыя или красныя стекла. При погруженіи пластинки въ азотнокислое серебро происходитъ химическая реакція: въ коллодіоновой пленкѣ образуется іодистое серебро, и она, теряя свою прежнюю прозрачность, принимаетъ блѣдный молочный цвѣтъ. Помимо іодистаго серебра пленка увлекаетъ изъ ванны еще растворъ азотнокислаго серебра, который играетъ немаловажную роль, дѣлая ее свѣточувствительною.

Заготовленная пластинка вкладывается въ плотно закрываемую кассету и вставляется въ фотографическую камеру на мѣсто матоваго стекла. Затѣмъ передняя стѣнка кассеты выдвигается, съ объектива камеры снимается крышечка, и начинается химическое дѣйствіе лучей; понятно, что камера должна быть заранѣе установлена точно по фокусу. Время экспозиціи зависитъ отъ фокуснаго разстоянія объектива, діаметра діафрагмы, отъ состава и цвѣта стеколъ, а также отъ силы освѣщенія и цвѣта снимаемой карты. По объясненнымъ выше причинамъ въ картографической практикѣ это время гораздо продолжительнѣе, чѣмъ въ портретной фотографіи (минутъ пять и даже болѣе); оно опредѣляется опытомъ. Послѣ экспозиціи закрываютъ сперва объективъ, затѣмъ кассету, и послѣдняя вмѣстѣ съ заключенною въ ней пластинкою переносится обратно въ темную комнату.

На пластинкѣ, вынутой изъ кассеты послѣ экспозиціи, не видно никакихъ слѣдовъ дѣйствія свѣта, и изображеніе должно быть *проявлено*. Для этого пластинка обливается растворомъ желѣзнаго купороса; онъ выдѣляетъ изъ азотнокислаго серебра, подвергнутаго дѣйствію свѣта, чистое серебро въ видѣ чернаго порошка, причемъ самое выдѣленіе тѣмъ сильнѣе, чѣмъ сильнѣе дѣйствовалъ свѣтъ. Если выдѣленіе не достаточно, и изображеніе слабо, то оно усиливается обливаніемъ пластинки растворомъ пирогаловой кислоты. Въ результатѣ получается такъ называемый *негативъ*, т. е. изображеніе, въ которомъ темныя мѣста соотвѣтствуютъ свѣтлымъ мѣстамъ оригинала и наоборотъ; на негативѣ, полученномъ съ карты, вычерченной только черными линіями, будетъ черная поверхность съ бѣлымъ рисункомъ. Такъ какъ серебро въ свѣтлыхъ мѣстахъ негатива не потеряло еще своей свѣточувствительности, то проявленный лишь рисунокъ нельзя выносить на свѣтъ — онъ весь почернѣетъ; необходимо сдѣлать его неизмѣняющимся, т. е. удалить всѣ неразложившіяся первоначально соли серебра. Этотъ новый процессъ называется *фиксированіемъ* и заключается въ томъ, что проявленную пластинку обливаютъ водой, а затѣмъ погружаютъ въ ванну съ насыщеннымъ растворомъ сѣрноватисто-кислаго натра. Послѣ этого пластинка вновь обливается чистою водой, ставится въ отвѣсное положеніе (для свободнаго стока воды) и когда она высохнетъ, ее для предохраненія отъ сырости лакируютъ гуммиарабикомъ или, еще лучше, янтарнымъ лакомъ. Понятно, что проявленіе и фиксированіе должно производить въ темной комнатѣ.

Съ готоваго негатива можно получить произвольное число *позитивовъ*, или изображеній, на которыхъ свѣтлымъ мѣстамъ оригинала соотвѣтствуютъ свѣтлыя же части рисунка, а темнымъ — темныя. Позитивы печатаются на особой аррорутной бумагѣ, которая предварительно погружается сперва въ растворъ поваренной соли, а затѣмъ въ растворъ азотнокислаго серебра; отъ этого въ волокнахъ бумаги образуется осадокъ хлористаго серебра, чернѣющій отъ дѣйствія свѣта. Такую бумагу, высушенную въ темной комнатѣ, накладываютъ на негативъ къ коллодіоновой пленкѣ, помѣщаютъ въ *печатное шасси* и выставляютъ на свѣтъ. Печатное шасси (черт. 294) представляетъ деревянную рамку, съ передней стороны имѣющую обыкновенное стекло, а съ задней—составную крышку, нажимаемую застежками съ пружинами. Лучи свѣта, проникая черезъ стекло шасси и свѣтлыя части негатива, чернятъ бумагу, на которой и получается позитивный рисунокъ. Продолжительность печатанія зависитъ главнымъ образомъ отъ силы освѣщенія: въ прямыхъ лучахъ Солнца позитивъ готовъ черезъ 2—3 минуты, въ пасмурную же погоду приходится ждать нѣсколько часовъ. Чтобы слѣдить за процессомъ, открываютъ одну сторону задней крышки шасси, и, если рисунокъ еще не отпечатался, то крышка закрывается и шасси вновь выставляется на свѣтъ; вслѣдствіе надавливанія другихъ частей крышки бумага позитива не измѣнитъ своего положенія.



Черт. 294.

Отпечатанный позитивъ вынимается изъ шасси въ темной комнатѣ, фиксируется погруженіемъ въ растворъ сѣрноватисто-кислаго натра, который удаляетъ изъ него неразложившееся хлористое серебро, и промывается чистою водой. Однако фиксированный такимъ образомъ рисунокъ имѣетъ непріятный бурый цвѣтъ и со временемъ блѣднѣетъ; чтобы придать ему болѣе темный цвѣтъ и сдѣлать неизмѣняющимся, нужно въ немъ серебро замѣнить золотомъ. Этотъ процессъ называется *виражемъ* и заключается въ погруженіи позитивнаго рисунка въ растворъ хлористаго золота; при этомъ золото вытѣсняетъ серебро въ рисункѣ и сообщаетъ ему другой, пріятный цвѣтъ. Необходимо замѣтить, что виражъ предшествуетъ фиксажу, т. е. позитивный рисунокъ послѣ промывки въ водѣ погружается сперва въ растворъ хлористаго золота, а потомъ уже въ растворъ сѣрноватисто-кислаго натра.

199. Фотолитографія. Описанные выше фотографическіе процессы очень удобны для полученія одной или нѣсколькихъ копій съ готовой рукописной карты, причемъ понятно, что самыя копіи можно получать въ любомъ масштабѣ; но при помощи этихъ процессовъ нельзя печатать карту въ весьма большомъ количествѣ оттисковъ, потому что хотя съ одного негатива и можно получить безчисленное множество позитивовъ, но печатаніе каждаго требуетъ очень много времени (въ пасмурный день удается сдѣлать иногда только одинъ позитивъ); притомъ же фотографическіе позитивы вообще непрочны и дороги. Когда требуется получить сотни и тысячи копій съ одной карты, то приходится обращаться къ литографическимъ камнямъ и мѣднымъ доскамъ, но фотографія доставила способы получать на нихъ обратныя изображенія не медленнымъ путемъ гравированія, а простыми и быстрыми пріемами, называемыми *фотолитографіею* и *геліогравюрою*. Въ этихъ пріемахъ фотографія является лишь промежуточнымъ процессомъ, замѣняющимъ работу чертежника и гравера.

Фотографическіе снимки получаются, какъ извѣстно, не только въ линіяхъ, но и въ тѣняхъ: на негативѣ, а потомъ и на позитивѣ разложеніе солей серебра происходитъ болѣе или менѣе быстро, въ зависимости отъ силы свѣта, и фотографія отлично передаетъ малѣйшія измѣненія тѣней оригинала. При печатаніи же съ камней и особенно съ мѣдныхъ досокъ нельзя получать столь нѣжныхъ переходовъ тѣней; тѣни достигаются тамъ обыкновенно большею или меньшею густотою пунктира и штриховъ. Изготовленіе такихъ тѣней сопряжено съ техническими затрудненіями и требуетъ изящества и вкуса, которые присущи лишь прирожденнымъ художникамъ; это не дается каждому. Притомъ же въ картографическихъ изданіяхъ и не требуется тѣней: всѣ мѣстные предметы отлично выражаются и линейнымъ черченіемъ.

Ниже описаны способы полученія фотографическимъ путемъ линейныхъ рисунковъ на камняхъ и мѣдныхъ доскахъ, но такъ какъ прежніе съемочные брульоны покрывались красками, которыя не различаются въ одноцвѣтныхъ изданіяхъ, и такъ какъ, кромѣ того, при значительномъ уменьшеніи масштаба, многіе предметы надо выкинуть, а контуры упростить, дабы не обременить карту излишними подробностями, то прежде всего необходимо пояснить, какимъ образомъ приготовляютъ снимки, служащіе для дальнѣйшей работы.

Для изготовленія одного листа будущей карты мелкаго масштаба берутъ нѣсколько смежныхъ съемочныхъ брульоновъ масштаба крупнаго. Эти брульоны набиваютъ на доску, точно сводя ихъ рамки, и обыкновеннымъ фотографическимъ путемъ дѣлаютъ уменьшенную копію; но такъ какъ на такой копіи, если бы позитивъ былъ отпечатанъ обычнымъ способомъ, пространства, покрытыя красками, слабо отражающими химическіе лучи, получились бы сплошными черными пятнами, и притомъ на копіи получились бы всѣ подробности, излишнія для будущей карты, то позитивъ печатается на особой бумагѣ, пропитанной желѣзистыми солями, и весь рисунокъ получается голубого цвѣта. Такой позитивъ передается картографу для вытягиванія на немъ тушью только тѣхъ линій, которыя должны быть на картѣ. По готовому рисунку это дѣлается легко; искусство картографа необходимо здѣсь только для обобщенія очертаній, выкидыванія подробностей и подписей, перемѣны шрифтовъ и т. п. Затѣмъ съ этого позитива снимаютъ новый негативъ, на которомъ отпечатается только то, что сдѣлано тушью, прежній же рисунокъ, т. е. невытянутыя тушью линіи и сплошныя пятна, какъ исполненныя голубой краской, столь же обильной химическими лучами, какъ бѣлая бумага, вовсе не отпечатаются. При вторичномъ снимкѣ можно еще разъ уменьшить масштабъ, отъ чего всѣ неправильности черченія сглаживаются. Такъ, напримѣръ, при изготовленіи листовъ трехверстной Военно-топограф. карты Европейской Россіи по съемочнымъ брульонамъ въ масштабѣ 250 саж. въ дюймѣ, дѣлаютъ голубые позитивы въ масштабѣ $1^1/_2$ версты въ дюймѣ, т. е. уменьшаютъ оригиналъ въ 3 раза, а окончательные негативы для печатанія карты—въ масштабѣ 3 версты въ дюймѣ, т. е. вторично уменьшаютъ еще въ два раза.

Для печатанія карты при помощи фотолитографіи послѣдній позитивъ изготовляется на бумагѣ, покрытой тонкимъ слоемъ желатина, пропитаннаго растворомъ двухромокаліевой соли. Такой желатинъ имѣетъ драгоцѣнное свойство свертываться отъ дѣйствія свѣтовыхъ лучей и дѣлаться отъ того нерастворимымъ въ водѣ; въ обыкновенномъ печатномъ шасси подъ негативомъ, представляющимъ свѣтлый рисунокъ на черномъ фонѣ, получается на желатиновой бумагѣ свѣтло-бурый рисунокъ изъ свернувшагося желатина. Отъ послѣдующей промывки въ водѣ двухромокаліева соль въ мѣстахъ, гдѣ свѣтъ не дѣйствовалъ, то есть на всемъ пространствѣ фона рисунка, удаляется, и, слѣдовательно, рисунокъ фиксируется. Затѣмъ бумага высушивается и тогда она готова къ печати посредствомъ перевода на камень. Для этого ее опускаютъ въ воду минутъ на 5—10, потомъ протираютъ мягкою пропускною бумагой и накатываютъ на нее особымъ бархатнымъ валькомъ жирную переводную краску. Краска пристаетъ только къ очертаніямъ рисунка, къ прочимъ же частямъ бумаги не пристаетъ, потому что, подъ вліяніемъ смачиванія бумаги, желатинъ, на который дѣйствовалъ свѣтъ, пріобрѣтаетъ способность принимать краску, остальное же его пространство, гдѣ свѣтъ не дѣйствовалъ, впитываетъ воду, подобно губкѣ, и отталкиваетъ краску. Послѣ этого рисунокъ накладываютъ на подготовленный камень и печатаютъ съ него, какъ съ обыкновеннаго *перевода* (см. § 197, стр. 771).

200. Геліогравюра. Для полученія *геліогравюры* необходимо кромѣ фотографіи участіе гальванопластики. Прежде всего, какъ и въ фотолитографіи, приготовляютъ позитивный рисунокъ на желатинѣ. Для этого на листъ бумаги соотвѣтствующихъ размѣровъ, съ загнутыми краями, положенный на точно вывѣренную горизонтальную плоскость, наливаютъ жидкій желатинъ, смѣшанный съ сажею; примѣсь сажи имѣетъ двоякую цѣль: во первыхъ, при послѣдующемъ смываніи несвернувшагося желатина легче слѣдить за рисункомъ, а, во вторыхъ, оставшійся затѣмъ рисунокъ изъ свернувшагося желатина получаетъ отъ сажи шероховатую поверхность и, слѣдовательно, сдѣлаетъ шероховатыми и стѣнки углубленнаго рисунка на мѣдной доскѣ, что способствуетъ удержанію въ немъ печатной краски. Когда желатиновая пленка высохнетъ, ее погружаютъ (въ темной комнатѣ) въ растворъ двухромокаліевой соли и туда же опускаютъ стеклянную пластинку, на которой бумага, по вынутіи вмѣстѣ съ пластинкой, расправляется, дѣлаясь совершенно плоской. Затѣмъ бумага съ приготовленною желатиновою пленкой кладется въ печатное шасси подъ негативъ на стеклѣ. Такъ какъ въ этомъ шасси отъ дѣйствія свѣта происходитъ свертываніе желатина безъ чувствительнаго измѣненія его цвѣта, то за процессомъ нельзя слѣдить непосредственно, какъ при печатаніи обыкновеннаго позитива. Продолжительность экспозиціи, зависящая отъ силы освѣщенія, опредѣляется здѣсь особымъ *фотометромъ*, выставляемымъ на свѣтъ одновременно съ шасси. Полученный позитивъ слегка размачивается въ водѣ и накладывается желатиновою поверхностью на тщательно отшлифованную и высеребренную мѣдную доску, послѣ чего его разглаживаютъ руками и особыми валиками, чтобы выгнать изъ-подъ него пузырьки воздуха и воды и дать возможность всей поверхности желатина плотно пристать къ доскѣ. Далѣе доска съ приставшимъ къ ней позитивомъ погружается въ теплую воду (около 50° R.), налитую въ металлическій тазъ, подогрѣваемый снизу пламенемъ газовыхъ рожковъ. Надо замѣтить, что отъ холодной воды желатинъ только разбухаетъ (какъ въ процессѣ фотолитографіи), въ горячей же онъ растворяется, конечно за исключеніемъ свернувшагося подъ дѣйствіемъ свѣтовыхъ лучей и называемаго поэтому *роговымъ желатиномъ*. Такимъ образомъ въ горячей водѣ отстаетъ сперва бумага, а потомъ начинаетъ растворяться желатинъ, чему способствуютъ, покачивая доску руками; по прошествіи, примѣрно, одного часа, весь желатинъ, на который свѣтъ не дѣйствовалъ, растворится въ водѣ, и на доскѣ останется рельефный рисунокъ изъ рогового желатина, представляющій точную копію первоначальной карты. Послѣ этого доска вынимается изъ таза, просушивается въ тепломъ помѣщеніи и для приданія желатину электропроводности рисунокъ покрывается порошкомъ графита при помощи мягкой кисти.

Готовая доска погружается въ гальванопластическій бакъ и на нее наращиваютъ описаннымъ уже въ § 196 путемъ слой мѣди достаточной толщины, который по окончаніи процесса представитъ мѣдную доску съ углубленнымъ рисункомъ, годную для печатанія или прямо съ нея, или при помощи *перевода* на камень. Понятно, что сперва получаютъ пробный оттискъ, который свѣряютъ съ оригиналомъ, и если на немъ окажутся пропуски, то ихъ пополняютъ гравированіемъ отъ руки. Ошибокъ здѣсь быть не можетъ, а пропуски могутъ явиться отъ случайнаго сдиранія тонкихъ желатиновыхъ нитей при высушиваніи или при покрываніи ихъ графитовымъ порошкомъ.

Необходимо замѣтить, что послѣ каждаго отдѣльнаго процесса печатанія получается обратный рисунокъ, подобно изображенію въ зеркалѣ, и потому, для полученія окончательно отпечатанной карты въ естественномъ видѣ, необходимо, чтобы число процессовъ было четное. Въ обыкновенной фотографіи оно равно двумъ: негативъ (обратное изображеніе) и позитивъ (прямое); въ фотолитографіи оно равно четыремъ: первоначальный негативъ на стеклѣ (обратное изображеніе), позитивъ на желатинѣ (прямое), переводъ на камнѣ (обратное) и, наконецъ, оттискъ на бумагѣ (прямое). Въ геліогравюрѣ же число процессовъ нечетное (пять), а именно: 1) первоначальный негативъ на стеклѣ, 2) позитивъ на желатиновой пленкѣ, 3) рельефная гравюра изъ рогового желатина, 4) углубленный рисунокъ на мѣдной доскѣ и 5) оттискъ на бумагѣ. Чтобы и въ этомъ случаѣ получить окончательный оттискъ въ естественномъ, а не въ обратномъ видѣ, съ самаго уже начала дѣлаютъ такъ называемый *обращенный негативъ*, т. е. на первоначальномъ негативѣ получаютъ изображеніе не обратное, а прямое. Это достигается тѣмъ, что свѣточувствительную пластинку вставляютъ въ камеру коллодіоновою пленкой не къ объективу, а наружу. Само собою разумѣется, что въ этомъ случаѣ пластинка должна быть отлично отшлифована съ обѣихъ сторонъ, чтобы неправильное преломленіе лучей не исказило изображенія на свѣточувствительной пленкѣ. Есть и другой способъ получить обращенный негативъ — расположить передъ объективомъ фотографической камеры стеклянную прямоугольную призму, дѣйствующую на лучи, какъ обыкновенное зеркало, но этотъ способъ примѣняется рѣже, потому что весьма трудно пріобрѣсти большую призму хорошаго качества.

Измѣреніе — канва для воображенія и опора для сознанія; Оно исключаетъ сомнѣнія изъ области познанія.

И. Д. Павловъ.

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

Геодезія представляетъ одну изъ полезнѣйшихъ отраслей знанія; все наше земное существованіе ограничено предѣлами Земли, и изучать ея видъ и размѣры человѣчеству такъ же необходимо, какъ ознакомиться съ подробностями своего жилья отдѣльному человѣку. Другіе роды дѣятельности требуютъ или исключительно физическаго труда, или, наоборотъ, труда умственнаго, сопряженнаго съ нервнымъ переутомленіемъ; геодезическая же дѣятельность соединяетъ въ себѣ и тотъ, и другой, слагаясь изъ весьма различныхъ, но взаимно дополняющихъ другъ друга частей (наблюденій на чистомъ воздухѣ, среди природы, и вычисленій дома, за письменнымъ столомъ), и предохраняетъ отъ односторонности и ея опасныхъ послѣдствій. Подробности геодезическихъ работъ изложены въ книгѣ; здѣсь же не лишне привести главныя правила, которымъ должно слѣдовать.

При наблюденіяхъ:

1) Тщательно изучить и повѣрить инструменты, а также выработать такой порядокъ наблюденій, при которомъ по возможности исключались бы инструментальныя ошибки и получалась бы повѣрка всѣхъ измѣреній.

2) Не добиваться невозможнаго на практикѣ полнаго устраненія всѣхъ погрѣшностей и не избѣгать такъ называемыхъ приведеній: легче измѣрить и принять потомъ въ разсчетъ малую величину, чѣмъ сдѣлать ее нулемъ.

3) Выбирать для производства наблюденій благопріятную погоду и терпѣливо переносить ненастье.

4) Стараться поддерживать хорошія отношенія съ мѣстными обывателями, своими помощниками и прислугою; особенно не-

обходимо умѣть щадить ихъ самолюбіе. Дурныя отношенія отравляютъ чистыя радости, сопровождающія наблюденія, хорошія же вознаграждаются пріятнымъ расположеніемъ духа, преданностью окружающихъ и успѣхомъ самихъ наблюденій.

5) Держать въ порядкѣ полевые журналы, такъ, чтобы ими могъ пользоваться впослѣдствіи не только самъ наблюдатель, но и другія лица.

При вычисленіяхъ:

6) Сообразно требуемой точности вычислять съ различнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ; напримѣръ, не утруждать себя семизначными логариѳмическими таблицами тамъ, гдѣ можно ограничиться таблицами четырехзначными.

7) Вести вычисленія на графленой бумагѣ по разъ выработанной, хорошо усвоенной схемѣ и писать прилично, чтобы каждый могъ легко понять сущность дѣла и отыскивать, если понадобится, необходимыя числа.

8) Стараться не ошибаться въ числовыхъ выкладкахъ; если вычисленіе не удалось, то не впадать въ отчаяніе, а утѣшаться предвкушеніемъ удовольствія предстоящаго открытія и исправленія ошибокъ.

9) Неуклонно добиваться повѣрокъ и не начинать слѣдующей ступени выкладокъ, пока предъидущая не повѣрена.

10) Результаты отдѣльныхъ вычисленій выписывать болѣе крупными цифрами или подчеркивать, чтобы они бросались въ глаза.

Въ книгѣ приведены способы наблюденій и вычисленій, считающіеся наилучшими въ настоящее время; впослѣдствіи они могутъ оказаться устарѣвшими. Каждый долженъ слѣдить за успѣхами той отрасли знанія, которую онъ избралъ поприщемъ своей дѣятельности. Всего лучше поддерживать и обновлять свои свѣдѣнія изученіемъ образцовыхъ работъ и сношеніями съ выдающимися представителями любимой науки.

Постоянныя.

	числа	логариѳмы
Отношеніе окружн. къ діаметру π	3.1415 926	0.497 1499
2π	6.2831 853	0.798 1799
π^2	9.8696 044	0.994 2997
$\sqrt{\pi}$	1.7724 538	0.248 5749
Число градусовъ въ окружности	360	2.556 3025
— минутъ — —	21 600	4.334 4538
— секундъ — —	1 296 000	6.112 6050
Число градусовъ въ дугѣ равной радіусу	$57^\circ.295779$	1.758 1226
— минутъ — — — —	$3437'.7467$	3.536 2739
— секундъ — — — —	$206\,264''.806$	5.314 4251
Основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ (e) .	2.718 2818	0.434 2945
Модуль Бригговыхъ логариѳмовъ (M) . . .	0.434 2945	9.637 7843
$\sin 1''$		4.685 5749
$\frac{1}{2} \sin 1''$		4.384 5449

Тригонометрическіе ряды.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

$$tg\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

$$cotg\, x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4725}x^7 - \frac{2}{93555}x^9 - \dots$$

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots$$

$$cosec\, x = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \frac{127}{604800}x^7 + \dots$$

$$lg\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$lg\,\frac{1}{1 - x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

ТАБЛИЦЫ.

Таблица квадратовъ

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
.00	0.00	1.00	4.00	9.00	16.00	25.00	36.00	49.00	64.00	81.00	00
.01	0.00	1.02	4.04	9.06	16.08	25.10	36.12	49.14	64.16	81.18	01
.02	0.00	1.04	4.08	9.12	16.16	25.20	36.24	49.28	64.32	81.36	04
.03	0.00	1.06	4.12	9.18	16.24	25.30	36.36	49.42	64.48	81.54	09
.04	0.00	1.08	4.16	9.24	16.32	25.40	36.48	49.56	64.64	81.72	16
.05	0.00	1.10	4.20	9.30	16.40	25.50	36.60	49.70	64.80	81.90	25
.06	0.00	1.12	4.24	9.36	16.48	25.60	36.72	49.84	64.96	82.08	36
.07	0.00	1.14	4.28	9.42	16.56	25.70	36.84	49.98	65.12	82.26	49
.08	0.00	1.16	4.32	9.48	16.64	25.80	36.96	50.12	65.28	82.44	64
.09	0.00	1.18	4.36	9.54	16.72	25.90	37.08	50.26	65.44	82.62	81
.10	0.01	1.21	4.41	9.61	16.81	26.01	37.21	50.41	65.61	82.81	00
.11	0.01	1.23	4.45	9.67	16.89	26.11	37.33	50.55	65.77	82.99	21
.12	0.01	1.25	4.49	9.73	16.97	26.21	37.45	50.69	65.93	83.17	44
.13	0.01	1.27	4.53	9.79	17.05	26.31	37.57	50.83	66.09	83.35	69
.14	0.01	1.29	4.57	9.85	17.13	26.41	37.69	50.97	66.25	83.53	96
.15	0.02	1.32	4.62	9.92	17.22	26.52	37.82	51.12	66.42	83.72	25
.16	0.02	1.34	4.66	9.98	17.30	26.62	37.94	51.26	66.58	83.90	56
.17	0.02	1.36	4.70	10.04	17.38	26.72	38.06	51.40	66.74	84.08	89
.18	0.03	1.39	4.75	10.11	17.47	26.83	38.19	51.55	66.91	84.27	24
.19	0.03	1.41	4.79	10.17	17.55	26.93	38.31	51.69	67.07	84.45	61
.20	0.04	1.44	4.84	10.24	17.64	27.04	38.44	51.84	67.24	84.64	00
.21	0.04	1.46	4.88	10.30	17.72	27.14	38.56	51.98	67.40	84.82	41
.22	0.04	1.48	4.92	10.36	17.80	27.24	38.68	52.12	67.56	85.00	84
.23	0.05	1.51	4.97	10.43	17.89	27.35	38.81	52.27	67.73	85.19	29
.24	0.05	1.53	5.01	10.49	17.97	27.45	38.93	52.41	67.89	85.37	76
.25	0.06	1.56	5.06	10.56	18.06	27.56	39.06	52.56	68.06	85.56	25
.26	0.06	1.58	5.10	10.62	18.14	27.66	39.18	52.70	68.22	85.74	76
.27	0.07	1.61	5.15	10.69	18.23	27.77	39.31	52.85	68.39	85.93	29
.28	0.07	1.63	5.19	10.75	18.31	27.87	39.43	52.99	68.55	86.11	84
.29	0.08	1.66	5.24	10.82	18.40	27.98	39.56	53.14	68.72	86.30	41
.30	0.09	1.69	5.29	10.89	18.49	28.09	39.69	53.29	68.89	86.49	00
.31	0.09	1.71	5.33	10.95	18.57	28.19	39.81	53.43	69.05	86.67	61
.32	0.10	1.74	5.38	11.02	18.66	28.30	39.94	53.58	69.22	86.86	24
.33	0.10	1.76	5.42	11.08	18.74	28.40	40.06	53.72	69.38	87.04	89
.34	0.11	1.79	5.47	11.15	18.83	28.51	40.19	53.87	69.55	87.23	56
.35	0.12	1.82	5.52	11.22	18.92	28.62	40.32	54.02	69.72	87.42	25
.36	0.12	1.84	5.56	11.28	19.00	28.72	40.44	54.16	69.88	87.60	96
.37	0.13	1.87	5.61	11.35	19.09	28.83	40.57	54.31	70.05	87.79	69
.38	0.14	1.90	5.66	11.42	19.18	28.94	40.70	54.46	70.22	87.98	44
.39	0.15	1.93	5.71	11.49	19.27	29.05	40.83	54.61	70.39	88.17	21
.40	0.16	1.96	5.76	11.56	19.36	29.16	40.96	54.76	70.56	88.36	00
.41	0.16	1.98	5.80	11.62	19.44	29.26	41.08	54.90	70.72	88.54	81
.42	0.17	2.01	5.85	11.69	19.53	29.37	41.21	55.05	70.89	88.73	64
.43	0.18	2.04	5.90	11.76	19.62	29.48	41.34	55.20	71.06	88.92	49
.44	0.19	2.07	5.95	11.83	19.71	29.59	41.47	55.35	71.23	89.11	36
.45	0.20	2.10	6.00	11.90	19.80	29.70	41.60	55.50	71.40	89.30	25
.46	0.21	2.13	6.05	11.97	19.89	29.81	41.73	55.65	71.57	89.49	16
.47	0.22	2.16	6.10	12.04	19.98	29.92	41.86	55.80	71.74	89.68	09
.48	0.23	2.19	6.15	12.11	20.07	30.03	41.99	55.95	71.91	89.87	04
.49	0.24	2.22	6.20	12.18	20.16	30.14	42.12	56.10	72.08	90.06	01
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

чиселъ отъ 0.00 до 9.99.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
.50	0.25	2.25	6.25	12.25	20.25	30.25	42.25	56.25	72.25	90.25	00
.51	0.26	2.28	6.30	12.32	20.34	30.36	42.38	56.40	72.42	90.44	01
.52	0.27	2.31	6.35	12.39	20.43	30.47	42.51	56.55	72.59	90.63	04
.53	0.28	2.34	6.40	12.46	20.52	30.58	42.64	56.70	72.76	90.82	09
.54	0.29	2.37	6.45	12.53	20.61	30.69	42.77	56.85	72.93	91.01	16
.55	0.30	2.40	6.50	12.60	20.70	30.80	42.90	57.00	73.10	91.20	25
.56	0.31	2.43	6.55	12.67	20.79	30.91	43.03	57.15	73.27	91.39	36
.57	0.32	2.46	6.60	12.74	20.88	31.02	43.16	57.30	73.44	91.58	49
.58	0.33	2.49	6.65	12.81	20.97	31.13	43.29	57.45	73.61	91.77	64
.59	0.34	2.52	6.70	12.88	21.06	31.24	43.42	57.60	73.78	91.96	81
.60	0.36	2.56	6.76	12.96	21.16	31.36	43.56	57.76	73.96	92.16	00
.61	0.37	2.59	6.81	13.03	21.25	31.47	43.69	57.91	74.13	92.35	21
.62	0.38	2.62	6.86	13.10	21.34	31.58	43.82	58.06	74.30	92.54	44
.63	0.39	2.65	6.91	13.17	21.43	31.69	43.95	58.21	74.47	92.73	69
.64	0.40	2.68	6.96	13.24	21.52	31.80	44.08	58.36	74.64	92.92	96
.65	0.42	2.72	7.02	13.32	21.62	31.92	44.22	58.52	74.82	93.12	25
.66	0.43	2.75	7.07	13.39	21.71	32.03	44.35	58.67	74.99	93.31	56
.67	0.44	2.78	7.12	13.46	21.80	32.14	44.48	58.82	75.16	93.50	89
.68	0,46	2.82	7.18	13.54	21.90	32.26	44.62	58.98	75.34	93.70	24
.69	0.47	2.85	7.23	13.61	21.99	32.37	44.75	59.13	75.51	93.89	61
.70	0.49	2.89	7.29	13.69	22.09	32.49	44.89	59.29	75.69	94.09	00
.71	0.50	2.92	7.34	13.76	22.18	32.60	45.02	59.44	75.86	94.28	41
.72	0.51	2.95	7.39	13.83	22.27	32.71	45.15	59.59	76.03	94.47	84
.73	0.53	2.99	7.45	13.91	22.37	32.83	45.29	59.75	76.21	94.67	29
.74	0.54	3.02	7.50	13.98	22.46	32.94	45.42	59.90	76.38	94.86	76
.75	0.56	3.06	7.56	14.06	22.56	33.06	45.56	60.06	76.56	95.06	25
.76	0.57	3.09	7.61	14.13	22.65	33.17	45.69	60.21	76.73	95.25	76
.77	0.59	3.13	7.67	14.21	22.75	33.29	45.83	60.37	76.91	95.45	29
.78	0.60	3.16	7.72	14.28	22.84	33.40	45.96	60.52	77.08	95.64	84
.79	0.62	3.20	7.78	14.36	22.94	33.52	46.10	60.68	77.26	95.84	41
.80	0.64	3.24	7.84	14.44	23.04	33.64	46.24	60.84	77.44	96.04	00
.81	0.65	3.27	7.89	14.51	23.13	33.75	46.37	60.99	77.61	96.23	61
.82	0.67	3.31	7.95	14.59	23.23	33.87	46.51	61.15	77.79	96.43	24
.83	0.68	3.34	8.00	14.66	23.32	33.98	46.64	61.30	77.96	96.62	89
.84	0.70	3.38	8.06	14.74	23.42	34.10	46.78	61.46	78.14	96.82	56
.85	0.72	3.42	8.12	14.82	23.52	34.22	46.92	61.62	78.32	97.02	25
.86	0.73	3.45	8.17	14.89	23.61	34.33	47.05	61.77	78.49	97.21	96
.87	0.75	3.49	8.23	14.97	23.71	34.45	47.19	61.93	78.67	97.41	69
.88	0.77	3.53	8.29	15.05	23.81	34.57	47.33	62.09	78.85	97.61	44
.89	0.79	3.57	8.35	15.13	23.91	34.69	47.47	62.25	79.03	97.81	21
.90	0.81	3.61	8.41	15.21	24.01	34.81	47.61	62.41	79.21	98.01	00
.91	0.82	3.64	8.46	15.28	24.10	34.92	47.74	62.56	79.38	98.20	81
.92	0.84	3.68	8.52	15.36	24.20	35.04	47.88	62.72	79.56	98.40	64
.93	0.86	3.72	8.58	15.44	24.30	35.16	48.02	62.88	79.74	98.60	49
.94	0.88	3.76	8.64	15.52	24.40	35.28	48.16	63.04	79.92	98.80	36
.95	0.90	3.80	8.70	15.60	24.50	35.40	48.30	63.20	80.10	99.00	25
.96	0.92	3.84	8.76	15.68	24.60	35.52	48.44	63.36	80.28	99.20	16
.97	0.94	3.88	8.82	15.76	24.70	35.64	48.58	63.52	80.46	99.40	09
.98	0.96	3.92	8.88	15.84	24.80	35.76	48.72	63.68	80.64	99.60	04
.99	0.98	3.96	8.94	15.92	24.90	35.88	48.86	63.84	80.82	99.80	01
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Таблица для вычисленія

(въ единицахъ пятаго

S	$lg\ d_1 - lg\ d_2$									
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0°0′	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
20	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
30	0.4	0.4	0.4	0.4	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
40	0.7	0.7	0.7	0.7	0.6	0.5	0.4	0.4	0.3	0.3
50	1.1	1.1	1.1	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.5
1 0	1.7	1.6	1.6	1.5	1.3	1.2	1.1	0.9	0.8	0.7
10	2.3	2.2	2.1	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	1.1	0.9
20	2.9	2.9	2.8	2.6	2.4	2.1	1.9	1.6	1.4	1.2
30	3.7	3.7	3.5	3.3	3.0	2.7	2.4	2.1	1.8	1.5
40	4.6	4.5	4.4	4.1	3.7	3.3	2.9	2.6	2.2	1.8
50	5.6	5.5	5.3	4.9	4.5	4.1	3.6	3.1	2.6	2.2
2 0	6.6	6.5	6.3	5.9	5.4	4.8	4.2	3.7	3.1	2.6
10	7.8	7.7	7.4	6.9	6.3	5.7	5.0	4.3	3.7	3.1
20	9.0	8.9	8.6	8.0	7.3	6.6	5.8	5.0	4.3	3.6
30	10.3	10.2	9.8	9.2	8.4	7.6	6.6	5.7	4.9	4.1
40	11.8	11.6	11.2	10.4	9.6	8.6	7.6	6.5	5.6	4.7
50	13.3	13.1	12.6	11.8	10.8	9.7	8.5	7.4	6.3	5.3
3 0	14.9	14.7	14.1	13.2	12.1	10.8	9.6	8.2	7.0	5.9
10	16.6	16.4	15.7	14.7	13.5	12.1	10.7	9.2	7.8	6.6
20	18.4	18.1	17.4	16.4	15.0	13.4	11.8	10.2	8.7	7.3
30	20.3	20.0	19.2	18.0	16.5	14.8	13.0	11.2	9.6	8.0
40	22.2	22.0	21.1	19.8	18.1	16.2	14.3	12.4	10.5	8.8
50	24.3	24.0	23.1	21.6	19.8	17.8	15.6	13.5	11.5	9.7
4 0	26.5	26.1	25.1	23.6	21.6	19.3	17.0	14.7	12.5	10.5
10	28.7	28.3	27.3	25.5	23.4	21.0	18.4	16.0	13.6	11.4
20	31.1	30.7	29.5	27.6	25.3	22.6	19.9	17.2	14.7	12.4
30	33.5	33.1	31.8	29.8	27.1	24.4	21.5	18.6	15.8	13.3
40	36.0	35.6	34.2	32.0	29.3	26.3	23.1	20.0	17.0	14.3
50	38.6	38.1	36.6	34.4	31.5	28.2	24.8	21.4	18.3	15.3
5 0	41.4	40.8	39.3	36.8	33.7	30.2	26.5	22.9	19.5	16.4

тупоугольныхъ треугольниковъ.

десятичнаго знака).

S	$lg\ d_1 - lg\ d_2$									
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
5° 0′	41.4	40.8	39.3	36.8	33.7	30.2	26.5	22.9	19.5	16.4
10	44.2	43.6	41.9	39.7	35.9	32.3	28.3	24.5	20.8	17.5
20	47.1	46.4	44.6	41.8	38.3	34.3	30.2	26.1	22.2	18.7
30	50.0	49.3	47.4	44.5	40.7	36.5	32.1	27.7	23.6	19.9
40	53.1	52.4	50.4	47.3	43.3	38.7	34.1	29.4	25.1	21.1
50	56.3	55.6	53.4	50.0	45.9	41.1	36.1	31.2	26.6	22.4
6 0	59.6	58.8	56.5	53.0	48.5	43.5	38.2	33.0	28.1	23.7
10	62.9	62.1	59.7	56.0	51.3	45.9	40.3	34.9	29.7	25.0
20	66.4	65.4	62.9	59.0	54.1	48.4	42.6	36.8	31.3	26.3
30	69.9	69.0	66.4	62.1	56.9	51.1	44.8	38.7	33.0	27.7
40	73.5	72.6	69.8	65.4	59.9	53.6	47.2	40.7	34.7	29.2
50	77.3	76.3	73.3	68.7	62.9	56.4	49.6	42.8	36.5	30.7
7 0	81.1	80.1	76.9	72.1	66.0	59.1	52.0	44.9	38.3	32.2
10	85.0	83.9	80.6	75.6	69.2	62.0	54.5	47.2	40.1	33.7
20	89.0	87.8	84.4	79.2	72.4	65.0	57.0	49.3	42.0	35.3
30	93.1	91.8	88.3	82.8	75.8	67.9	59.7	51.6	43.9	37.0
40	97.3	96.0	92.3	86.6	79.2	71.0	62.3	54.0	45.9	38.6
50	101.6	100.3	96.3	90.3	82.8	74.2	65.1	56.3	47.9	40.3
8 0	105.9	104.5	100.5	94.2	86.3	77.3	67.9	58.7	49.9	42.0
10	110.4	108.9	104.7	98.1	89.9	80.6	70.7	61.1	52.1	43.8
20	114.9	113.4	109.0	102.3	93.6	83.8	73.7	63.7	54.3	45.6
30	119.6	118.0	113.4	106.4	97.4	87.2	76.6	66.2	56.4	47.4
40	124.3	122.7	117.9	110.6	101.3	90.8	79.7	68.8	58.7	49.3
50	129.2	127.4	121.9	114.8	105.2	94.2	82.8	71.6	60.9	51.3
9 0	134.1	132.3	127.2	119.3	109.2	97.8	85.9	74.3	63.3	53.1
10	139.1	137.3	131.9	123.7	113.3	101.5	89.1	77.0	65.4	55.1
20	144.2	142.3	136.7	128.2	117.4	105.2	92.4	79.9	68.0	57.2
30	149.4	147.5	141.8	132.9	121.6	109.0	95.7	82.8	70.5	59.2
40	154.7	152.6	146.8	137.6	125.9	112.8	99.1	85.7	72.9	61.3
50	160.1	157.9	151.9	142.3	130.3	116.8	102.6	88.7	75.5	63.5
10 0	165.6	163.4	157.0	147.2	134.7	120.8	106.1	91.7	78.0	65.7

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1]=lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2]=lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3]=lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4]=lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
0° 0′	417 9757		388 3276		875 097		2.065 175	6.474 11
10	417 9753	4	388 3275	1	875 097	0	2.065 175	6.474 11
20	417 9742	11	388 3271	4	875 096	1	2.065 175	6.474 11
30	417 9723	19	388 3265	6	875 095	1	2.065 175	6.474 11
40	417 9697	26	388 3256	9	875 093	2	2.065 174	6.474 11
50	417 9663	34	388 3245	11	875 091	2	2.065 174	6.474 11
1 0	417 9622	41	388 3231	14	875 088	3	2.065 173	6.474 11
10	417 9573	49	388 3215	16	875 085	3	2.065 173	6.474 11
20	417 9517	56	388 3196	19	875 081	4	2.065 172	6.474 11
30	417 9453	64	388 3175	21	875 077	4	2.065 171	6.474 11
40	417 9382	71	388 3151	24	875 072	5	2.065 170	6.474 11
50	417 9303	79	388 3125	26	875 067	5	2.065 169	6.474 11
2 0	417 9217	86	388 3096	29	875 061	6	2.065 168	6.474 11
10	417 9124	93	388 3065	31	875 055	6	2.065 167	6.474 11
20	417 9022	102	388 3031	34	875 048	7	2.065 165	6.474 11
30	417 8914	108	388 2995	36	875 041	7	2.065 164	6.474 12
40	417 8798	116	388 2956	39	875 033	8	2.065 162	6.474 12
50	417 8674	124	388 2915	41	875 025	8	2.065 161	6.474 12
3 0	417 8543	131	388 2871	44	875 016	9	2.065 159	6.474 12
10	417 8405	138	388 2825	46	875 007	9	2.065 157	6.474 12
20	417 8259	146	388 2777	48	874 997	10	2.065 155	6.474 12
30	417 8105	154	388 2725	52	874 987	10	2.065 153	6.474 12
40	417 7944	161	388 2672	53	874 976	11	2.065 151	6.474 12
50	417 7776	168	388 2616	56	874 965	11	2.065 149	6.474 12
4 0	417 7600	176	388 2557	59	874 953	12	2.065 146	6.474 12
10	417 7417	183	388 2496	61	874 941	12	2.065 144	6.474 13
20	417 7227	190	388 2433	63	874 928	13	2.065 141	6.474 13
30	417 7029	198	388 2367	66	874 915	13	2.065 139	6.474 13
40	417 6823	206	388 2298	69	874 901	14	2.065 136	6.474 13
50	417 6611	212	388 2227	71	874 887	14	2.065 133	6.474 13
5 0	417 6390	221	388 2154	73	874 872	15	2.065 130	6.474 13

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\,lg\,U$
0.00	8636.81	14.395	14.493	0′ 0″.000	—
8 636.81	8636.82	14.395	14.493	0 2 .044	7.098 5399
17 273.63	8636.82	14.395	14.493	0 4 .089	7.399 5699
25 910.45	8636.83	14.395	14.493	0 6 .133	7.575 6725
34 547.28	8636.83	14.395	14.492	0 8 .177	7.700 6172
43 184.11	8636.84	14.395	14.492	0 10 .221	7.797 5307
51 820.95	8636.85	14.395	14.491	0 12 .265	7.876 7200
60 457.80	8636.86	14.395	14.490	0 14 .308	7.943 6726
69 094.66	8636.87	14.395	14.489	0 16 .350	8.001 6732
77 731.53	8636.88	14.395	14.488	0 18 .392	8.052 8401
86 368.41	8636.90	14.395	14.487	0 20 .434	8.098 6091
95 005.31	8636.92	14.395	14.486	0 22 .474	8.140 0144
103 642.23	8636.93	14.395	14.485	0 24 .514	8.177 8163
112 279.16	8636.95	14.395	14.483	0 26 .554	8.212 5951
120 916.11	8636.97	14.395	14.481	0 28 .592	8.244 7965
129 553.08	8637.00	14.395	14.480	0 30 .629	8.274 7765
138 190.08	8637.02	14.395	14.478	0 32 .665	8.302 8243
146 827.10	8637.04	14.395	14.476	0 34 .701	8.329 1741
155 464.14	8637.07	14.395	14.474	0 36 .735	8.354 0200
164 101.21	8637.10	14.395	14.471	0 38 .768	8.377 5230
172 738.31	8637.13	14.395	14.469	0 40 .799	8.399 8242
181 375.44	8637.16	14.395	14.466	0 42 .829	8.421 0393
190 012.60	8637.19	14.395	14.464	0 44 .858	8.441 2677
198 649.79	8637.23	14.395	14.461	0 46 .885	8.460 6032
207 287.02	8637.26	14.395	14.458	0 48 .910	8.479 1144
215 924.28	8637.30	14.396	14.455	0 50 .934	8.496 8743
224 561.58	8637.34	14.396	14.453	0 52 .956	8.513 9391
233 198.92	8637.38	14.396	14.449	0 54 .977	8.530 3624
241 836.30	8637.42	14.396	14.446	0 56 .995	8.546 1909
250 473.72	8637.47	14.396	14.442	0 59 .012	8.561 4687
259 111.19		14.396	14.439	1 1 .027	8.576 2261

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1] = lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2] = lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3] = lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4] = lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
5° 0′	417 6390	227	388 2154	76	874 872	15	2.065 130	6.474 13
10	417 6163	235	388 2078	78	874 857	15	2.065 127	6.474 13
20	417 5928	243	388 2000	81	874 842	17	2.065 124	6.474 14
30	417 5685	249	388 1919	83	874 825	16	2.065 121	6.474 14
40	417 5436	257	388 1836	86	874 809	17	2.065 118	6.474 14
50	417 5179	265	388 1750	88	874 792	18	2.065 114	6.474 14
6 0	417 4914	271	388 1662	91	874 774	18	2.065 111	6.474 14
10	417 4643	279	388 1571	93	874 756	19	2.065 107	6.474 14
20	417 4364	287	388 1478	95	874 737	19	2.065 103	6.474 15
30	417 4077	294	388 1383	98	874 718	19	2.065 099	6.474 15
40	417 3783	301	388 1285	101	874 699	20	2.065 096	6.474 15
50	417 3482	308	388 1184	102	874 679	21	2.065 092	6.474 15
7 0	417 3174	315	388 1082	106	874 658	21	2.065 087	6.474 15
10	417 2859	323	388 0976	107	874 637	22	2.065 083	6.474 16
20	417 2536	330	388 0869	110	874 615	22	2.065 079	6.474 16
30	417 2206	338	388 0759	113	874 593	22	2.065 075	6.474 16
40	417 1868	344	388 0646	114	874 571	23	2.065 070	6.474 16
50	417 1524	352	388 0532	118	874 548	24	2.065 065	6.474 16
8 0	417 1172	359	388 0414	119	874 524	23	2.065 061	6.474 17
10	417 0813	366	388 0295	122	874 501	25	2.065 056	6.474 17
20	417 0447	374	388 0173	124	874 476	25	2.065 051	6.474 17
30	417 0073	380	388 0049	128	874 451	25	2.065 046	6.474 17
40	416 9693	388	387 9921	129	874 426	26	2.065 041	6.474 18
50	416 9305	395	387 9792	132	874 400	26	2.065 036	6.474 18
9 0	416 8910	402	387 9660	134	874 374	27	2.065 031	6.474 18
10	416 8508	409	387 9526	136	874 347	27	2.065 025	6.474 18
20	416 8099	416	387 9390	139	874 320	28	2.065 020	6.474 19
30	416 7683	424	387 9251	141	874 292	28	2.065 014	6.474 19
40	416 7259	430	387 9110	143	874 264	29	2.065 009	6.474 19
50	416 6829	438	387 8967	146	874 235	29	2.065 003	6.474 20
10 0	416 6391		387 8821		874 206		2.064 997	6.474 20

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\, lg\, U$
259 111.19	8637.51	14.396	14.439	1′ 1″.027	8.576 2261
267 748.70	8637.55	14.396	14.435	1 3.039	8.590 5041
276 386.25	8637.60	14.396	14.431	1 5.049	8.604 3330
285 023.85	8637.65	14.396	14.427	1 7.058	8.617 7372
293 661.50	8637.70	14.396	14.423	1 9.064	8.630 7431
302 299.20	8637.75	14.396	14.419	1 11.067	8.643 3756
310 936.95	8637.81	14.396	14.414	1 13.069	8.655 6541
319 574.76	8637.87	14.396	14.410	1 15.068	8.667 5996
328 212.63	8637.92	14.397	14.405	1 17.064	8.679 2280
336 850.55	8637.97	14.397	14.401	1 19.058	8.690 5567
345 488.52	8638.03	14.397	14.396	1 21.049	8.701 6016
354 126.55	8638.10	14.397	14.391	1 23.037	8.712 3753
362 764.65	8638.16	14.397	14.386	1 25.023	8.722 8930
371 402.81	8638.22	14.397	14.381	1 27.005	8.733 1652
380 041.03	8638.28	14.397	14.376	1 28.985	8.743 2031
388 679.31	8638.35	14.397	14.370	1 30.962	8.753 0190
397 317.66	8638.42	14.397	14.365	1 32.935	8.762 6209
405 956.08	8638.49	14.397	14.359	1 34.906	8.772 0193
414 594.57	8638.56	14.398	14.353	1 36.873	8.781 2227
423 233.13	8638.63	14.398	14.347	1 38.837	8.790 2373
431 871.76	8638.71	14.398	14.341	1 40.798	8.799 0730
440 510.47	8638.78	14.398	14.335	1 42.755	8.807 7366
449 149.25	8638.86	14.398	14.329	1 44.709	8.816 2334
457 788.11	8638.94	14.398	14.323	1 46.660	8.824 5717
466 427.05	8639.01	14.398	14.316	1 48.606	8.832 7573
475 066.06	8639.09	14.399	14.310	1 50.549	8.840 7946
483 705.15	8639.17	14.399	14.303	1 52.489	8.846 6890
492 344.32	8639.26	14.399	14.296	1 54.424	8.856 4467
500 983.58	8639.35	14.399	14.289	1 56.356	8.864 0718
509 622.93	8639.43	14.399	14.282	1 58.284	8.871 5694
518 262.36		14.399	14.275	2 0.208	8.878 9433

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1] = lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2] = lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3] = lg\,\frac{\varkappa}{2\rho\varkappa}$		$[4] = lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
10° 0′	416 6391		387 8821		874 206		2.064 997	6.474 20
10	416 5947	444	387 8673	148	874 176	30	2.064 991	6.474 20
20	416 5495	452	387 8522	151	874 146	30	2.064 985	6.474 21
30	416 5037	458	387 8369	153	874 115	31	2.064 979	6.474 21
40	416 4571	466	387 8214	155	874 084	31	2.064 973	6.474 21
50	416 4098	473	387 8056	158	874 053	31	2.064 966	6.474 21
11 0	416 3619	479	387 7897	159	874 021	32	2.064 960	6.474 22
10	416 3132	487	387 7734	163	873 988	33	2.064 954	6.474 22
20	416 2639	493	387 7570	164	873 956	32	2.064 947	6.474 22
30	416 2138	501	387 7403	167	873 922	34	2.064 940	6.474 23
40	416 1631	507	387 7234	169	873 888	34	2.064 934	6.474 23
50	416 1117	514	387 7063	171	873 854	34	2.064 927	6.474 23
12 0	416 0596	521	387 6889	174	873 819	35	2.064 920	6.474 24
10	416 0068	528	387 6713	176	873 784	35	2.064 913	6.474 24
20	415 9533	535	387 6535	178	873 749	35	2.064 906	6.474 25
30	415 8991	542	387 6354	181	873 712	37	2.064 898	6.474 25
40	415 8443	548	387 6171	183	873 676	36	2.064 891	6.474 25
50	415 7888	555	387 5986	185	873 639	37	2.064 884	6.474 26
13 0	415 7326	562	387 5799	187	873 601	38	2.064 876	6.474 26
10	415 6757	569	387 5609	190	873 563	38	2.064 869	6.474 26
20	415 6181	576	387 5417	192	873 525	38	2.064 861	6.474 27
30	415 5599	582	387 5223	194	873 486	39	2.064 853	6.474 27
40	415 5010	589	387 5027	196	873 447	39	2.064 845	6.474 27
50	415 4415	595	387 4829	198	873 407	40	2.064 837	6.474 28
14 0	415 3813	602	387 4628	201	873 367	40	2.064 829	6.474 28
10	415 3204	609	387 4425	203	873 327	40	2.064 821	6.474 29
20	415 2588	616	387 4220	205	873 286	41	2.064 813	6.474 29
30	415 1966	622	387 4012	208	873 244	42	2.064 805	6.474 30
40	415 1338	628	387 3803	209	873 202	42	2.064 796	6.474 30
50	415 0703	635	387 3591	212	873 160	42	2.064 788	6.474 30
15 0	415 0061	642	387 3377	214	873 117	43	2.064 779	6.474 31

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\,lg\,U$
518 262.36	8639.52	14.399	14.275	2′ 0″.208	8.878 9433
526 901.88	8639.60	14.399	14.267	2 2.128	8.886 1973
535 241.48	8639.70	14.399	14.260	2 4.043	8.893 3367
544 181.18	8639.79	14.400	14.252	2 5.955	8.900 3639
552 820.97	8639.88	14.400	14.245	2 7.862	8.907 2828
561 460.85	8639.98	14.400	14.237	2 9.765	8.914 0972
570 100.83	8640.08	14.400	14.229	2 11.664	8.920 8102
578 740.91	8640.17	14.400	14.221	2 13.558	8.927 4248
587 381.08	8640.27	14.400	14.213	2 15.448	8.933 9426
596 021.35	8640.37	14.401	14.204	2 17.333	8.940 3700
604 661.72	8640.47	14.401	14.196	2 19.213	8.946 7067
613 302.19	8640.58	14.401	14.187	2 21.089	8.952 9556
621 942.77	8640.68	14.401	14.179	2 22.960	8.959 1196
630 583.45	8640.78	14.401	14.170	2 24.826	8.965 2012
639 224.23	8640.90	14.401	14.161	2 26.687	8.971 2030
647 865.13	8641.00	14.402	14.152	2 28.544	8.977 1261
656 506.13	8641.11	14.402	14.143	2 30.395	8.982 9737
665 147.24	8641.22	14.402	14.134	2 32.241	8.988 7475
673 788.46	8641.34	14.402	14.124	2 34.082	8.994 4495
682 429.80	8641.45	14.402	14.115	2 35.919	9.000 0812
691 071.25	8641.56	14.403	14.105	2 37.750	9.005 6480
699 712.81	8641.68	14.403	14.095	2 39.575	9.011 1410
708 354.49	8641.80	14.403	14.086	2 41.395	9.016 5733
716 996.29	8641.92	14.403	14.076	2 43.209	9.021 9415
725 638.21	8642.04	14.403	14.066	2 45.018	9.027 2489
734 280.25	8642.16	14.404	14.055	2 46.822	9.032 4955
742 922.41	8642.28	14.404	14.045	2 48.620	9.037 6830
751 564.69	8642.40	14.404	14.035	2 50.413	9.042 8137
760 207.09	8642.54	14.404	14.024	2 52.199	9.047 8883
768 849.63	8642.66	14.404	14.013	2 53.980	9.052 9081
777 492.29		14.405	14.003	2 55.754	9.057 8737

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1]=lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2]=lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3]=lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4]=lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
15° 0′	415 0061	648	387 3377	216	873 117	43	2.064 779	6.474 31
10	414 9413	655	387 3161	218	873 074	44	2.064 771	6.474 31
20	414 8758	661	387 2943	220	873 030	44	2.064 762	6.474 32
30	414 8097	667	387 2723	223	872 986	44	2.064 753	6.474 32
40	414 7430	674	387 2500	224	872 942	45	2.064 744	6.474 33
50	414 6756	681	387 2276	227	872 897	46	2.064 735	6.474 33
16 0	414 6075	686	387 2049	229	872 851	45	2.064 726	6.474 33
10	414 5389	693	387 1820	231	872 806	47	2.064 717	6.474 34
20	414 4696	700	387 1589	233	872 759	46	2.064 708	6.474 34
30	414 3996	706	387 1356	236	872 713	47	2.064 698	6.474 35
40	414 3290	712	387 1120	237	872 666	48	2.064 689	6.474 35
50	414 2578	718	387 0883	239	872 618	48	2.064 679	6.474 36
17 0	414 1860	724	387 0644	242	872 570	48	2.064 670	6.474 36
10	414 1136	731	387 0402	243	872 522	49	2.064 660	6.474 37
20	414 0405	737	387 0159	246	872 473	49	2.064 651	6.474 37
30	413 9668	743	386 9913	248	872 424	49	2.064 641	6.474 38
40	413 8925	749	386 9665	249	872 375	50	2.064 631	6.474 38
50	413 8176	755	386 9416	252	872 325	51	2.064 621	6.474 39
18 0	413 7421	761	386 9164	254	872 274	50	2.064 611	6.474 39
10	413 6660	768	386 8910	256	872 224	52	2.064 601	6.474 40
20	413 5892	773	386 8654	257	872 172	51	2.064 590	6.474 40
30	413 5119	780	386 8397	260	872 121	52	2.064 580	6.474 41
40	413 4339	785	386 8137	262	872 069	52	2.064 570	6.474 41
50	413 3554	791	386 7875	264	872 017	53	2.064 559	6.474 42
19 0	413 2763	798	386 7611	266	871 964	53	2.064 549	6.474 42
10	413 1965	803	386 7345	267	871 911	54	2.064 538	6.474 43
20	413 1162	809	386 7078	270	871 857	54	2.064 527	6.474 43
30	413 0353	815	386 6808	272	871 803	54	2.064 516	6.474 44
40	412 9538	820	386 6536	273	871 749	55	2.064 506	6.474 44
50	412 8718	827	386 6263	276	871 694	55	2.064 495	6.474 45
20 0	412 7891		386 5987		871 639		2.064 484	6.474 46

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\,lg\,U$
777 492.29	8642.78	14.405	14.003	2′55″.754	9.057 8737
786 135.07	8642.92	14.405	13.992	2 57 .524	9.062 7876
794 777.99	8643.05	14.405	13.981	2 59 .286	9.067 6503
803 421.04	8643.18	14.405	13.970	3 1 .043	9.072 4635
812 064.22	8643.32	14.405	13.958	3 2 .794	9.077 2272
820 707.54	8643.45	14.406	13.947	3 4 .538	9.081 9433
829 350.99	8643.59	14.406	13.935	3 6 .277	9.086 6125
837 994.58	8643.72	14.406	13.924	3 8 .009	9.091 2364
846 638.30	8643.86	14.406	13.912	3 9 .735	9.095 8145
855 282.16	8644.00	14.407	13.900	3 11 .455	9.100 3495
863 926.16	8644.14	14.407	13.888	3 13 .167	9.104 8414
872 570.30	8644.28	14.407	13.876	3 14 .874	9.109 2913
881 214.58	8644.43	14.407	13.864	3 16 .574	9.113 6997
889 859.01	8644.58	14.408	13.852	3 18 .267	9.118 0675
898 503.59	8644.72	14.408	13.839	3 19 .953	9.122 3964
907 148.31	8644.86	14.408	13.827	3 21 .633	9.126 7125
915 793.17	8645.01	14.408	13.814	3 23 .306	9.130 9378
924 438.18	8645.17	14.409	13.801	3 24 .972	9.135 1524
933 083.35	8645.31	14.409	13.788	3 26 .632	9.139 3302
941 728.66	8645.47	14.409	13.775	3 28 .284	9.143 4723
950 374.13	8645.62	14.409	13.762	3 29 .929	9.147 5790
959 019.75	8645.78	14.409	13.749	3 31 .567	9.151 6511
967 665.53	8645.93	14.410	13.736	3 33 .198	9.155 6897
976 311.46	8646.09	14.410	13.722	3 34 .822	9.159 6950
984 957.55	8646.24	14.410	13.709	3 36 .439	9.163 6676
993 603.79	8646.41	14.411	13.695	3 38 .048	9.167 6083
1002 250.20	8646.57	14.411	13.681	3 39 .650	9.171 5173
1010 896.77	8646.73	14.411	13.667	3 41 .245	9.175 3952
1019 543.50	8646.89	14.411	13.653	3 42 .832	9.179 2432
1028 190.39	8647.05	14.412	13.639	3 44 .412	9.183 0610
1036 837.44		14.412	13.625	3 45 .984	9.186 8502

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1]=lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2]=lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3]=lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4]=lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
20° 0′	412 7891		386 5987		871 639		2.064 484	6.474 46
10	412 7059	832	386 5710	277	871 584	55	2.064 473	6.474 46
20	412 6221	838	386 5431	279	871 528	56	2.064 461	6.474 47
30	412 5377	844	386 5149	282	871 471	57	2.064 450	6.474 47
40	412 4528	849	386 4866	283	871 415	56	2.064 439	6.474 48
50	412 3673	855	386 4581	285	871 358	57	2.064 427	6.474 48
21 0	412 2812	861	386 4294	287	871 300	58	2.064 416	6.474 49
10	412 1946	866	386 4006	288	871 243	57	2.064 404	6.474 50
20	412 1074	872	386 3715	291	871 185	58	2.064 393	6.474 50
30	412 0197	877	386 3423	292	871 126	59	2.064 381	6.474 51
40	411 9314	883	386 3128	295	871 067	59	2.064 369	6.474 51
50	411 8426	888	386 2832	296	871 008	59	2.064 357	6.474 52
22 0	411 7532	894	386 2534	298	870 948	60	2.064 346	6.474 52
10	411 6633	899	386 2235	299	870 889	59	2.064 334	6.474 53
20	411 5728	905	386 1933	302	870 828	61	2.064 321	6.474 54
30	411 4819	909	386 1630	303	870 768	60	2.064 309	6.474 54
40	411 3903	916	386 1325	305	870 707	61	2.064 297	6.474 55
50	411 2983	920	386 1018	307	870 645	62	2.064 285	6.474 55
23 0	411 2057	926	386 0709	309	870 583	62	2.064 273	6.474 56
10	411 1126	931	386 0399	310	870 521	62	2.064 260	6.474 57
20	411 0190	936	386 0087	312	870 459	62	2.064 248	6.474 57
30	410 9249	941	385 9773	314	870 396	63	2.064 235	6.474 58
40	410 8302	947	385 9458	315	870 333	63	2.064 222	6.474 59
50	410 7351	951	385 9141	317	870 270	63	2.064 210	6.474 59
24 0	410 6394	957	385 8822	319	870 206	64	2.064 197	6.474 60
10	410 5432	962	385 8501	321	870 142	64	2.064 184	6.474 61
20	410 4466	966	385 8179	322	870 077	65	2.064 171	6.474 61
30	410 3494	972	385 7855	324	870 013	64	2.064 158	6.474 62
40	410 2517	977	385 7529	326	869 948	65	2.064 145	6.474 62
50	410 1536	981	385 7202	327	869 882	66	2.064 132	6.474 63
25 0	410 0549	987	385 6873	329	869 816	66	2.064 119	6.474 64

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\,lg\,U$
1 036 837.44	8647.22	14.412	13.625	3′45″.984	9.1868502
1 045 484.66	8647.39	14.412	13.610	3 47.548	9.1906101
1 054 132.05	8647.56	14.412	13.596	3 49.105	9.1943420
1 062 779.61	8647.72	14.413	13.581	3 50.654	9.1980462
1 071 427.33	8647.89	14.413	13.566	3 52.195	9.2017226
1 080 075.22	8648.06	14.413	13.552	3 53.729	9.2053728
1 088 723.28	8648.23	14.414	13.537	3 55.254	9.2089960
1 097 371.51	8648.41	14.414	13.521	3 56.772	9.2125928
1 106 019.92	8648.58	14.414	13.506	3 58.282	9.2161656
1 114 668.50	8648.76	14.415	13.491	3 59.783	9.2197116
1 123 317.26	8648.93	14.415	13.476	4 1.277	9.2232350
1 131 966.19	8649.11	14.415	13.460	4 2.762	9.2267329
1 140 615.30	8649.29	14.415	13.444	4 4.239	9.2302072
1 149 264.59	8649.48	14.416	13.428	4 5.708	9.2336577
1 157 914.07	8649.65	14.416	13.413	4 7.169	9.2370853
1 166 563.72	8649.82	14.416	13.397	4 8.621	9.2404652
1 175 213.54	8650.01	14.417	13.381	4 10.065	9.2438726
1 183 863.55	8650.20	14.417	13.365	4 11.501	9.2472328
1 192 513.75	8650.38	14.417	13.349	4 12.928	9.2505718
1 201 164.13	8650.57	14.418	13.332	4 14.346	9.2538893
1 209 814.70	8650.76	14.418	13.315	4 15.756	9.2571854
1 218 465.46	8650.95	14.418	13.299	4 17.158	9.2604611
1 227 116.41	8651.13	14.418	13.282	4 18.550	9.2637165
1 235 767.54	8651.32	14.419	13.265	4 19.934	9.2669517
1 244 418.86	8651.51	14.419	13.248	4 21.309	9.2701663
1 253 070.37	8651.71	14.419	13.231	4 22.676	9.2733632
1 261 722.08	8651.90	14.420	13.213	4 24.033	9.2765401
1 270 373.98	8652.09	14.420	13.196	4 25.382	9.2796980
1 279 026.07	8652.29	14.420	13.179	4 26.721	9.2828373
1 287 678.36	8652.48	14.421	13.162	4 28.052	9.2859584
1 296 330.84		14.421	13.144	4 29.374	9.2890614

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1]=lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2]=lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3]=lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4]=lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
25° 0′	410 0549	991	385 6873	330	869 816	66	2.064 119	6.474 64
10	409 9558	996	385 6543	332	869 750	66	2.064 106	6.474 64
20	409 8562	1001	385 6211	334	869 684	67	2.064 093	6.474 65
30	409 7561	1005	385 5877	335	869 617	67	2.064 079	6.474 66
40	409 6556	1011	385 5542	337	869 550	67	2.064 066	6.474 66
50	409 5545	1014	385 5205	338	869 483	68	2.064 052	6.474 67
26 0	409 4531	1020	385 4867	340	869 415	68	2.064 039	6.474 68
10	409 3511	1024	385 4527	341	869 347	68	2.064 025	6.474 68
20	409 2487	1029	385 4186	343	869 279	69	2.064 012	6.474 69
30	409 1458	1033	385 3843	344	869 210	69	2.063 998	6.474 70
40	409 0425	1038	385 3499	346	869 141	69	2.063 984	6.474 71
50	408 9387	1042	385 3153	348	869 072	69	2.063 970	6.474 71
27 0	408 8345	1047	385 2805	349	869 003	70	2.063 956	6.474 72
10	408 7298	1051	385 2456	350	868 933	70	2.063 942	6.474 73
20	408 6247	1056	385 2106	352	868 863	71	2.063 928	6.474 73
30	408 5191	1059	385 1754	353	868 792	70	2.063 914	6.474 74
40	408 4132	1064	385 1401	355	868 722	71	2.063 900	6.474 75
50	408 3068	1069	385 1046	356	868 651	71	2.063 886	6.474 75
28 0	408 1999	1072	385 0690	357	868 580	72	2.063 872	6.474 76
10	408 0927	1077	385 0333	359	868 508	72	2.063 857	6.474 77
20	407 9850	1081	384 9974	361	868 436	72	2.063 843	6.474 78
30	407 8769	1085	384 9613	361	868 364	72	2.063 829	6.474 78
40	407 7684	1089	384 9252	363	868 292	73	2.063 814	6.474 79
50	407 6595	1093	384 8889	365	868 219	73	2.063 800	6.474 80
29 0	407 5502	1097	384 8524	365	868 146	73	2.063 785	6.474 80
10	407 4405	1101	384 8159	367	868 073	73	2.063 771	6.474 81
20	407 3304	1105	384 7792	369	868 000	74	2.063 756	6.474 82
30	407 2199	1109	384 7423	369	867 926	74	2.063 741	6.474 83
40	407 1090	1113	384 7054	371	867 852	74	2.063 726	6.474 83
50	406 9977	1116	384 6683	372	867 778	74	2.063 711	6.474 84
30 0	406 8861		384 6311		867 704		2.063 697	6.474 85

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\,lg\,U$
1 296 330.84	8652.68	14.421	13.144	4′29″.374	9.289 0614
1 304 983.52	8652.88	14.421	13.126	4 30.686	9.292 1464
1 313 636.40	8653.08	14.422	13.109	4 31.990	9.295 2140
1 322 289.48	8653.28	14.422	13.090	4 33.284	9.298 2643
1 330 942.76	8653.48	14.422	13.072	4 34.569	9.301 2977
1 339 596.24	8653.68	14.423	13.053	4 35.844	9.304 3141
1 348 249.92	8653.88	14.423	13.035	4 37.111	9.307 3142
1 356 903.80	8654.09	14.423	13.017	4 38.368	9.310 2975
1 365 557.89	8654.29	14.424	12.998	4 39.615	9.313 2651
1 374 212.18	8654.50	14.424	12.979	4 40.854	9.316 2168
1 382 866.68	8654.70	14.424	12.961	4 42.082	9.319 1529
1 391 521.38	8654.91	14.425	12.942	4 43.301	9.322 0735
1 400 176.29	8655.12	14.425	12.923	4 44.511	9.324 9790
1 408 831.41	8655.33	14.425	12.904	4 45.711	9.327 8694
1 417 486.74	8655.54	14.426	12.884	4 46.902	9.330 7449
1 426 142.28	8655.74	14.426	12.865	4 48.082	9.333 6061
1 434 798.02	8655.96	14.426	12.846	4 49.254	9.336 4527
1 443 453.98	8656.17	14.427	12.826	4 50.415	9.339 2852
1 452 110.15	8656.39	14.427	12.806	4 51.566	9.342 1037
1 460 766.54	8656.60	14.427	12.787	4 52.708	9.344 9084
1 469 423.14	8656.82	14.428	12.767	4 53.840	9.347 6993
1 478 079.96	8657.03	14.428	12.747	4 54.961	9.350 4769
1 486 736.99	8657.25	14.429	12.727	4 56.073	9.353 2411
1 495 394.24	8657.46	14.429	12.707	4 57.175	9.355 9926
1 504 051.70	8657.68	14.429	12.686	4 58.267	9.358 7309
1 512 709.38	8657.91	14.430	12.666	4 59.349	9.361 4564
1 521 367.29	8658.12	14.430	12.645	5 0.420	9.364 1694
1 530 025.41	8658.34	14.430	12.625	5 1.482	9.366 8701
1 538 683.75	8658.57	14.431	12.604	5 2.533	9.369 5585
1 547 342.32	8658.79	14.431	12.583	5 3.574	9.372 2350
1 556 001.11		14.431	12.562	5 4.605	9.374 8993

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1]=lg\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2]=lg\frac{\varkappa}{p}$		$[3]=lg\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4]=lg\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
30° 0′	406 8861		384 6311		867 704		2.063 697	6.474 85
		1120		374		75		
10	406 7741		384 5937		867 629		2.063 682	6.474 86
		1124		375		75		
20	406 6617		384 5562		867 554		2.063 667	6.474 86
		1128		375		75		
30	406 5489		384 5187		867 479		2.063 652	6.474 87
		1131		378		75		
40	406 4358		384 4809		867 404		2.063 637	6.474 88
		1136		378		76		
50	406 3222		384 4431		867 328		2.063 621	6.474 89
		1138		379		76		
31 0	406 2084		384 4052		867 252		2.063 606	6.474 89
		1142		381		76		
10	406 0942		384 3671		867 176		2.063 591	6.474 90
		1146		382		77		
20	405 9796		384 3289		867 099		2.063 576	6.474 91
		1149		383		76		
30	405 8647		384 2906		867 023		2.063 560	6.474 92
		1153		384		77		
40	405 7494		384 2522		866 946		2.063 545	6.474 93
		1156		386		77		
50	405 6338		384 2136		866 869		2.063 530	6.474 93
		1159		386		77		
32 0	405 5179		384 1750		866 792		2.063 514	6.474 94
		1163		388		78		
10	405 4016		384 1362		866 714		2.063 499	6.474 95
		1165		388		78		
20	405 2851		384 0974		866 636		2.063 483	6.474 96
		1170		390		78		
30	405 1681		384 0584		866 558		2.063 468	6.474 96
		1172		391		78		
40	405 0509		384 0193		866 480		2.063 452	6.474 97
		1175		392		78		
50	404 9334		383 9801		866 402		2.063 436	6.474 98
		1179		392		79		
33 0	404 8155		383 9409		866 323		2.063 421	6.474 99
		1182		394		78		
10	404 6973		383 9015		866 245		2.063 405	6.475 00
		1184		395		79		
20	404 5789		383 8620		866 166		2.063 389	6.475 00
		1188		396		80		
30	404 4601		383 8224		866 086		2.063 373	6.475 01
		1191		397		79		
40	404 3410		383 7827		866 007		2.063 357	6.475 02
		1194		398		80		
50	404 2216		383 7429		865 927		2.063 341	6.475 03
		1196		399		79		
34 0	404 1020		383 7030		865 848		2.063 325	6.475 03
		1199		399		80		
10	403 9821		383 6631		865 768		2.063 309	6.475 04
		1202		401		80		
20	403 8619		383 6230		865 688		2.063 293	6.475 05
		1205		402		81		
30	403 7414		383 5828		865 607		2.063 277	6.475 06
		1208		402		80		
40	403 6206		383 5426		865 527		2.063 261	6.475 07
		1210		404		81		
50	403 4996		383 5022		865 446		2.063 245	6.475 07
		1213		404		81		
35 0	403 3783		383 4618		865 365		2.063 229	6.475 08

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\, lg\, U$
1 556 001.11	8659.01	14.431	12.562	5′ 4″.605	9.374 8993
1 564 660.12	8659.23	14.432	12.541	5 5.626	9.377 5521
1 573 319.35	8659.46	14.432	12.520	5 6.636	9.380 1931
1 581 978.81	8659.68	14.433	12.499	5 7.636	9.382 8227
1 590 638.49	8659.91	14.433	12.477	5 8.626	9.385 4409
1 599 298.40	8660.14	14.433	12.456	5 9.605	9.388 0481
1 607 958.54	8660.36	14.434	12.434	5 10.573	9.390 6441
1 616 618.90	8660.59	14.434	12.413	5 11.532	9.393 2294
1 625 279.49	8660.82	14.435	12.391	5 12.479	9.395 8038
1 633 940.31	8661.05	14.435	12.369	5 13.417	9.398 3677
1 642 601.36	8661.28	14.435	12.347	5 14.343	9.400 9210
1 651 262.64	8661.51	14.436	12.325	5 15.259	9.403 4640
1 659 924.15	8661.74	14.436	12.303	5 16.163	9.405 9969
1 668 585.89	8661.97	14.436	12.280	5 17.059	9.408 5198
1 677 247.86	8662.20	14.437	12.258	5 17.943	9.411 0325
1 685 910.06	8662.44	14.437	12.236	5 18.816	9.413 5355
1 694 572.50	8662.69	14.438	12.213	5 19.678	9.416 0289
1 703 235.19	8662.92	14.438	12.190	5 20.530	9.418 5127
1 711 898.11	8663.15	14.438	12.167	5 21.371	9.420 9871
1 720 561.26	8663.38	14.439	12.144	5 22.200	9.423 4522
1 729 224.64	8663.62	14.439	12.121	5 23.019	9.425 9079
1 737 888.26	8663.85	14.440	12.098	5 23.828	9.428 3545
1 746 552.11	8664.08	14.440	12.075	5 24.625	9.430 7920
1 755 216.19	8664.33	14.440	12.052	5 25.411	9.433 2208
1 763 880.52	8664.57	14.441	12.028	5 26.186	9.435 6409
1 772 545.09	8664.82	14.441	12.005	5 26.950	9.438 0522
1 781 209.91	8665.05	14.442	11.981	5 27.703	9.440 4550
1 789 874.96	8665.29	14.442	11.957	5 28.446	9.442 8495
1 798 540.25	8665.53	14.442	11.933	5 29.177	9.445 2355
1 807 205.78	8665.78	14.443	11.909	5 29.896	9.447 6133
1 815 871.56		14.443	11.885	5 30.605	9.449 9830

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1] = lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2] = lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3] = lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4] = lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
35° 0′	403 3783	1216	383 4618	405	865 365	81	2.063 229	6.475 08
10	403 2567	1218	383 4213	406	865 284	81	2.063 213	6.475 09
20	403 1349	1220	383 3807	407	865 203	81	2.063 196	6.475 10
30	403 0129	1223	383 3400	408	865 122	82	2.063 180	6.475 11
40	402 8906	1226	383 2992	408	865 040	82	2.063 164	6.475 12
50	402 7680	1228	383 2584	410	864 958	81	2.063 148	6.475 12
36 0	402 6452	1230	383 2174	410	864 877	82	2.063 131	6.475 13
10	402 5222	1232	383 1764	410	864 795	83	2.063 115	6.475 14
20	402 3990	1235	383 1354	412	864 712	82	2.063 098	6.475 15
30	402 2755	1237	383 0942	412	864 630	82	2.063 082	6.475 16
40	402 1518	1239	383 0530	413	864 548	83	2.063 065	6.475 16
50	402 0279	1241	383 0117	414	864 465	83	2.063 049	6.475 17
37 0	401 9038	1244	382 9703	415	864 382	83	2.063 032	6.475 18
10	401 7794	1245	382 9288	415	864 299	83	2.063 016	6.475 19
20	401 6549	1248	382 8873	416	864 216	83	2.062 999	6.475 20
30	401 5301	1249	382 8457	416	864 133	83	2.062 982	6.475 21
40	401 4052	1251	382 8041	417	864 050	84	2.062 966	6.475 21
50	401 2801	1254	382 7624	418	863 966	83	2.062 949	6.475 22
38 0	401 1547	1255	382 7206	418	863 883	84	2.062 932	6.475 23
10	401 0292	1257	382 6788	419	863 799	84	2.062 916	6.475 24
20	400 9035	1258	382 6369	420	863 715	84	2.062 899	6.475 25
30	400 7777	1261	382 5949	420	863 631	84	2.062 882	6.475 26
40	400 6516	1262	382 5529	421	863 547	84	2.062 865	6.475 26
50	400 5254	1263	382 5108	421	863 463	84	2.062 848	6.475 27
39 0	400 3991	1266	382 4687	422	863 379	84	2.062 832	6.475 28
10	400 2725	1266	382 4265	422	863 295	85	2.062 815	6.475 29
20	400 1459	1269	382 3843	423	863 210	84	2.062 798	6.475 30
30	400 0190	1270	382 3420	423	863 126	85	2.062 781	6.475 31
40	399 8920	1271	382 2997	424	863 041	85	2.062 764	6.475 32
50	399 7649	1272	382 2573	424	862 956	85	2.062 747	6.475 32
40 0	399 6377		382 2149		862 871		2.062 730	6.475 33

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	φ — u	lg lg U
1 815 871.56	8666.01	14.443	11.885	5′30″.605	9.4499830
1 824 537.57	8666.26	14.444	11.861	5 31.303	9.4523447
1 833 203.83	8666.50	14.444	11.837	5 31.989	9.4546985
1 841 870.33	8666.75	14.444	11.813	5 32.664	9.4570444
1 850 537.08	8666.99	14.445	11.788	5 33.328	9.4593827
1 859 204.07	8667.23	14.445	11.764	5 33.981	9.4617133
1 867 871.30	8667.48	14.446	11.739	5 34.622	9.4640362
1 876 538.78	8667.73	14.446	11.714	5 35.252	9.4663518
1 885 206.51	8667.97	14.446	11.690	5 35.871	9.4686601
1 893 874.48	8668.22	14.447	11.665	5 36.478	9.4709612
1 902 542.70	8668.47	14.447	11.640	5 37.074	9.4732549
1 911 211.17	8668.71	14.448	11.614	5 37.658	9.4755416
1 919 879.88	8668.96	14.448	11.589	5 38.232	9.4778214
1 928 548.84	8669.21	14.448	11.564	5 38.794	9.4800942
1 937 218.05	8669.46	14.449	11.538	5 39.344	9.4823604
1 945 887.51	8669.71	14.449	11.513	5 39.883	9.4846198
1 954 557.22	8669.96	14.450	11.487	5 40.410	9.4868723
1 963 227.18	8670.21	14.450	11.461	5 40.926	9.4891186
1 971 897.39	8670.45	14.451	11.436	5 41.430	9.4913582
1 980 567.84	8670.71	14.451	11.410	5 41.923	9.4935914
1 989 238.55	8670.96	14.451	11.384	5 42.404	9.4958185
1 997 909.51	8671.21	14.452	11.358	5 42.874	9.4980393
2 006 580.72	8671.46	14.452	11.331	5 43.332	9.5002539
2 015 252.18	8671.72	14.453	11.305	5 43.778	9.5024623
2 023 923.90	8671.97	14.453	11.279	5 44.213	9.5046649
2 032 595.87	8672.22	14.454	11.252	5 44.636	9.5068616
2 041 268.09	8672.47	14.454	11.226	5 45.048	9.5090523
2 049 940.56	8672.73	14.454	11.199	5 45.448	9.5112372
2 058 613.29	8672.98	14.455	11.172	5 45.836	9.5134166
2 067 286.27	8673.24	14.455	11.145	5 46.212	9.5155903
2 075 959.51		14.456	11.118	5 46.577	9.5177585

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	[1] = $lg \frac{\varkappa}{\rho}$		[2] = $lg \frac{\varkappa}{\nu}$		[3] = $lg \frac{\rho}{2\rho\varkappa}$		[4] = $lg \frac{\varkappa}{2\rho\nu}$	$lg R$
	8.8		8.8		4.3			
40° 0′	399 6377	1274	382 2149	424	862 871	84	2.062 730	6.475 33
10	399 5103	1275	382 1725	426	862 787	85	2.062 713	6.475 34
20	399 3828	1277	382 1299	425	862 702	86	2.062 696	6.475 35
30	399 2551	1277	382 0874	426	862 616	85	2.062 679	6.475 36
40	399 1274	1279	382 0448	426	862 531	85	2.062 662	6.475 37
50	398 9995	1280	382 0022	427	862 446	85	2.062 645	6.475 38
41 0	398 8715	1281	381 9595	427	862 361	86	2.062 628	6.475 38
10	398 7434	1282	381 9168	427	862 275	85	2.062 611	6.475 39
20	398 6152	1283	381 8741	428	862 190	86	2.062 594	6.475 40
30	398 4869	1284	381 8313	428	862 104	85	2.062 577	6.475 41
40	398 3585	1285	381 7885	428	862 019	86	2.062 560	6.475 42
50	398 2300	1285	381 7457	429	861 933	86	2.062 542	6.475 43
42 0	398 1015	1287	381 7028	428	861 847	85	2.062 525	6.475 43
10	397 9728	1287	381 6600	429	861 762	86	2.062 508	6.475 44
20	397 8441	1288	381 6171	430	861 676	86	2.062 495	6.475 45
30	397 7153	1288	381 5741	429	861 590	86	2.062 474	6.475 46
40	397 5864	1289	381 5312	430	861 504	86	2.062 457	6.475 47
50	397 4575	1290	381 4882	430	861 418	86	2.062 439	6.475 48
43 0	397 3285	1291	381 4452	430	861 332	86	2.062 422	6.475 49
10	397 1994	1290	381 4022	431	861 246	86	2.062 405	6.475 50
20	397 0704	1292	381 3591	430	861 160	86	2.062 388	6.475 50
30	396 9412	1292	381 3161	431	861 074	86	2.062 371	6.475 51
40	396 8120	1292	381 2730	430	860 988	86	2.062 353	6.475 52
50	396 6828	1293	381 2300	431	860 902	87	2.062 336	6.475 53
44 0	396 5535	1292	381 1869	431	860 815	86	2.062 319	6.475 54
10	396 4243	1293	381 1438	431	860 729	86	2.062 302	6.475 55
20	396 2950	1294	381 1007	431	860 643	86	2.062 284	6.475 56
30	396 1656	1293	381 0576	431	860 557	86	2.062 267	6.475 56
40	396 0363	1294	381 0145	432	860 471	87	2.062 250	6.475 57
50	395 9069	1293	380 9713	431	860 384	86	2.062 233	6.475 58
45 0	395 7776		380 9282		860 298		2.062 215	6.475 59

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридiана.		Дуга меридiана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lglg\,U$
2 075 959.51	8673.49	14.456	11.118	5′46″.577	9.517 7585
2 084 633.00	8673.74	14.456	11.091	5 46 .930	9.519 9211
2 093 306.74	8674.00	14.456	11.064	5 47 .272	9.522 0784
2 101 980.74	8674.25	14.457	11.037	5 47 .601	9.524 2303
2 110 654.99	8674.51	14.457	11.009	5 47 .919	9.526 3771
2 119 329.50	8674.77	14.458	10.982	5 48 .225	9.528 5186
2 128 004.27	8675.02	14.458	10.954	5 48 .519	9.530 6549
2 136 679.29	8675.27	14.459	10.927	5 48 .802	9.532 7864
2 145 354.56	8675.53	14.459	10.899	5 49 .072	9.534 9127
2 154 030.09	8675.79	14.459	10.871	5 49 .331	9.537 0342
2 162 705.88	8676.05	14.460	10.843	5 49 .578	9.539 1508
2 171 381.93	8676.30	14.460	10.815	5 49 .814	9.541 2626
2 180 058.23	8676.56	14.461	10.787	5 50 .037	9.543 3699
2 188 734.79	8676.82	14.461	10.759	5 50 .249	9.545 4722
2 197 411.61	8677.08	14.462	10.731	5 50 .448	9.547 5702
2 206 088.69	8677.33	14.462	10.702	5 50 .636	9.549 6636
2 214 766.02	8677.58	14.462	10.674	5 50 .812	9.551 7526
2 223 443.60	8677.84	14.463	10.645	5 50 .976	9.553 8372
2 232 121.44	8678.11	14.463	10.617	5 51 .129	9.555 9174
2 240 799.55	8678.36	14.464	10.588	5 51 .269	9.557 9933
2 249 477.91	8678.62	14.464	10.559	5 51 .398	9.560 0650
2 258 156.53	8678.88	14.465	10.530	5 51 .514	9.562 1327
2 266 835.41	8679.14	14.465	10.501	5 51 .619	9.564 1962
2 275 514.55	8679.39	14.465	10.472	5 51 .712	9.566 2556
2 284 193 94	8679.65	14.466	10.443	5 51 .793	9.568 3113
2 292 873.59	8679.91	14.466	10.414	5 51 .862	9.570 3629
2 301 553.50	8680.17	14.467	10.384	5 51 .919	9.572 4106
2 310 133.67	8680.42	14.467	10.355	5 51 .964	9.574 4547
2 318 914.09	8680.68	14.468	10.325	5 51 .997	9.576 4949
2 327 594.77	8680.95	14.468	10.296	5 52 .019	9.578 5316
2 336 275.72		14.469	10.266	5 52 .028	9.580 5647

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1]=lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2]=lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3]=lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4]=lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
45° 0′	395 7776	1294	380 9282	431	860 298	86	2.062 215	6.475 59
10	395 6482	1294	380 8851	431	860 212	86	2.062 198	6.475 60
20	395 5188	1293	380 8420	431	860 126	87	2.062 181	6.475 61
30	395 3895	1294	380 7989	432	860 039	86	2.062 164	6.475 62
40	395 2601	1293	380 7557	431	859 953	86	2.062 146	6.475 62
50	395 1308	1293	380 7126	431	859 867	86	2.062 129	6.475 63
46 0	395 0015	1293	380 6695	431	859 781	87	2.062 112	6.475 64
10	394 8722	1292	380 6264	431	859 694	86	2.062 095	6.475 65
20	394 7430	1293	380 5833	430	859 608	86	2.062 078	6.475 66
30	394 6137	1292	380 5403	431	859 522	86	2.062 060	6.475 67
40	394 4845	1291	380 4972	430	859 436	86	2.062 043	6.475 68
50	394 3554	1291	380 4542	431	859 350	86	2.062 026	6.475 68
47 0	394 2263	1291	380 4111	430	859 264	86	2.062 009	6.475 69
10	394 0972	1290	380 3681	430	859 178	86	2.061 991	6.475 70
20	393 9682	1289	380 3251	430	859 092	86	2.061 973	6.475 71
30	393 8393	1289	380 2821	429	859 006	86	2.061 957	6.475 72
40	393 7104	1288	380 2392	430	858 920	86	2.061 940	6.475 73
50	393 5816	1287	380 1962	429	858 834	86	2.061 923	6.475 74
48 0	393 4529	1287	380 1533	429	858 748	86	2.061 905	6.475 74
10	393 3242	1286	380 1104	428	858 662	85	2.061 888	6.475 75
20	393 1956	1285	380 0676	429	858 577	86	2.061 871	6.475 76
30	393 0671	1284	380 0247	428	858 491	86	2.061 854	6.475 77
40	392 9387	1283	379 9819	427	858 405	85	2.061 837	6.475 78
50	392 8104	1282	379 9392	428	858 320	86	2.061 820	6.475 79
49 0	392 6822	1281	379 8964	427	858 234	85	2.061 803	6.475 80
10	392 5541	1280	379 8537	426	858 149	85	2.061 786	6.475 80
20	392 4261	1279	379 8111	427	858 064	86	2.061 769	6.475 81
30	392 2982	1278	379 7684	426	857 978	85	2.061 752	6.475 82
40	392 1704	1277	379 7258	425	857 893	85	2.061 734	6.475 83
50	392 0427	1275	379 6833	425	857 808	85	2.061 717	6.475 84
50 0	391 9152		379 6408		857 723		2.061 700	6.475 85

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\, lg\, U$
2 336 275.72	8681.21	14.469	10.266	5′52″.028	9.580 5647
2 344 956.93	8681.47	14.469	10.236	5 52 .026	9.582 5941
2 353 638.40	8681.72	14.469	10.206	5 52 .011	9.584 6200
2 362 320.12	8681.98	14.470	10.176	5 51 .985	9.586 6427
2 371 002.10	8682.24	14.470	10.146	5 51 .947	9.588 6618
2 379 684.34	8682.50	14.471	10.116	5 51 .897	9.590 6777
2 388 366.84	8682.75	14.471	10.086	5 51 .835	9.592 6902
2 397 049.59	8683.01	14.472	10.055	5 51 .761	9.594 6996
2 405 732.60	8683.28	14.472	10.025	5 51 .675	9.596 7057
2 414 415.88	8683.53	14.472	9.994	5 51 .577	9.598 7088
2 423 099.41	8683.79	14.473	9.964	5 51 .467	9.600 7088
2 431 783.20	8684.05	14.473	9.933	5 51 .346	9.602 7058
2 440 467.25	8684.30	14.474	9.902	5 51 .212	9.604 6999
2 449 151.55	8684.56	14.474	9.872	5 51 .067	9.606 6911
2 457 836.11	8684.82	14.475	9.841	5 50 .910	9.608 6795
2 466 520.93	8685.08	14.475	9.810	5 50 .741	9.610 6652
2 475 206.01	8685.34	14.475	9.779	5 50 .560	9.612 6480
2 483 891.35	8685.59	14.476	9.747	5 50 .367	9.614 6282
2 492 576.94	8685.85	14.476	9.716	5 50 .162	9.616 6058
2 501 262.79	8686.11	14.477	9.685	5 49 .945	9.618 5808
2 509 948.90	8686.37	14.477	9.653	5 49 .717	9.620 5531
2 518 635.27	8686.62	14.477	9.622	5 49 .477	9.622 5232
2 527 321.89	8686.88	14.478	9.590	5 49 .225	9.624 4909
2 536 008.77	8687.14	14.478	9.559	5 48 .961	9.626 4561
2 544 695.91	8687.39	14.479	9.527	5 48 .685	9.628 4191
2 553 383.30	8687.65	14.479	9.495	5 48 .397	9.630 3798
2 562 070.95	8687.90	14.480	9.463	5 48 .098	9.632 3382
2 570 758.85	8688.16	14.480	9.431	5 47 .787	9.634 2946
2 579 447.01	8688.42	14.480	9.399	5 47 .464	9.636 2487
2 588 135.43	8688.67	14.481	9.367	5 47 .129	9.638 2009
2 596 824.10		14.481	9.335	5 46 .783	9.640 1510

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1] = lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2] = lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3] = lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4] = lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
50° 0′	391 9152	1274	379 6408	425	857 723	85	2.061 700	6.475 85
10	391 7878	1273	379 5983	424	857 638	85	2.061 683	6.475 86
20	391 6605	1271	379 5559	424	857 553	84	2.061 667	6.475 86
30	391 5334	1270	379 5135	423	857 469	85	2.061 650	6.475 87
40	391 4064	1269	379 4712	423	857 384	85	2.061 633	6.475 88
50	391 2795	1267	379 4289	423	857 299	84	2.061 616	6.475 89
51 0	391 1528	1265	379 3866	421	857 215	84	2.061 599	6.475 90
10	391 0263	1264	379 3445	422	857 131	85	2.061 582	6.475 91
20	390 8999	1263	379 3023	421	857 046	84	2.061 565	6.475 91
30	390 7736	1260	379 2602	420	856 962	84	2.061 548	6.475 92
40	390 6476	1259	379 2182	419	856 878	84	2.061 531	6.475 93
50	390 5217	1257	379 1763	419	856 794	84	2.061 515	6.475 94
52 0	390 3960	1256	379 1344	419	856 710	83	2.061 498	6.475 95
10	390 2704	1253	379 0925	418	856 627	84	2.061 481	6.475 96
20	390 1451	1252	379 0507	417	856 543	83	2.061 474	6.475 97
30	390 0199	1249	379 0090	417	856 460	84	2.061 448	6.475 97
40	389 8950	1248	378 9673	415	856 376	83	2.061 431	6.475 98
50	389 7702	1246	378 9258	416	856 293	83	2.061 414	6.475 99
53 0	389 6456	1244	378 8842	414	856 210	83	2.061 398	6.476 00
10	389 5212	1241	378 8428	414	856 127	83	2.061 381	6.476 01
20	389 3971	1239	378 8014	413	856 044	82	2.061 365	6.476 02
30	389 2732	1238	378 7601	413	855 962	83	2.061 348	6.476 02
40	389 1494	1235	378 7188	411	855 879	82	2.061 332	6.476 03
50	389 0259	1233	378 6777	411	855 797	82	2.061 315	6.476 04
54 0	388 9026	1230	378 6366	410	855 715	82	2.061 299	6.476 05
10	388 7796	1228	378 5956	410	855 633	82	2.061 282	6.476 06
20	388 6568	1226	378 5546	408	855 551	82	2.061 266	6.476 06
30	388 5342	1223	378 5138	408	855 469	81	2.061 250	6.476 07
40	388 4119	1221	378 4730	407	855 388	82	2.061 233	6.476 08
50	388 2898	1218	378 4323	406	855 306	81	2.061 217	6.476 09
55 0	388 1680		378 3917		855 225		2.061 201	6.476 10

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\,lg\,U$
2 596 824.10	8688.93	14.481	9.335	5′46″.783	9.640 1510
2 605 513.03	8689.18	14.482	9.303	5 46 .424	9.642 0992
2 614 202.21	8689.44	14.482	9.270	5 46 .054	9.644 0455
2 622 891.65	8689.69	14.483	9.238	5 45 .673	9.645 9900
2 631 581.34	8689.94	14.483	9.205	5 45 .279	9.647 9327
2 640 271.28	8690.19	14.483	9.172	5 44 .874	9.649 8735
2 648 961.47	8690.45	14.484	9.140	5 44 .458	9.651 8127
2 657 651.92	8690.71	14.484	9.107	5 44 .029	9.658 7502
2 666 342.63	8690.96	14.485	9.074	5 43 .589	9.655 6862
2 675 033.59	8691.20	14.485	9.041	5 43 .137	9.657 6206
2 683 724.79	8691.46	14.486	9.008	5 42 .674	9.659 5534
2 692 416.25	8691.72	14.486	8.975	5 42 .199	9.661 4849
2 701 107.97	8691.96	14.486	8.942	5 41 .712	9.663 4149
2 709 799.93	8692.21	14.487	8.909	5 41 .214	9.665 3436
2 718 492.14	8692.47	14.487	8.875	5 40 .705	9.667 2710
2 727 184.61	8692.72	14.488	8.842	5 40 .183	9.669 1971
2 735 877.33	8692.97	14.488	8.808	5 39 .650	9.671 1221
2 744 570.30	8693.22	14.489	8.775	5 39 .106	9.673 0459
2 753 263.52	8693.46	14.489	8.741	5 38 .550	9.674 9685
2 761 956.98	8693.71	14.489	8.708	5 37 .982	9.676 8902
2 770 650.69	8693.96	14.490	8.674	5 37 .404	9.678 8108
2 779 344.65	8694.21	14.490	8.640	5 36 .814	9.680 7305
2 788 038.86	8694.47	14.491	8.606	5 36 .213	9.682 6493
2 796 733.33	8594.70	14.491	8.572	5 35 .600	9.684 5672
2 805 428.03	8694.95	14.491	8.538	5 34 .975	9.686 4843
2 814 122.98	8695.20	14.492	8.504	5 34 .339	9.688 4007
2 822 818.18	8695.44	14.492	8.470	5 33 .692	9.690 3164
2 831 513.62	8695.69	14.493	8.435	5 33 .034	9.692 2314
2 840 209.31	8695.93	14.493	8.401	5 32 .364	9.694 1458
2 848 905.24	8696.18	14.493	8.367	5 31 .683	9.696 0598
2 857 601.42		14.494	8.332	5 30 .991	9.697 9732

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	[1] $= lg \frac{\varkappa}{\rho}$	Δ	[2] $= lg \frac{\varkappa}{p}$	Δ	[3] $= lg \frac{p}{2\rho\varkappa}$	Δ	[4] $= lg \frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg R$
	8.8		8.8		4.3			
55° 0′	388 1680	1216	378 3917	405	855 225	81	2.061 201	6.476 10
10	388 0464	1213	378 3512	405	855 144	81	2.061 185	6.476 11
20	387 9251	1211	378 3107	403	855 063	81	2.061 168	6.476 11
30	387 8040	1208	378 2704	403	854 982	80	2.061 152	6.476 12
40	387 6832	1205	378 2301	402	854 902	81	2.061 136	6.476 13
50	387 5627	1202	378 1899	400	854 821	80	2.061 120	6.476 14
56 0	387 4425	1200	378 1499	400	854 741	80	2.061 104	6.476 15
10	387 3225	1196	378 1099	399	854 661	79	2.061 088	6.476 15
20	387 2029	1194	378 0700	398	854 582	80	2.061 072	6.476 16
30	387 0835	1191	378 0302	397	854 502	79	2.061 056	6.476 17
40	386 9644	1188	377 9905	396	854 423	80	2.061 040	6.476 18
50	386 8456	1185	377 9509	395	854 343	79	2.061 025	6.476 19
57 0	386 7271	1182	377 9114	394	854 264	78	2.061 009	6.476 19
10	386 6089	1179	377 8720	393	854 186	79	2.060 993	6.476 20
20	386 4910	1175	377 8327	392	854 107	78	2.060 977	6.476 21
30	386 3735	1173	377 7935	391	854 029	79	2.060 962	6.476 22
40	386 2562	1169	377 7544	389	853 950	77	2.060 946	6.476 22
50	386 1393	1166	377 7155	389	853 873	78	2.060 930	6.476 23
58 0	386 0227	1163	377 6766	388	853 795	78	2.060 915	6.476 24
10	385 9064	1160	377 6378	386	853 717	77	2.060 899	6.476 25
20	385 7904	1156	377 5992	386	853 640	77	2.060 884	6.476 26
30	385 6748	1153	377 5606	384	853 563	77	2.060 868	6.476 26
40	385 5595	1149	377 5222	383	853 486	77	2.060 853	6.476 27
50	385 4446	1146	377 4839	382	853 409	76	2.060 838	6.476 28
59 0	385 3300	1142	377 4457	381	853 333	76	2.060 822	6.476 29
10	385 2158	1139	377 4076	379	853 257	76	2.060 807	6.476 29
20	385 1019	1135	377 3697	379	853 181	76	2.060 792	6.476 30
30	384 9884	1131	377 3318	377	853 105	75	2.060 777	6.476 31
40	384 8753	1128	377 2941	376	853 030	75	2.060 762	6.476 32
50	384 7625	1124	377 2565	374	852 955	75	2.060 747	6.476 32
60 0	384 6501		377 2191		852 880		2.060 732	6.476 33

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\,lg\,U$
2 857 601.42	8696.42	14.494	8.332	5′30″.991	9.697 9732
2 866 297.84	8696.66	14.494	8.298	5 30 .287	9.699 8861
2 874 994.50	8696.91	14.495	8.263	5 29 .573	9.701 7987
2 883 691.41	8697.15	14.495	8.228	5 28 .848	9.703 7109
2 892 388.56	8697.39	14.495	8.193	5 28 .111	9.705 6229
2 901 085.95	8697.63	14.496	8.159	5 27 .363	9.707 5345
2 909 783.58	8697.87	14.496	8.124	5 26 .604	9.709 4460
2 918 481.45	8698.11	14.497	8.089	5 25 .833	9.711 3574
2 927 179.56	8698.35	14.497	8.054	5 25 .052	9.713 2687
2 935 877.91	8698.59	14.498	8.018	5 24 .260	9.715 1799
2 944 576.50	8698.83	14.498	7.983	5 23 .456	9.717 0912
2 953 275.33	8699.07	14.498	7.948	5 22 .642	9.719 0025
2 961 974.40	8699.30	14.499	7.913	5 21 .817	9.720 9140
2 970 673.70	8699.54	14.499	7.877	5 20 .981	9.722 8258
2 979 373.24	8699.78	14.499	7.842	5 20 .134	9.724 7376
2 988 073.02	8700.01	14.500	7.806	5 19 .276	9.726 6498
2 996 773.03	8700.24	14.500	7.771	5 18 .407	9.728 5624
3 005 473.27	8700.48	14.501	7.735	5 17 .528	9.730 4753
3 014 173.75	8700.71	14.501	7.699	5 16 .638	9.732 3887
3 022 874.46	8700.95	14.501	7.663	5 15 .737	9.734 3027
3 031 575.41	8701.18	14.502	7.628	5 14 .825	9.736 2171
3 040 276.59	8701.41	14.502	7.592	5 13 .902	9.738 1322
3 048 978.00	8701.64	14.503	7.556	5 12 .969	9.740 0480
3 057 679.64	8701.86	14.503	7.520	5 12 .026	9.741 9645
3 066 381.50	8702.10	14.503	7.483	5 11 .071	9.743 8818
3 075 083.60	8702.33	14.504	7.447	5 10 .107	9.745 7999
3 083 785.93	8702.55	14.504	7.411	5 9 .131	9.747 7190
3 092 488.48	8702.78	14.504	7.375	5 8 .146	9.749 6390
3 101 191.26	8703.01	14.505	7.338	5 7 .149	9.751 5601
3 109 894.27	8703.23	14.505	7.302	5 6 .143	9.753 4823
3 118 597.50		14.506	7.265	5 5 .126	9.755 4055

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1] = lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2] = lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3] = lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4] = lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
60° 0′	384 6501	1121	377 2191	374	852 880	75	2.060 732	6.476 33
10	384 5380	1116	377 1817	372	852 805	74	2.060 717	6.476 34
20	384 4264	1113	377 1445	371	852 731	75	2.060 702	6.476 35
30	384 3151	1109	377 1074	370	852 656	74	2.060 687	6.476 35
40	384 2042	1105	377 0704	368	852 582	73	2.060 672	6.476 36
50	384 0937	1101	377 0336	367	852 509	74	2.060 658	6.476 37
61 0	383 9836	1097	376 9969	366	852 435	73	2.060 643	6.476 38
10	383 8739	1093	376 9603	364	852 362	73	2.060 628	6.476 38
20	383 7646	1089	376 9239	363	852 289	72	2.060 614	6.476 39
30	383 6557	1085	376 8876	362	852 217	73	2.060 599	6.476 40
40	383 5472	1081	376 8514	360	852 144	72	2.060 585	6.476 41
50	383 4391	1076	376 8154	359	852 072	71	2.060 570	6.476 41
62 0	383 3315	1073	376 7795	357	852 001	72	2.060 556	6.476 42
10	383 2242	1068	376 7438	356	851 929	71	2.060 542	6.476 43
20	383 1174	1064	376 7082	355	851 858	71	2.060 527	6.476 43
30	383 0110	1059	376 6727	353	851 787	71	2.060 513	6.476 44
40	382 9051	1056	376 6374	352	851 716	70	2.060 499	6.476 45
50	382 7995	1050	376 6022	350	851 646	70	2.060 485	6.476 46
63 0	382 6945	1047	376 5672	349	851 576	70	2.060 471	6.476 46
10	382 5898	1042	376 5323	347	851 506	69	2.060 457	6.476 47
20	382 4856	1037	376 4976	346	851 437	69	2.060 443	6.476 48
30	382 3819	1033	376 4630	345	851 368	69	2.060 429	6.476 48
40	382 2786	1029	376 4285	342	851 299	69	2.060 416	6.476 49
50	382 1757	1024	376 3943	342	851 230	68	2.060 402	6.476 50
64 0	382 0733	1019	376 3601	339	851 162	68	2.060 388	6.476 50
10	381 9714	1015	376 3262	339	851 094	68	2.060 375	6.476 51
20	381 8699	1009	376 2923	336	851 026	67	2.060 361	6.476 52
30	381 7690	1006	376 2587	335	850 959	67	2.060 348	6.476 52
40	381 6684	1000	376 2252	334	850 892	67	2.060 334	6.476 53
50	381 5684	996	376 1918	332	850 825	66	2.060 321	6.476 54
65 0	381 4688		376 1586		850 759		2.060 308	6.476 54

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\,lg\,U$
3 118 597.50	8703.46	14.506	7.265	5′ 5″.126	9.755 4055
3 127 300.96	8703.69	14.506	7.229	5 4.098	9.757 3300
3 136 004.65	8703.91	14.506	7.192	5 3.060	9.759 2557
3 144 708.56	8704.12	14.507	7.155	5 2.012	9.761 1828
3 153 412.68	8704.35	14.507	7.119	5 0.954	9.763 1113
3 162 117.03	8704.57	14.507	7.082	4 59.886	9.765 0412
3 170 821.60	8704.79	14.508	7.045	4 58.807	9.766 9726
3 179 526.39	8705.01	14.508	7.008	4 57.718	9.768 9057
3 188 231.40	8705.23	14.508	6.971	4 56.619	9.770 8403
3 196 936.63	8705.45	14.509	6.934	4 55.510	9.772 7766
3 205 642.08	8705.66	14.509	6.897	4 54.391	9.774 7147
3 214 347.74	8705.88	14.510	6.860	4 53.262	9.776 6546
3 223 053.62	8706.10	14.510	6.822	4 52.123	9.778 5965
3 231 759.72	8706.31	14.510	6.785	4 50.974	9.780 5405
3 240 466.03	8706.53	14.511	6.748	4 49.816	9.782 4862
3 249 172.56	8706.74	14.511	6.710	4 48.647	9.784 4341
3 257 879.30	8706.95	14.511	6.673	4 47.469	9.786 3843
3 266 586.25	8707.16	14.512	6.635	4 46.281	9.788 3367
3 275 293.41	8707.37	14.512	6.598	4 45.083	9.790 2914
3 284 000.78	8707.58	14.513	6.560	4 43.875	9.792 2485
3 292 708.36	8707.79	14.513	6.522	4 42.658	9.794 2080
3 301 416.15	8707.99	14.513	6.485	4 41.431	9.796 1701
3 310 124.14	8708.20	14.514	6.447	4 40.195	9.798 1348
3 318 832.34	8708.41	14.514	6.409	4 38.949	9.800 1023
3 327 540.75	8708.62	14.514	6.371	4 37.694	9.802 0724
3 336 249.37	8708.82	14.515	6.333	4 36.429	9.804 0454
3 344 958.19	8709.02	14.515	6.295	4 35.155	9.806 0213
3 353 667.21	8709.22	14.515	6.257	4 33.871	9.808 0001
3 362 376.43	8709.43	14.516	6.219	4 32.579	9.809 9822
3 371 085.86	8709.62	14.516	6.181	4 31.277	9.811 9673
3 379 795.48		14.516	6.142	4 29.965	9.813 9557

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1] = lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2] = lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3] = lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4] = lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
65° 0′	381 4688	990	376 1586	330	850 759	66	2.060 308	6.476 54
10	381 3698	986	376 1256	328	850 693	66	2.060 294	6.476 55
20	381 2712	981	376 0928	327	850 627	65	2.060 281	6.476 56
30	381 1731	976	376 0601	326	850 562	65	2.060 268	6.476 56
40	381 0755	971	376 0275	323	850 497	65	2.060 255	6.476 57
50	380 9784	966	375 9952	322	850 432	64	2.060 242	6.476 58
66 0	380 8818	961	375 9630	321	850 368	65	2.060 229	6.476 58
10	380 7857	956	375 9309	318	850 303	63	2.060 217	6.476 59
20	380 6901	951	375 8991	317	850 240	64	2.060 204	6.476 60
30	380 5950	946	375 8674	316	850 176	63	2.060 191	6.476 60
40	380 5004	941	375 8358	313	850 113	62	2.060 178	6.476 61
50	380 4063	935	375 8045	312	850 051	63	2.060 166	6.476 61
67 0	380 3128	930	375 7733	310	849 988	62	2.060 153	6.476 62
10	380 2198	925	375 7423	308	849 926	61	2.060 141	6.476 63
20	380 1273	920	375 7115	307	849 865	62	2.060 129	6.476 63
30	380 0353	914	375 6808	305	849 803	61	2.060 116	6.476 64
40	379 9439	909	375 6503	303	849 742	60	2.060 104	6.476 65
50	379 8530	903	375 6200	301	849 682	61	2.060 092	6.476 65
68 0	379 7627	898	375 5899	299	849 621	59	2.060 080	6.476 66
10	379 6729	893	375 5600	298	849 562	60	2.060 068	6.476 66
20	379 5836	887	375 5302	296	849 502	59	2.060 056	6.476 67
30	379 4949	882	375 5006	293	849 443	59	2.060 044	6.476 68
40	379 4067	876	375 4713	292	849 384	58	2.060 033	6.476 68
50	379 3191	871	375 4421	291	849 326	58	2.060 021	6.476 69
69 0	379 2320	865	375 4130	288	849 268	58	2.060 009	6.476 69
10	379 1455	859	375 3842	286	849 210	57	2.059 998	6.476 70
20	379 0596	854	375 3556	285	849 153	57	2.059 986	6.476 70
30	378 9742	848	375 3271	283	849 096	57	2.059 975	6.476 71
40	378 8894	842	375 2988	280	849 039	56	2.059 964	6.476 72
50	378 8052	837	375 2708	279	848 983	56	2.059 952	6.476 72
70 0	378 7215		375 2429		848 927		2.059 941	6.476 73

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\,lg\,U$
3 379 795.48	8709.82	14.516	6.142	4′29″.965	9.8139557
3 388 505.30	8710.02	14.517	6.104	4 28 .645	9.8159474
3 397 215.32	8710.22	14.517	6.066	4 27 .315	9.8179425
3 405 925.54	8710.41	14.517	6.027	4 25 .977	9.8199411
3 414 635.95	8710.61	14.518	5.989	4 24 .629	9.8219433
3 423 346.56	8710.80	14.518	5.950	4 23 .272	9.8239492
3 432 057.36	8711.00	14.518	5.912	4 21 .907	9.8259588
3 440 768.36	8711.19	14.519	5.873	4 20 .532	9.8279723
3 449 479.55	8711.39	14.519	5.835	4 19 .149	9.8299898
3 458 190.94	8711.57	14.519	5.796	4 17 .757	9.8320113
3 466 902.51	8711.76	14.519	5.757	4 16 .356	9.8340369
3 475 614.27	8711.95	14.520	5.718	4 14 .947	9.8360667
3 484 326.22	8712.13	14.520	5.679	4 13 .528	9.8381009
3 493 038.35	8712.32	14.520	5.641	4 12 .102	9.8401395
3 501 750.67	8712.51	14.521	5.602	4 10 .666	9.8421827
3 510 463.18	8712.69	14.521	5.563	4 9 .222	9.8442305
3 519 175.87	8712.87	14.521	5.524	4 7 .770	9.8462831
3 527 888.74	8713.06	14.522	5.484	4 6 .309	9.8483405
3 536 601.80	8713.24	14.522	5.445	4 4 .840	9.8504028
3 545 315.04	8713.41	14.522	5.406	4 3 .362	9.8524703
3 554 028.45	8713.59	14.523	5.367	4 1 .877	9.8545430
3 562 742.04	8713.77	14.523	5.328	4 0 .383	9.8566210
3 571 455.81	8713.95	14.523	5.288	3 58 .881	9.8587043
3 580 169.76	8714.13	14.523	5.249	3 57 .370	9.8607932
3 588 883.89	8714.30	14.524	5.209	3 55 .852	9.8628878
3 597 598.19	8714.47	14.524	5.170	3 54 .326	9.8649882
3 606 312.66	8714.64	14.524	5.130	3 52 .791	9.8670945
3 615 027.30	8714.81	13.525	5.091	3 51 .249	9.8692069
3 623 742.11	8714.98	14.525	5.051	3 49 .699	9.8713254
3 632 457.09	8715.15	14.525	5.012	3 48 .141	9.8734503
3 641 172.24		14.526	4.972	3 46 .576	9.8755816

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1] = lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2] = lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3] = lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4] = lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
70° 0′	378 7215	831	375 2429	277	848 927	55	2.059 941	6.476 73
10	378 6384	825	375 2152	275	848 872	55	2.059 930	6.476 73
20	378 5559	819	375 1877	273	848 817	55	2.059 919	6.476 74
30	378 4740	813	375 1604	271	848 762	54	2·059 908	6.476 74
40	378 3927	808	375 1333	270	848 708	54	2.059 897	6.476 75
50	378 3119	801	375 1063	267	848 654	53	2.059 887	6.476 75
71 0	378 2318	796	375 0796	265	848 601	53	2.059 876	6.476 76
10	378 1522	790	375 0531	263	848 548	53	2.059 865	6.476 76
20	378 0732	783	375 0268	261	848 495	52	2.059 855	6.476 77
30	377 9949	778	375 0007	260	848 443	52	2.059 844	6.476 78
40	377 9171	772	374 9747	257	848 391	51	2.059 834	6.476 78
50	377 8399	765	374 9490	255	848 340	51	2.059 824	6.476 79
72 0	377 7634	760	374 9235	253	848 289	51	2.059 814	6.476 79
10	377 6874	753	374 8982	251	848 238	50	2.059 803	6.476 80
20	377 6121	747	474 8731	249	848 188	50	2.059 793	6.476 80
30	377 5374	741	374 8482	247	848 138	49	2.059 783	6.476 81
40	377 4633	735	374 8235	245	848 089	49	2.059 774	6.476 81
50	377 3898	728	374 7990	243	848 040	49	2.059 764	6.476 82
73 0	377 3170	723	374 7747	241	847 991	48	2.059 754	6.476 82
10	377 2447	716	374 7506	239	847 943	48	2.059 744	6.476 83
20	377 1731	709	374 7267	236	847 895	47	2.059 735	6.476 83
30	377 1022	704	374 7031	235	847 848	47	2.059 725	6.476 83
40	377 0318	697	374 6796	232	847 801	47	2.059 716	6.476 84
50	376 9621	691	374 6564	230	847 754	46	2.059 707	6.476 84
74 0	376 8930	684	374 6334	228	847 708	45	2.059 698	6.476 85
10	376 8246	678	374 6106	226	847 663	45	2.059 688	6.476 85
20	376 7568	671	374 5880	224	847 618	45	2.059 679	6.476 86
30	376 6897	665	374 5656	222	847 573	45	3.059 670	6.476 86
40	376 6232	659	374 5434	219	847 528	43	2.059 662	6.476 87
50	376 5573	652	374 5215	218	847 485	44	2.059 653	6.476 87
75 0	376 4921		374 4997		847 441		2.059 644	6.476 88

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\,lg\,U$
3 641 172.24	8715.32	14.526	4.972	3′46″.576	9.875 5816
3 649 887.56	8715.49	14.526	4.932	3 45 .002	9.877 7195
3 658 603.05	8715.66	14.526	4.893	3 43 .421	9.879 8642
3 667 318.71	8715.81	14.526	4.853	3 41 .833	9.882 0157
3 676 034.52	8715.97	14.527	4.813	3 40 .237	9.884 1743
3 684 750.49	8716.14	14.527	4.773	3 38 .633	9.886 3400
3 693 466.63	8716.30	14.527	4.733	3 37 .022	9.888 5131
3 702 182.93	8716.45	14.527	4.693	3 35 .404	9.890 6937
3 710 899.38	8716.62	14.528	4.653	3 33 .778	9.892 8820
3 719 616.00	8716.77	14.528	4.613	3 32 .144	9.895 0781
3 728 332.77	8716.93	14.528	4.573	3 30 .505	9.897 2822
3 737 049.70	8717.08	14.528	4.533	3 28 .857	9.899 4946
3 745 766.78	8717.23	14.529	4.493	3 27 .203	9.901 7153
3 754 484.01	8717.38	14.529	4.452	3 25 .542	9.903 9445
3 763 201.39	8717.54	14.529	4.412	3 23 .873	9.906 1824
3 771 918.93	8717,69	14.529	4.372	3 22 .198	9.908 4293
3 780 636.62	8717.84	14.530	4.331	3 20 .516	9.910 6853
3 789 354.46	8717.97	14.530	4.291	3 18 .826	9.912 9506
3 798 072.43	8718.13	14.530	4.251	3 17 .131	9.915 2255
3 806 790.56	8718.27	14.530	4.210	3 15 .428	9.917 5101
3 815 508.83	8718.42	14.531	4.170	3 13 .719	9.919 8047
3 824 227.25	8718.55	14.531	4.129	3 12 .006	9.922 1095
3 832 945.80	8718.70	14.531	4.089	3 10 .281	9.924 4247
3 841 664.50	8718.84	14.531	4.048	3 8 .552	9.926 7506
3 850 383.34	8718.97	14.532	4.008	3 6 .816	9.929 0873
3 859 102.31	8719.11	14.532	3.967	3 5 .075	9.931 4352
3 867 821.42	8719.25	14.532	3.926	3 3 .328	9.933 7946
3 876 540.67	8719.38	14.532	3.886	3 1 .573	9.936 1656
3 885 260.05	8719.51	14.532	3.845	2 59 .813	9.938 5485
3 893 979.56	8719.64	14.533	3.804	2 58 .047	9.940 9437
3 902 699.20		14.533	3.763	2 56 .275	9.943 3514

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1]=lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2]=lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3]=lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4]=lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
75° 0′	376 4921	645	374 4997	215	847 441	43	2.059 644	6.476 88
10	376 4276	639	374 4782	213	847 398	43	2.059 635	6.476 88
20	376 3637	633	374 4569	211	847 355	42	2.059 627	6.476 88
30	376 3004	625	374 4358	208	847 313	41	2.059 618	6.476 89
40	376 2379	619	374 4150	207	847 272	42	2.059 610	6.476 89
50	376 1760	613	374 3943	204	847 230	41	2.059 602	6.476 90
76 0	376 1147	606	374 3739	202	847 189	40	2.059 594	6.476 90
10	376 0541	599	374 3537	199	847 149	40	2.059 586	6.476 90
20	375 9942	592	374 3338	198	847 109	39	2.059 578	6.476 91
30	375 9350	586	374 3140	195	847 070	39	2.059 570	6.476 91
40	375 8764	579	374 2945	193	847 031	39	2.059 562	6.476 92
50	375 8185	572	374 2752	191	846 992	38	2.059 554	6.476 92
77 0	375 7613	566	374 2561	188	846 954	38	2.059 546	6.476 92
10	375 7047	558	374 2373	186	846 916	37	2.059 539	6.476 93
20	375 6489	552	374 2187	184	846 879	37	2.059 532	6.476 93
30	375 5937	545	374 2003	182	846 842	36	2.059 524	6.476 94
40	375 5392	538	374 1821	179	846 806	36	2.059 517	6.476 94
50	375 4854	532	374 1642	178	846 770	35	2.059 510	6.476 94
78 0	375 4322	524	374 1464	174	846 735	35	2.059 503	6.476 95
10	375 3798	517	374 1290	173	846 700	35	2.059 496	6.476 95
20	375 3281	511	374 1117	170	846 665	34	2.059 489	6.476 95
30	375 2770	504	374 0947	168	846 631	34	2.059 482	6.476 96
40	375 2266	496	374 0779	165	846 597	33	2.059 475	6.476 96
50	375 1770	490	374 0614	164	846 564	32	2.059 469	6.476 96
79 0	375 1280	485	374 0450	161	846 532	32	2.059 462	6.476 97
10	375 0798	476	374 0289	158	846 500	32	2.059 456	6.476 97
20	375 0322	469	374 0131	156	846 468	31	2.059 449	6.476 97
30	374 9853	461	373 9975	154	846 437	31	2.059 443	6.476 98
40	374 9392	455	373 9821	152	846 406	31	2.059 437	6.476 98
50	374 8937	447	373 9669	149	846 375	29	2.059 431	6.476 98
80 0	374 8490		373 9520		846 346		2.059 425	6.476 99

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	φ — u.	lg lg U
3 902 699.20	8719.78	14.533	3.763	2′56″.275	9.943 3514
3 911 418.98	8719.91	14.533	3.722	2 54.496	9.945 7720
3 920 138.89	8720.03	14.533	3.681	2 52.712	9.948 2056
3 928 858.92	8720.15	14.534	3.641	2 50.922	9.950 6527
3 937 579.07	8720.28	14.534	3.600	2 49.126	9.953 1135
3 946 299.35	8720.41	14.534	3.559	2 47.324	9.955 5884
3 955 019.76	8720.53	14.534	3.518	2 45.517	9.958 0778
3 963 740.29	8720.65	14.534	3.477	2 43.704	9.960 5820
3 972 460.94	8720.77	14.535	3.435	2 41.885	9.963 1013
3 981 181.71	8720.89	14.535	3.394	2 40.061	9.965 6362
3 989 902.60	8721.00	14.535	3.353	2 38.231	9.968 1870
3 998 623.60	8721.12	14.535	3.312	2 36.396	9.970 7542
4 007 344.72	8721.24	14.535	3.271	2 34.556	9.973 3381
4 016 065.96	8721.35	14.536	3.230	2 32.711	9.975 9393
4 024 787.31	8721.45	14.536	3.188	2 30.860	9.978 5582
4 033 508.76	8721.57	14.536	3.147	2 29.004	9.981 1951
4 042 230.33	8721.68	14.536	3.106	2 27.143	9.983 8507
4 050 592.01	8721.78	14.536	3.065	2 25.277	9.986 5255
4 059 673.79	8721.89	14.536	3.023	2 23.406	9.989 2199
4 068 395.68	8722.00	14.537	2.982	2 21.531	9.991 9344
4 077 117.68	8722.10	14.537	2.940	2 19.650	9.994 6697
4 085 839.78	8722.20	14.537	2.899	2 17.765	9.997 4264
4 094 561.98	8722.30	14.537	2.858	2 15.875	0.000 2050
4 103 284.28	8722.40	14.537	2.816	2 13.980	0.003 0063
4 112 006.68	8722.50	14.537	2.775	2 12.081	0.005 8307
4 120 729.18	8722.59	14.537	2.733	2 10.177	0.008 6792
4 129 451.77	8722.69	14.538	2.692	2 8.269	0.011 5523
4 138 174.46	8722.78	14.538	2.650	2 6.357	0.014 4508
4 146 897.24	8722.87	14.538	2.608	2 4.440	0.017 3755
4 155 620.11	8722.96	14.538	2.567	2 2.519	0.020 3272
4 164 343.07		14.538	2.525	2 0.594	0.023 3068

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1]=lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2]=lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3]=lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4]=lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
80° 0′	374 8490	440	373 9520	147	846 346	30	2.059 425	6.476 99
10	374 8050	434	373 9373	144	846 316	29	2.059 419	6.476 99
20	374 7616	426	373 9229	142	846 287	28	2.059 413	6.476 99
30	374 7190	419	373 9087	140	846 259	28	2.059 408	6.476 99
40	374 6771	411	373 8947	137	846 231	27	2.059 402	6.477 00
50	374 6360	405	373 8810	135	846 204	27	2.059 397	6.477 00
81 0	374 5955	398	373 8675	132	846 177	27	2.059 391	6.477 00
10	374 5557	390	373 8543	130	846 150	26	2.059 386	6.477 00
20	374 5167	383	373 8413	128	846 124	25	2.059 381	6.477 01
30	374 4784	376	373 8285	125	846 099	25	2.059 376	6.477 01
40	374 4408	368	373 8160	123	846 074	25	2.059 372	6.477 01
50	374 4040	362	373 8037	121	846 049	24	2.059 366	6.477 01
82 0	374 3678	354	373 7916	118	846 025	24	2.059 361	6.477 02
10	374 3324	347	373 7798	115	846 001	23	2.059 356	6.477 02
20	374 2977	339	373 7683	113	845 978	22	2.059 351	6.477 02
30	374 2638	333	373 7570	111	845 956	23	2.059 347	6.477 02
40	374 2305	325	373 7459	109	845 933	21	2.059 343	6.477 03
50	374 1980	317	373 7350	105	845 912	21	2.059 338	6.477 03
83 0	374 1663	311	373 7245	104	845 891	21	2.059 334	6.477 03
10	374 1352	303	373 7141	101	845 870	20	2.059 330	6.477 03
20	374 1049	295	373 7040	98	845 850	20	2.059 326	6.477 03
30	374 0754	289	373 6942	97	845 830	19	2.059 322	6.477 04
40	374 0465	280	373 6845	93	845 811	19	2.059 318	6.477 04
50	374 0185	274	373 6752	91	845 792	18	2.059 314	6.477 04
84 0	373 9911	266	373 6661	89	845 774	18	2.059 311	6.477 04
10	373 9645	259	373 6572	86	845 756	17	2.059 307	6.477 04
20	373 9386	251	373 6486	84	845 739	17	2.059 304	6.477 05
30	373 9135	244	373 6402	81	845 722	16	2.059 300	6.477 05
40	373 8891	237	373 6321	79	845 706	16	2.059 297	6.477 05
50	373 8654	229	373 6242	77	845 690	15	2.059 294	6.477 05
85 0	373 8425		373 6165		845 675		2.059 291	6.477 05

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg\,lg\,U$
4 164 343.07	8723.06	14.538	2.525	2′ 0″.594	0.023 3068
4 173 066.13	8723.14	14.539	2.483	1 58.665	0.026 3152
4 181 789.27	8723.23	14.539	2.442	1 56.732	0.029 3533
4 190 512.50	8723.31	14.539	2.400	1 54.794	0.032 4221
4 199 235.81	8723.40	14.539	2.358	1 52.853	0.035 5226
4 207 959.21	8723.48	14.539	2.317	1 50.908	0.038 6559
4 216 682.69	8723.56	14.539	2.275	1 48.960	0.041 8232
4 225 406.25	8723.64	14.539	2.233	1 47.007	0.045 0257
4 234 129.89	8723.71	14.540	2.191	1 45.051	0.048 2646
4 242 853.60	8723.79	14.540	2.149	1 43.091	0.051 5413
4 251 577.39	8723.87	14.540	2.108	1 41.128	0.054 8571
4 260 301.26	8723.94	14.540	2.066	1 39.162	0.058 2136
4 269 025.20	8724.01	14.540	2.024	1 37.192	0.061 6122
4 277 749.21	8724.08	14.540	1.982	1 35.218	0.065 0548
4 286 473.29	8724.16	14.540	1.940	1 33.242	0.068 5430
4 295 197.45	8724.22	14.540	1.898	1 31.262	0.072 0787
4 303 921.67	8724.28	14.540	1.856	1 29.279	0.075 6640
4 312 645.95	8724.34	14.541	1.814	1 27.293	0.079 3008
4 321 370.29	8724.42	14.541	1.772	1 25.305	0.082 9916
4 330 094.71	8724.48	14.541	1.730	1 23.313	0.086 7386
4 338 819.19	8724.53	14.541	1.688	1 21.318	0.090 5445
4 347 543.72	8724.59	14.541	1.646	1 19.321	0.094 4120
4 356 268.31	8724.65	14.541	1.604	1 17.321	0.098 3441
4 364 992.96	8724.71	14.541	1.562	1 15.318	0.102 3440
4 373 717.67	8724.76	14.541	1.520	1 13.313	0.106 4150
4 382 442.43	8724.81	14.541	1.478	1 11.306	0.110 5608
4 391 167.24	8724.86	14.541	1.436	1 9.295	0.114 7857
4 399 892.10	8724.91	14.542	1.394	1 7.283	0.119 0937
4 408 617.01	8724.96	14.542	1.352	1 5.268	0.123 4896
4 417 341.97	8725.01	14.542	1.310	1 3.251	0.127 9785
4 426 066.98		14.542	1.267	1 1.232	0.132 5660

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

φ	$[1]=lg\,\frac{\varkappa}{\rho}$		$[2]=lg\,\frac{\varkappa}{p}$		$[3]=lg\,\frac{p}{2\rho\varkappa}$		$[4]=lg\,\frac{\varkappa}{2\rho p}$	$lg\,R$
	8.8		8.8		4.3			
85° 0′	373 8425	222	373 6165	74	845 675	15	2.059 291	6.477 05
10	373 8203	214	373 6091	71	845 660	14	2.059 288	6.477 05
20	373 7989	207	373 6020	69	845 646	14	2.059 285	6.477 06
30	373 7782	199	373 5951	66	845 632	13	2.059 282	6.477 06
40	373 7583	192	373 5885	64	845 619	13	2.059 280	6.477 06
50	373 7391	184	373 5821	62	845 606	13	2.059 277	6.477 06
86 0	373 7207	177	373 5759	59	845 593	11	2.059 275	6.477 06
10	373 7030	170	373 5700	56	845 582	12	2.059 272	6.477 06
20	373 6860	161	373 5644	54	845 570	10	2.059 270	6.477 06
30	373 6699	155	373 5590	52	845 560	11	2.059 268	6.477 06
40	373 6544	147	373 5538	49	845 549	10	2.059 266	6.477 06
50	373 6397	139	373 5489	46	845 539	9	2.059 264	6.477 07
87 0	373 6258	132	373 5443	44	845 530	9	2.059 262	6.477 07
10	373 6126	125	373 5399	42	845 521	8	2.059 260	6.477 07
20	373 6001	117	373 5357	39	845 513	8	2.059 258	6.477 07
30	373 5884	109	373 5318	36	845 505	7	2.059 257	6.477 07
40	373 5775	102	373 5282	34	845 498	7	2.059 255	6.477 07
50	373 5673	94	373 5248	31	845 491	6	2.059 254	6.477 07
88 0	373 5579	87	373 5217	29	845 485	6	2.059 253	6.477 07
10	373 5492	79	373 5188	27	845 479	5	2.059 252	6.477 07
20	373 5413	72	373 5161	24	845 474	5	2.059 251	6.477 07
30	373 5341	64	373 5137	21	845 469	4	2.059 250	6.477 07
40	373 5277	57	373 5116	19	845 465	4	2.059 249	6.477 07
50	373 5220	49	373 5097	16	845 461	3	2.059 248	6.477 07
89 0	373 5171	41	373 5081	14	845 458	3	2.059 247	6.477 07
10	373 5130	34	373 5067	11	845 455	2	2.059 247	6.477 07
20	373 5096	27	373 5056	9	845 453	2	2.059 246	6.477 07
30	373 5069	18	373 5047	7	845 451	1	2.059 246	6.477 07
40	373 5051	12	373 5040	3	845 450	1	2.059 246	6.477 07
50	373 5039	4	373 5037	2	845 449	0	2.059 246	6.477 07
90 0	373 5035		373 5035		845 449		2.059 246	6.477 07

Геодезическія таблицы

по элементамъ земного сфероида Кларка (1880 г.)

(въ саженяхъ).

Длина дуги меридіана.		Дуга меридіана въ 1″.	Дуга параллели въ 1″.	$\varphi - u$	$lg lg\, U$
4 426 066.98	8725.06	14.542	1.267	1′ 1″.232	0.132 5660
4 434 792.04	8725.10	14.542	1.225	0 59.211	0.137 2582
4 443 517.14	8725.13	14.542	1.183	0 57.188	0.142 0621
4 452 242.27	8725.18	14.542	1.141	0 55.162	0.146 9848
4 460 967.45	8725.22	14.542	1.099	0 53.132	0.152 0346
4 469 692.67	8725.26	14.542	1.057	0 51.106	0.157 2206
4 478 417.93	8725.30	14.542	1.015	0 49.076	0.162 5530
4 487 143.23	8725.33	14.542	0.972	0 47.044	0.168 0433
4 495 868.56	8725.36	14.542	0.930	0 45.010	0.173 7041
4 504 593.92	8725.39	14.542	0.888	0 42.974	0.179 5500
4 513 319.31	8725.42	14.542	0.846	0 40.937	0.185 5974
4 522 044.73	8725.46	14.542	0.803	0 38.899	0.191 8652
4 530 770.19	8725.48	14.543	0.761	0 36.860	0.198 3751
4 539 495.67	8725.50	14.543	0.719	0 34.819	0.205 1525
4 548 221.17	8725.53	14.543	0.677	0 32.777	0.212 2268
4 556 946.70	8725.56	14.543	0.634	0 30.734	0.219 6330
4 565 672.26	8725.58	14.543	0.592	0 28.689	0.227 4128
4 574 397.84	8725.59	14.543	0.550	0 26.644	0.235 6167
4 583 123.43	8725.61	14.543	0.508	0 24.598	0.244 3066
4 591 849.04	8725.63	14.543	0.465	0 22.551	0.253 5595
4 600 574.67	8725.64	14.543	0.423	0 20.504	0.263 4735
4 609 300.31	8725.66	14.543	0.381	0 18.455	0.274 1754
4 618 025.97	8725.67	14.543	0.338	0 16.406	0.285 8348
4 626 751.64	8725.68	14.543	0.296	0 14.357	0.298 6850
4 635 477.32	8725.69	14.543	0.254	0 12.307	0.313 0613
4 644 203.01	8725.70	14.543	0.212	0 10.256	0.329 4721
4 652 928.71	8725.70	14.543	0.169	0 8.205	0.348 7483
4 661 654.41	8725.71	14.543	0.127	0 6.151	0.372 3998
4 670 380.12	8725.71	14.543	0.085	0 4.103	0.403 6885
4 679 105.83	8725.71	14.543	0.042	0 2.052	0.452 4523
4 687 831.54		14.543	0.000	0 0.000	∞

Таблица трехзначныхъ логариѳмовъ.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	000	041	079	114	146	176	204	230	255	279
2	301	322	342	362	380	398	415	431	447	462
3	477	491	505	519	531	544	556	568	580	591
4	602	613	623	633	643	653	663	672	681	690
5	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771
6	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839
7	845	851	857	863	869	875	881	886	892	898
8	903	908	914	919	924	929	934	940	944	949
9	954	959	964	968	973	978	982	987	991	996

Таблица трехзначныхъ антилогариѳмовъ.

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	100	102	105	107	110	112	115	117	120	123
.1	126	129	132	135	138	141	145	148	151	155
.2	158	162	166	170	174	178	182	186	191	195
.3	200	204	209	214	219	224	229	234	240	245
.4	251	257	263	269	275	282	288	295	302	309
.5	316	324	331	339	347	355	363	372	380	389
.6	398	407	417	427	437	447	457	468	479	490
.7	501	513	525	537	550	562	575	589	603	617
.8	631	646	661	676	692	708	724	741	759	776
.9	794	813	832	851	871	891	912	933	955	977

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕНЪ.

(Числа означаютъ страницы; курсивныя — страницы, на которыхъ приведены года рожденія и кончины).

УКАЗАТЕЛЬ ПРЕДМЕТОВЪ.

(Числа означаютъ страницы).